Lehrstuhl für Mathematik IV
Prof. boshi. Li Chen
Matthew Liew, Tian Chu Gan, Thilo Kraft

Universität Mannheim
Fakultät für Wirtschaftsinformatik
und Wirtschaftsmathematik

FSS 2020

Dynamische Systeme - Lösung Ü10

1. *(5 Punkte)*
Sei $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und $x' = f(x)$ mit $f(x_*) = 0$. Zeigen Sie, dass x_* asymptotisch stabil ist, falls $f'(x_*) < 0$. (mit Hilfe von den Satz 5.4.1)

Beweis.
Sei $f'(x_*) < 0$ und $x(t)$ eine Lösung von $x' = f(x)$. Dann löst $u(t) := x(t) - x_*$ die Gleichung:

$$u' = f'(x_*)u + r(u), \quad r(u) = f(u + x_*) - f(x_*) - f'(x_*)u$$

Man beachte $f(x_*) = 0$. Insgesamt gilt dann $r(u) \overset{|u|\to 0}{\longrightarrow} 0$. Wir betrachten u nur in einer Umgebung von $u_* = 0$.
Wegen $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ existiert $\forall \rho > 0$ ein $\eta(\rho) > 0$ mit:

$$|r(u)| \leq \rho |u|, \quad \forall\, |u| < \eta$$

Die allgemeine Lösungsformel für eine inhomogene, lineare DGL liefert:

$$u(t) = e^{f'(x_+)t} u_0 + \int_0^t e^{f'(x_*)(t-s)} r(u(s))\, ds.$$

Wir multiplizieren beide Seiten mit $e^{-f'(x_*)t}$ und betrachten den Betrag. Dann erhalten wir:

$$|e^{-f'(x_*)t} u(t)| \leq |u_0| + \int_0^t e^{-f'(x_*)s} \rho |u(s)|\, ds.$$

Damit haben wir genau die Form vom Lemma von Gronwall (für $e^{-f'(x_*)t}u(t)$). Nach Multiplikation mit $e^{f'(x_*)}$ haben wir eine Abschätzung für $u(t)$:

$$|u(t)| \leq e^{(f'(x_*)+\rho)t} |u_0|.$$

Da wir $\rho > 0$ beliebig klein wählen können, ist der Ausdruck $f'(x_*) + \rho$ negativ und die rechte Seite monoton fallend in t. Es folgt direkt:

$$|u(t)| \leq e^{(f'(x_*)+\rho)0} |u_0| = |u_0| \leq \delta := \epsilon.$$

Damit ist $u_* = 0$ stabil für die DGL von u. Außerdem gilt auch

$$0 \leq \lim_{t\to\infty} |u(t)| \leq \lim_{t\to\infty} e^{(f'(x_*)+\rho)t} |u_0| = 0.$$

Also ist $u_* = 0$ auch attraktiv. Insgesamt ist $u_* = 0$ asymptotisch stabil. Damit ist auch x_* asymptotisch stabil für die ursprüngliche DGL.

2. *(5 Punkte)*
Betrachten Sie die Gleichung $y' = \alpha y + \beta y^3$, $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$. Charakterisieren Sie mit Hilfe von Bedingungen an α und β das Stabilitätsverhalten der Lösung $y_* = 0$.

Lösung
Betrachte die Gleichung $y' = \alpha y + \beta y^3 := f(y)$. Mit Aufgabe 1 bekommen wir das Stabilitätsverhalten aus $f'(y) = \alpha + 3\beta y^2$. Es gilt $f'(y_*) = \alpha$. Damit ergeben sich folgende Fälle:

(a) $\alpha < 0 : y_* = 0$ ist asymptotisch stabil,

(b) $\alpha > 0 : y_* = 0$ ist instabil,

(c) $\alpha = 0$: keine Aussage mit Aufgabe 1 möglich. Wir betrachten deshalb die DGL $y' = \beta y^3$ und lösen sie explizit.
Mit Trennung der Variablen erhalten wir:

$$y^2 = \frac{1}{-2\beta t + \frac{1}{y_0^2}}.$$

Offensichtlich ist $\dfrac{1}{y_0^2} > 0$. Deshalb gilt für $\beta > 0$: $\lim\limits_{t \to \frac{1}{2\beta y_0^2}} |y^2(t)| = \infty$, d.h. ist $y_* = 0$ instabil.
Für $\beta < 0$ ist der Nenner positiv und monoton wachsend in t, ingesamt ist die Funktion monoton fallend in t. Damit ist die Ruhelage $y_* = 0$ stabil. Es gilt auch: $\lim\limits_{t\to\infty} |y^2(t)| = 0$, d.h. ist $y_* = 0$ asymptotisch stabil.

3. *(5 Punkte)*
Sei $a, b, c, d, e, f > 0$. Untersuchen Sie die Equilibria des folgenden Systems:

$$\begin{cases} u' = au - bu^2 - euv, \\ v' = cv - dv^2 - fuv. \end{cases}$$

und wie ist das Stabilitätsverhalten der Equilibria.

Losung Beispiel aus Gewöhnliche Differentialgleichungen und dynamische Systeme (Prüss, Wilke), Kapitel 5.4 Prinzip der linearisierten Stabilität, Beispiel c), S. 99.

4. *(4 Punkte)*
Sei $H : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ aus C^2. Das H gehörige Hamilton-System ist definiert durch

$$\begin{aligned} \dot{q} &= H_p(q, p), \\ \dot{p} &= -H_q(q, p). \end{aligned} \tag{0.1}$$

Zeigen Sie, dass $H(q, p)$ eine Ljapunov-Funktion für die oberen Funktionen ist.

Lösung
Von der Kettenregel und Produktregel, folgt

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt}(q(t), p(t)) &= \dot{q} H_q(q, p) + \dot{p} H_p(q, p) \\ &= H_p(q, p) H_q(q, p) - H_q(q, p) H_p(q, p) \\ &= 0. \end{aligned} \tag{0.2}$$

Somit ist H also eine Ljapunov-funktion. $\square$

5. *(4 Punkte)*
Sei $a > 0$. Das lineare System

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 &= a(x_1 - x_0), \\ \dot{x}_i &= a(x_{i+1} + x_{i-1} - 2x_i), \quad i = 1, \dots, n, \\ \dot{x}_{N+1} &= a(x_N - x_{N+1}), \end{aligned} \tag{0.3}$$

entsteht durch räumliche Diskretisierung der Diffusionsgleichung $\partial_t u = b\partial_y^2$ für $(t, x) \in R_+ \times [0, 1]$ mit Neumannschen Randbedingugen, $\partial_y u(t, 0) = \partial_y u(t, 1) = 0$. Zeigen Sie, dass

$$V(x) = \sum_{i=1}^{N+1} (x_i - x_{i-1})^2,$$

eine strikte Ljapunov-Funktion für (0.1) ist.

Beweis
Das Lösungsverfahren für (0.3) ist eine Folgerung des Finite Differenz Verfahrens (Siehe Numerische ODE VL). Um die Notationen einig zu halten, stellen wir einen neuen Punkt vor. Seien $x_0 = x_{-1}$ und $x_{N+1} = x_{N+2}$, dann gilt

$$\dot{x}_i = a(x_{i+1} + x_{i+1} - 2x_i), \quad i = 0, \dots, N+1. \tag{0.4}$$

Wir leiten V nach t ab und erhalten

$$\frac{dV}{dt}(x(t)) = 2\sum_{i=1}^{N+1} (x_i - x_{i-1})(\dot{x}_i - \dot{x}_{j-1}).$$

Deshalb müssen wir nur zeigen, dass die rechte Seite negativ ist. Nach (0.4) gilt für $a > 0$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2a}\frac{dV}{dt}(x(t)) &= \sum_{i=1}^{N+1} (x_i - x_{i-1})(x_{i+1} + x_{i-1} - 2x_i - (x_{i-2} + x_i - 2x_{i-1})) \\ &= \sum_{i=1}^{N+1} (x_i - x_{i-1})\big[(x_{i+1} - x_i) - (x_i - x_{i-1})\big] \\ &\quad - \sum_{i=1}^{N+1} (x_i - x_{i-1})\big[(x_i - x_{i-1}) - (x_{i-1} - x_{i-2})\big] \\ &= \sum_{i=1}^{N+1} \Big[\underbrace{(x_i - x_{i-1}) - (x_{i+1} - x_i)\big]\big[(x_{i+1} - x_i) - (x_i - x_{i-1})}_{\leqslant 0}\Big] \\ &\quad + \underbrace{(x_{N+2} - x_{N+1})}_{=0}\big[(x_{N+2} - x_{N+1}) - (x_{N+1} - x_N)\big] \\ &\quad - (x_1 - x_0)\big[(x_1 - x_0) - \underbrace{(x_0 - x_{-1})}_{=0}\big] \\ &\leqslant -(x_1 - x_0)^2 < 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass V eine strikte Ljapunov Funktion ist.