Lehrstuhl für Mathematik IV
Prof. boshi Li Chen
Qitao Yin

Universität Mannheim
Fakultät für Wirtschaftsinformatik
und Wirtschaftsmathematik

19.02.2019

Dynamische Systeme und Stabilität (Übungsblatt 1)

Aufgabe 1: *(2 Punkte)*
Es sei eine Differentialgleichung 3. Ordnung durch

$$x''' = 3x' + \sin(x)$$

definiert. Schreiben Sie diese Gleichung als System 1. Ordnung.

Lösung
Setze

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x \\ x' \\ x'' \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad y' = \begin{pmatrix} x' \\ x'' \\ x''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ x'' \\ 3x' + \sin(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ 3y_2 + \sin(y_1) \end{pmatrix} =: g(y).$$

Daher erhalten wir

$$y' = g(y)$$

als System 1. Ordnung.

Aufgabe 2: *(2 Punkte)*
Prüfen Sie, ob die folgenden Differentialgleichungen linear sind.

1. $x'x = 1$;
2. $x' + x'' = 0$;
3. $x'' + \sin x^2 = 1$;
4. $\sin(x) + \cos(x) = x'$.

Lösung

1. nicht linear;
2. linear;

3. nicht linear;
4. nicht linear.

Aufgabe 3: *(5 Punkte)*
Bestimmen Sie die Lösungen $x(t)$ der folgenden Anfangswertprobleme:

1. $x' = t\sin(t^2)$, $x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$;
2. $x' = \frac{t^2}{t^3-1}$, $x(0) = 1$;
3. $x' = \frac{x\ln x}{\sin t}$, $x\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^e$;
4. $x' = \frac{e^{-x^2}}{x(2t+t^2)}$, $x(2) = 0$;
5. $x' = e^t\sin(2t)$, $x(0) = 1$.

Lösung

1. Der Ansatz über die Trennung der Variablen liefert
$$\begin{aligned} x(t) &= \int t\sin(t^2)\,dt = \frac{1}{2}\int \sin(t^2)\,dt^2 \\ &= -\frac{1}{2}\cos(t^2) + C. \end{aligned}$$
Mit Anfangswert $x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ erhalten wir
$$x\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi^2}{4}\right) + C = 1$$
$$\Longrightarrow \qquad C = 1 + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi^2}{4}\right)$$
2. Der Ansatz über die Trennung der Variablen liefert
$$\begin{aligned} x(t) &= \int \frac{t^2}{t^3-1}\,dt = \frac{1}{3}\int \frac{1}{t^3-1}\,dt^3 \\ &= \frac{1}{3}\int \frac{1}{t^3-1}\,d(t^3-1) = \frac{1}{3}\ln|t^3-1| + C. \end{aligned}$$
Mit Anfangswert $x(0) = 1$ erhalten wir
$$x(0) = \frac{1}{3}\ln 1 + C = 1 \quad \Longrightarrow \quad C = 1.$$

3. Der Ansatz über die Trennung der Variablen liefert

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x\ln x}\,dx &= \int \frac{1}{\sin t}\,dt \\
\Longrightarrow \qquad \int \frac{1}{\ln x}\,d\ln x &= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos t-1}{\cos t+1}\right| + C \\
\Longrightarrow \qquad \ln|\ln x| &= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos t-1}{\cos t+1}\right| + C.
\end{aligned}$$

Mit Anfangswert $x\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^e$ erhalten wir $C = 1$.

4. Der Ansatz über die Trennung der Variablen liefert

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{e^{-x^2}}\,dx &= \int \frac{1}{2t+t^2}\,dt \\
\Longrightarrow \quad \frac{1}{2}\int e^{x^2}\,dx^2 &= \int \frac{1}{2t+t^2}\,dt \\
\Longrightarrow \quad \frac{1}{2}e^{x^2} &= \int \frac{1}{(t+1)^2-1}\,d(t+1) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t}{t+2}\right| + C \\
\Longrightarrow \quad e^{x^2} &= \ln\left|\frac{t}{t+2}\right| + C
\end{aligned}$$

Mit Anfangswert $x(2) = 0$ erhalten wir $C = 1 + \ln 2$.

5. Der Ansatz über die Trennung der Variablen liefert

$$\begin{aligned}
x(t) &= \int e^t \sin(2t)\,dt = \int \sin(2t)\,de^t = e^t\sin(2t) - 2\int e^t\cos(2t)\,dt + C \\
&= e^t\sin(2t) - 2\int \cos(2t)\,de^t + C = e^t\sin(2t) - 2\left[e^t\cos(2t) + 2\int e^t\sin(2t)\,dt\right] + C \\
&= e^t\sin(2t) - 2e^t\cos(2t) - 4\int e^t\sin(2t)\,dt + C.
\end{aligned}$$

Setzen wir $I := \int e^t\sin(2t)\,dt$, dann

$$5I = e^t\sin(2t) - 2e^t\cos(2t) + C \quad \Longrightarrow \quad x(t) = \frac{1}{5}\left(e^t\sin(2t) - 2e^t\cos(2t)\right) + C.$$

Mit Anfangswert $x(0) = 1$ erhalten wir

$$x(0) = -\frac{2}{5} + C = 1 \quad \Longrightarrow \quad C = \frac{7}{5}.$$

Aufgabe 4: *(2 Punkte)*
Skizzieren Sie das Richtungsfeld der Differentialgleichung

$$x' = \log(t^2 + x^2),$$

und zeichnen Sie einige Lösungen ein. Wie sehen die Isoklinen aus?

Lösung
Wir setzen $x' = \log(t^2 + x^2) = C$, dann ist $t^2 + x^2 = e^c$, $c \in \mathbb{R}$. Die Isoklinen sind also Kreise um den Nullpunkte mit dem Radius $\sqrt{e^c}$. In allen Punkten auf dem Kreis ist der Anstieg $= C$. Variiert man $c \in (-\infty, +\infty)$, so erhalten wir eine Isoklinenschar für die Gleichung $x' = \log(t^2 + x^2)$.

Aufgabe 5: *(3 Punkte)*
Bestimme Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = 3|y|^{2/3}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Fertigen Sie eine Skizze an und bestimmen Sie die Menge aller Punkte, für welche das Anfangswertproblem nicht lokal eindeutig ist.

Lösung
Der Ansatz über die Trennung der Variablen liefert

$$y = (x + C)^3, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Wegen $g(0) = 0, (g(y) = |y|^{2/3})$ impliziert Satz 1.5.1, dass $y \equiv 0$ auch eine Lösung der Differentialgleichung $y' = 3|y|^{2/3}$ ist. Es existiert eine Schar von Lösungen zum Anfangswert $y(0) = 0$:

$$y_{a,b}(x) = \begin{cases} (x-a)^3, & x \leq a, \\ 0, & x \in [a,b], a \leq 0, b \geq 0, \\ (x-b)^3, & x \geq b. \end{cases}$$