Lehrstuhl für Mathematik IV
Prof. boshi. Li Chen
Matthew Liew, Tian Chu Gan, Thilo Kraft

Universität Mannheim
Fakultät für Wirtschaftsinformatik
und Wirtschaftsmathematik

**FSS 2020**

# Dynamische Systeme - Übung 8

**Hinweise:** Bitte senden Sie Ihre gescannte Lösungen spätestens am **Mittwoch, den 1.4.2020, 10:00 Uhr** an **dsfss2020@gmail.com**. Bitte achten Sie auf eine saubere bzw. gut lesbare Handschrift und ergänzt eine Punktetabelle in eurer Lösung.

1. *(6 Punkte)*
   Beweisen Sie den **Satz 4.2.4**: Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig, lokal Lipschitz in $x$ und $\tau$-periodisch in $t$. Außerdem $\exists\ R > 0$ sodass

   $$(f(t,x)|x) \leq 0, \quad \text{für alle } |x|_2 = R, t \in [0,\tau]$$

   gilt. Dann besitzt die Differientialgleichung $x' = f(t,x)$ mindestens eine $\tau$-periodische Lösung $x_*(t)$ auf $\mathbb{R}$.

2. *(6 Punkte)*
   Beweisen Sie den **Satz 4.3.1**: Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(G, \mathbb{R}^n)$ und $x(t,y)$ sei die Lösung von

   $$\begin{cases} x' = f(x), \\ x(0) = y, \end{cases}$$

   auf einem Intervall $J = [0,a] \subset J_y$. Dann ist die Abbildung $(t,y) \mapsto x(t,y)$ stetig differienzierbar und $X = X(t,y) = \dfrac{\partial x}{\partial y}(t,y)$ erfüllt das Anfangswertproblem

   $$\begin{cases} X' = A(t,y)X, \quad t \in J = [0,a], \\ X(0) = I. \end{cases}$$

   wobei $A(t,y) = f'(x(t,y))$ ist.

3. *(8 Punkte)*
   Betrachten Sie das Randwerproblem

   $$\begin{cases} \ddot{x} + g(x) = 0, \\ x(0) = x(1) = 0, \end{cases}$$

   wobei $\ddot{x} := \frac{d^2}{dt^2}x(t)$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lokal Lipschitz seien.
   Die **Shooting-Methode** zur Lösung solcher Randwerprobleme besteht drin, das entsprechende Anfangswertproblem mit $x(0) = 0, \dot{x}(0) = a$ zu lösen, und dann eine Nullstelle der Abbildung $\phi \in C^1(\mathbb{R})$ definiert durch $\phi(a) = x(1,a)$ zu suchen. Dabei bezeichnet $x(t,a)$ die Lösung dieses Anfangswertproblems.
   Ihre Aufgabe: Beweisen Sie mit dieser Methode einen Existensatz im Fall eines beschränkten $g$, d.h. für eine Konstante $M$,

   $$|g(x)| \leqslant M,$$

   für alle $x \in \mathbb{R}$.