Lehrstuhl für Mathematik IV
Prof. boshi. Li Chen
Matthew Liew, Tian Chu Gan, Thilo Kraft

Universität Mannheim
Fakultät für Wirtschaftsinformatik
und Wirtschaftsmathematik

FSS 2020

Dynamische Systeme - Übung 6

Hinweise: Bitte senden Sie Ihre gescannte Lösungen spätestens am **Mittwoch, den 25. März 2020, 10:00 Uhr** an **dsfss2020@gmail.com**. Bitte achten Sie auf eine saubere bzw. gut lesbare Handschrift und ergänzt eine Punktetabelle in eurer Lösung.

1. *(3 Punkte)*
   Bestimmen Sie sämtliche reellwertige Lösungen des Systems:

   (a)
   $$\begin{cases} x' = x - 2y - z \\ y' = y - x + z \\ z' = x - z \end{cases}$$

   (b)
   $$\begin{cases} x' + y' = y + z \\ y' + z' = z + x \\ z' + x' = x + y \end{cases}$$

2. *(8 Punkte)*
   Gegenstand dieser Aufgabe ist die *Exponentialabbildung* (für Matrizen), das heißt die Potenzreihe
   $$e^A := \exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{1}{k!}\, A^k \quad \text{für Matrizen } A \in \mathbb{C}^{n\times n},$$
   die wir etwa bei der Lösung von linearen Differentialgleichungssystemen mit konstanten Koeffizienten benötigen werden.

   (1) Funktionalgleichung der exp-Funktion
   Für zwei Matrizen $A,B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ gilt im Allgemeinen nicht $\exp(A+B) = \exp(A)\cdot\exp(B)$. Dies gilt nur, wenn die beiden Matrizen kommutieren, d.h. $[A,B] := AB - BA = 0$.

   (i) Zeigen Sie: Falls $[A,B] = 0$ gilt, so gilt die binomische Formel
   $$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$$

(ii) Begründen Sie kurz, an welcher Stelle bei der binomischen Formel ein Problem entsteht, wenn die Matrizen nicht kommutieren.

(iii) Zeigen Sie mit Teil (i) für kommutierende Matrizen die Formel

$$\exp(A+B) = \exp(A) \cdot \exp(B).$$

[Tipp: Absolute Konvergenz.]

(2) Wie man $\exp(A)$ ausrechnet
Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Zeigen Sie:

(i) *Basiswechsel.* Ist $C \in GL(n, \mathbb{C})$, so gilt $\exp(CAC^{-1}) = C \cdot \exp(A) \cdot C^{-1}$.

(ii) *Diagonalmatrizen.* Ist $A = \operatorname{diag}(c_1, \ldots, c_n)$ mit $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ eine Diagonalmatrix, so gilt $\exp(A) = \operatorname{diag}(e^{c_1}, \ldots, e^{c_n})$.

(iii) *Nilpotente Matrizen.* Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

eine nilpotente Matrix in Normalform. Man berechne $\exp(t \cdot A)$ für $t \in \mathbb{R}$.

(iv) *Jordan-Blöcke.* Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ und

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \lambda & 1 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

ein Jordan-Block zum Eigenwert λ. Berechnen Sie $\exp(t \cdot A)$ für $t \in \mathbb{R}$.
[Tipp: (1) in Verbindung mit (2)(ii),(iii).]

3. *(6 Punkte)*
Bestimmen Sie sämtliche reellwertige Lösungen des Systems.

(a)

$$x' = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{cases} x' = 2x + y - 2z + (2-t), \\ y' = -x, \\ z' = x + y - z + (1-t). \end{cases}$$

4. *(3 Punkte)*
Bestimmen Sie die Hauptfundamentalmatrix des Systems:

$$x' = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$