Lehrstuhl für Mathematik IV
Prof. boshi. Li Chen
Matthew Liew, Tian Chu Gan, Thilo Kraft

Universität Mannheim
Fakultät für Wirtschaftsinformatik
und Wirtschaftsmathematik

FSS 2020

Dynamische Systeme - Übung 5

1. *(6 Punkte)*
   Gegeben sei das SIRS-Epodemiemodell
$$\begin{aligned} u' &= -\lambda uv + \gamma w, \\ v' &= \lambda uv - (\mu + \nu)v, \\ w' &= \nu v - \gamma w, \end{aligned}$$
   wobei $\lambda, \gamma, \mu, \nu$ positive Konstanten bedeuten. Zeigen Sie, dass das AWP $u(0) = u_0 > 0, v(0) = v_0 > 0, w(0) = w_0 > 0$ für dieses System eindeutig lösbar ist, und dass die Lösungen für alle $t \geq 0$ existieren.

2. *(8 Punkte)*
   (a) Gegeben sei das Differentialgleichungssystem
$$x' = A(t)x,$$
   mit
$$A(t) = \begin{pmatrix} t & 1 \\ 0 & t \end{pmatrix}.$$
   Bestimmen Sie die Hauptfundamentalmatrix $Z(t)$ mit Anfangswert $Z(0) = I$.

   (b) Bestimmen Sie die Lösung für
$$\begin{aligned} x' &= A(t)x, \\ x_0 &= (2, 2)^T, \end{aligned}$$
   mithilfe der Hauptfundamentalmatrix.

3. *(6 Punkte)*
   Es sei $A : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^{2\times 2}$ definiert durch $A(t) := \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ sowie die (nicht-autonome) lineare Differentialgleichung
$$u'(t) = A(t) \cdot u(t) \tag{1}$$
   gegeben. Bestimmen Sie die Fundamentallösung $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^{2\times 2}$ von (1) zum Anfangszeitpunkt $t_0 := 0$, d.h. die Lösung von
$$F'(t) = A(t) \cdot F(t), \quad F(0) = 1.$$
   [Tipp: Zur Bestimmung von $F(t)$ betrachte man das zweidimensionale DGL-System (1) als System von zwei eindimensionalen Differentialgleichungen und löse diese separat nach den bekannten Methoden.]

Hinweise: Die Lösungen sind bis spätestens **Mittwoch, den 18. März 2020, 10:00 Uhr** in den entsprechenden Briefkasten (Eingang C-Teil, A5-Gebäude) einzuwerfen.