Lehrstuhl für Mathematik IV
Prof. boshi. Li Chen
Matthew Liew, Tian Chu Gan, Thilo Kraft

Universität Mannheim
Fakultät für Wirtschaftsinformatik
und Wirtschaftsmathematik

FSS 2020

Dynamische Systeme - Übung 4

1. *(7 Punkte)*
(Die Fredholmsche Integralgleichung) Sei K eine kompakte Menge in $\mathbb{R}^n$ und $X := C(K)$ der Vektorraum aller stetigen Funktionen $f : K \to \mathbb{R}$, der mittels Norm

$$\|f\|_\infty := \max_{t \in K} |f(t)|$$

bekanntlich zu einem Banach-Raum wird.

Seien $u \in C([a,b])$ und $k \in C([a,b] \times [a,b])$ gegebene stetige Funktionen und

$$M := \max_{t,s \in [a,b]} |k(t,s)|.$$

Zeigen Sie, dass die sog. *Fredholmsche Integralgleichung*

$$x(t) = \mu \int_a^b k(t,s)x(s)\, ds + u(t), \quad t \in [a,b]$$

dann für jeden Parameter $\mu \in \mathbb{R}$ mit

$$|\mu| < \frac{1}{M(b-a)}$$

genau eine Lösung $x \in C([a,b])$ besitzt.

[Tipp: Banachscher Fixpunktsatz mit $F(x) := u + \mu \int_a^b k(\cdot, s)x(s)\, ds$, $x \in C[a,b]$.]

2. *(4 Punkte)*
Sei $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ stetig und gelte

$$f(t,x) < 0 \ \text{ für } tx > 0, \quad f(t,x) > 0 \ \text{ für } tx < 0.$$

Zeigen Sie, dass $x(t) \equiv 0$ die einzige Lösung der Gleichung $x' = f(t,x)$ mit Anfangswert $x(0) = 0$ ist.

3. *(4 Punkte)*
Beweisen Sie mit Hilfe des Fixpunktsatzes von Banach und dem Fortsetzungsprinzip, dass das Anfangswertproblem

$$x' = (t^2 - x^2)^{3/2}, \quad x(0) = 0$$

genau eine Lösung auf ganz $\mathbb{R}$ besitzt.

Bitte wenden.

4. **Aufgabe 2:** *(5 Punkte)*
   Sei $J = [0, +\infty]$ und $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig mit

$$F(x) - F(y) \leq L(x - y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R},$$

   wobei $L \in \mathbb{R}_+$. Sei y eine Lösung von

$$y' = t^2 + F(y), \quad \forall\, t \geq 0$$

   und x erfülle

$$x' \leq t^2 + F(x), \quad \forall\, t \geq 0.$$

   Weiter sei $x(0) = y(0)$. Beweisen Sie, dass

$$x(t) \leq y(t), \quad \forall\, t \geq 0.$$

   Hinweis: Gronwallsche Ungleichung.

Hinweise: Die Lösungen sind bis spätestens **Mittwoch, den 11. März 2020, 10:00 Uhr** in den entsprechenden Briefkasten (Eingang C-Teil, A5-Gebäude) einzuwerfen.