Lehrstuhl für Mathematik IV
Prof. boshi. Li Chen
Matthew Liew, Tian Chu Gan, Thilo Kraft

Universität Mannheim
Fakultät für Wirtschaftsinformatik
und Wirtschaftsmathematik

FSS 2020

Dynamische Systeme - Übung 3

1. *(4 Punkte)*
   Es sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \to \mathbb{R}^m$, $(t, y) \mapsto f(t, y)$ eine stetige und bezüglich y stetig differenzierbare Abbildung derart, dass $(t, y) \mapsto \dfrac{\partial f(t, y)}{\partial y}$ stetig ist. Zeigen Sie: Die Funktion f ist lokal Lipschitz-stetig auf D bzgl. y, d.h. in jedem Punkt $(t_0, y_0) \in D$ gibt es eine Umgebung $U \subseteq D$ von (t_0, y_0) und eine Konstante $L = L(t_0, y_0) > 0$ mit
   $$\|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq L\|y_1 - y_2\| \quad \text{für alle } (t, y_1), (t, y_2) \in U.$$

2. *(4 Punkte)*
   Sei $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ stetig und gelte
   $$f(t, x) < 0 \ \text{für}\, tx > 0, \quad f(t, x) > 0 \ \text{für}\, tx < 0.$$
   Zeigen Sie, dass $x(t) \equiv 0$ die einzige Lösung der Gleichung $x' = f(t, x)$ mit Anfangswert $x(0) = 0$ ist.

3. *(4 Punkte)*
   Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichungen
   (a) $(\cos(x + y^2) + 3y)dx + (2y\cos(x + y^2) + 3x)dy = 0$;
   (b) $(xy^2 - y^3)dx + (1 - xy^2)dy = 0$.

4. *(4 Punkte)*
   (a) Bestimmen Sie für die Clairaut-DGL
   $$y = xy' + (y')^2$$
   alle Lösungen in expliziter Form.
   (b) Bestimmen Sie die Lösungen der Differentialgleichung
   $$y = x(y')^2 + \ln(y')^2$$
   in Parameterform.

Bitte wenden.

5. *(4 Punkte)*
   Sei $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$u(t) := \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(tx) e^{-x^2}\, dx, \quad t \in \mathbb{R}.$$

   Berechnen Sie $u(t)$, indem Sie eine Differentialgleichung für $u(t)$ aufstellen, und das zugehörige Anfangswertproblem mit

$$u(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$$

   lösen.
   (Hinweis: 1.Ableitung. Begründen Sie, warum darf man die Ableitung in das Integral reinziehen.)

Die Lösungen sind bis spätestens **Mittwoch, den 4.März.2020, 10 Uhr** in den entsprechenden Briefkasten einzuwerfen.