Lehrstuhl für Mathematik IV
Prof. boshi. Li Chen
Matthew Liew, Tian Chu Gan, Thilo Kraft

Universität Mannheim
Fakultät für Wirtschaftsinformatik
und Wirtschaftsmathematik

FSS 2020

Dynamische Systeme - Übung 11

Hinweise: Bitte senden Sie Ihre gescannte Lösungen spätestens am **Mittwoch, den 13.5.2020, 10:00 Uhr** an **dsfss2020@gmail.com**. Bitte achten Sie auf eine saubere bzw. gut lesbare Handschrift und ergänzt eine Punktetabelle in eurer Lösung.

1. *(5 Punkte)*
   Betrachten Sie die Ruhelagen $(x, x') = (0, 0)$, und $(x, x') = (\pi, 0)$ des Pendels

$$x'' + \omega^2 \sin x = 0.$$

   Zeigen Sie, dass die erste stabil aber nicht asymptotisch stabil, und die zweite instabil ist.

2. *(5 Punkte)*
   Sei $H \in C^2(\mathbb{R}^{2n}; \mathbb{R})$. Das zu H gehörige Hamilton-System ist definiert durch

$$\begin{aligned} q' &= H_p(q, p), \\ p' &= -H_q(q, p). \end{aligned} \tag{1}$$

   Zeigen Sie, wann ein Equilibrium von (1) stabil **und** unstabil ist?

3. *(5 Punkte)*
   Beweisen Sie **Satz 5.5.4.**: Sei $V \in C(G; \mathbb{R})$ eine Ljapunov-Funktion für $x' = f(x)$ und x_* sei ein Equilibrium für $x' = f(x)$. Dann gilt:
   1. Ist x_* ein striktes Minimum von V, so ist x_* stabil für $x' = f(x)$.
   2. Ist x_* isoliert in $\mathcal{E} = f^{-1}(0)$, ein striktes Minimum von V und ist V eine strikte Ljapunov-Funktion, so ist x_* asymptotisch stabil für $x' = f(x)$.

4. *(5 Punkte)*
   Zeigen Sie mit direkter Methode von Ljapunov, dass das Koexistenzequilibrium $(x_*, y_*) = \left(\frac{d}{e}, \frac{ae - bd}{ce}\right)$ vom Volterra-Lotka-System asymptotisch stabil ist.

$$\text{(VLS)} \quad \begin{cases} x' = ax - cxy - bx^2, \\ y' = -dy + exy, \end{cases} \qquad a, b, c, d, e > 0.$$

   Tipp: $V(x, y) = e\left(x - x_* \log \dfrac{x}{x_*}\right) + c\left(y - y_* \log \dfrac{y}{y_*}\right)$.