Lehrstuhl für Mathematik IV
Prof. boshi. Li Chen
Matthew Liew, Tian Chu Gan, Thilo Kraft

Universität Mannheim
Fakultät für Wirtschaftsinformatik
und Wirtschaftsmathematik

FSS 2020

Dynamische Systeme - Übung 10

Hinweise: Bitte senden Sie Ihre gescannte Lösungen spätestens am **Mittwoch, den 6.5.2020, 10:00 Uhr** an **dsfss2020@gmail.com**. Bitte achten Sie auf eine saubere bzw. gut lesbare Handschrift und ergänzt eine Punketetabelle in eurer Lösung.

1. *(4 Punkte)*
   Sei $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und $x' = f(x)$ mit $f(x_*) = 0$. Zeigen Sie, dass x_* asymptotisch stabil ist, falls $f'(x_*) < 0$. (Tipp: mit Satz 6.11 nicht direkt verwenden)

2. *(4 Punkte)*
   Betrachten Sie die Gleichung $y' = \alpha y + \beta y^3$, $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$. Charakterisieren Sie mit Hilfe von Bedingungen an α und β das Stabilitätsverhalten der Lösung $y_* = 0$.

3. *(4 Punkte)*
   Sei $a, b, c, d, e, f > 0$. Untersuchen Sie die Equilibria des folgenden Systems:

$$\begin{cases} u' = au - bu^2 - euv, \\ v' = cv - dv^2 - fuv. \end{cases}$$

   und wie ist das Stabilitätsverhalten der Equilibria.

4. *(4 Punkte)*
   Sei $H : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ aus C^2. Das H gehörige Hamilton-System ist definiert durch

$$\begin{aligned} \dot{q} &= H_p(q, p), \\ \dot{p} &= -H_q(q, p). \end{aligned} \tag{1}$$

   Zeigen Sie, dass $H(q, p)$ eine Ljapunov-Funktion für die oberen Funktionen ist.

5. *(4 Punkte)*
   Sei $a > 0$. Das lineare System

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 &= a(x_1 - x_0), \\ \dot{x}_i &= a(x_{i+1} + x_{i-1} - 2x_i), \quad i = 1, \ldots, n, \\ \dot{x}_{N+1} &= a(x_N - x_{N+1}), \end{aligned}$$

   entsteht durch räumlicheDiskretisierung der Diffusionsgleichung $\partial_t u = b\partial_y^2$ für $(t, x) \in R_+ \times [0, 1]$ mit Neumannschen Randbedingugen, $\partial_y u(t, 0) = \partial_y u(t, 1) = 0$. Zeigen Sie, dass

$$V(x) = \sum_{i=1}^{N+1} (x_i - x_{i-1})^2,$$

   eine strikte Ljapunov-Funktion für (1) ist.