

Vorlesungsnotizen

Dynamische Systeme

Li Chen

Frühjahrssemester 2020

Inhalt:

Es gibt zwei Teile in diesem Kurs. Der erste Teil befasst sich mit einer Einführung für Gewöhnliche Differentialgleichungen, wobei die elementare Lösungsmethode, Existenz und Eindeutigkeit, Stetige und differenzierbare Abhängigkeit erläutert werden. Der zweite Teil, die Dynamische Systeme, enthält Elementare Stabilitätstheorie, Invarianz, Ljapunov-Funktionen und Stabilität, Ebene autonome Systeme.

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	2
1.1	Einführung mit Beispielen	2
1.2	Ordnung Reduktion	3
1.3	Fragestellungen der Theorie	4
1.4	Linienelement und Richtungsfeld	4
2	Elementare Methoden	5
2.1	Trennung der Variablen	5
2.2	Die lineare Differentialgleichungen	9
2.3	Die Bernoulli und Riccati Differentialgleichungen	12
2.4	Die Exakte Differentialgleichungen	13
2.5	Implizite Differentialgleichung erster Ordnung	16
3	Existenz und Eindeutigkeit	19
3.1	Hilfsmittel aus der Funktionalanalysis	19
3.2	Lipschitz Stetigkeit	20
3.3	Der Eindeutigkeit Satz	22
3.4	Existenzsatz von Picard-Lindelöf	24
3.5	Picard Iteration	26
3.6	Fortsetzbarkeit und maximale Existenzintervall	28
3.7	Differential und Integralungleichungen	30
3.8	Globale Existenz	32
4	Lineare Systeme	36
4.1	Homogene Systeme und Lösungsräume	36
4.2	Inhomogene Systeme und Variation der Konstanten	39
4.3	Bestimmung von Fundamentalsystem für Systeme mit konstanten Koeffizienten	40
4.4	Lineare Gleichungen höher Ordnung	47
4.5	Lineare Differentialgleichung höher Ordnung mit den Konstanten Koeffizienten	51
5	Stetige und differenzierbare Abhängigkeit	54
5.1	Stetige Abhängigkeit	54
5.2	Anwendungen der Abhängigkeit	57
5.2.1	Comparison Prinzip	57
5.2.2	Positivität von Lösungen	57
5.2.3	Periodische Lösungen	59
5.3	Differenzierbarkeit der Lösungen nach Daten	62
5.4	Dynamische Systeme	64

6	Elementare Stabilitätstheorie	66
6.1	Definition der Stabilität	66
6.2	Ebene lineare autonome Systeme	68
6.3	Stabilität linearer Systeme	74
6.4	Das Prinzip der linearisierten Stabilität	77
6.5	Ljapunov Funktionen (Lyapunov functionals)	80
6.6	Anwendung der Stabilitätstheorie zur Dynamik von Viren	87
7	Existenz von Peano	91
7.1	Existenzsatz von Peano	91
7.2	Nichtfortsetzbare Lösungen	92
7.3	Stetige Abhängigkeit	93
8	Invariante Mengen	96
8.1	Invariante Mengen	96
8.2	Invarianzkriterien	100
8.3	Konvexe invariante Mengen	101

1 Einführung

1.1 Einführung mit Beispielen

Eine Differentialgleichung ist im allgemeinen durch die folgende Formel geschrieben

$$h(t, x, x', \dots, x^{(m)}) = 0, \quad t \in J \subset \mathbb{R} \text{ ein Intervall} \quad (1.1)$$

wobei $h : J \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine gegebene Funktion ist. t ist die einzige unabhängige Variable. (1.1) ist in impliziter Form, und die Gleichung, die durch die Form

$$x^{(m)} = g(t, x, x', \dots, x^{(m-1)})$$

gegeben ist heißt in expliziter Form.

Definition 1.1 Die **Ordnung** einer Differentialgleichung ist definiert durch die höchste nichttriviale enthaltene Ableitung. (1.1) hat die Ordnung m , sofern $\partial_{x^{(m)}} h \neq 0$ ist. Eine Funktion $x : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt eine Lösung von (1.1) in J , falls $x \in C^m(J : \mathbb{R}^n)$ ist und die Gleichung (1.1) für alle $t \in J$ gilt.

Bemerkung 1.2 Falls es mehrere unabhängige Variable gibt in einer Differentialgleichung, nennt man sie partielle Differentialgleichungen. Die Lösungen sind Funktionen mehrerer Variablen.

Beispiel 1.3 1. Das Bevölkerungswachstum Model

$$x' = \alpha x, \quad \alpha \in \mathbb{R}^n$$

wobei $x(t)$ die Größe einer Population zur Zeit t ist, $x'(t)$ die zeitliche Änderung der Population. $\alpha \in \mathbb{R}^n$ ist die Wachstumsrate. Offensichtlich ist $x(t) = Ce^{\alpha t}$ die Lösung mit einer Integrationskonstanten C , die durch einen Anfangswert $x(t_0) = x_0$ festgelegt wird.

2. Bevölkerungswachstum mit dem logistischhen Wachstum

$$x' = \alpha x \left(1 - \frac{x}{k}\right), \quad t \in \mathbb{R}, \quad \alpha > 0, \quad k > 0, \\ x(0) = x_0, \quad k \text{ ist die sogenannte Kapazität oder Sättigungswert.}$$

Die Lösungsdarstellung ist durch

$$x(t) = \frac{x_0 k}{x_0 + e^{-\alpha t}(k - x_0)}$$

gegeben und gegen k konvergiert für $t \rightarrow +\infty$.

3. Das Räuber-Beute-Model (Volterra-Lotka, 1924)

$$\begin{aligned}x' &= (a - by)x = ax - byx, \\y' &= y(-c + dx) = -cy + dxy.\end{aligned}$$

wobei $a, b, c, d > 0$. $x(t)$ ist die Größe der Population der Beute zur Zeit t und $y(t)$ die Größe der Population der Räuber zur Zeit t . ax und $-cy$ repräsentieren Wachstum der Beute und die Reduktion der Räuber. Das Produkt xy repräsentiert die Interaktion der Spezies.

4. Das mathematische Pendel

$$x'' + \omega^2 \sin x = 0.$$

Diese Gleichung kann man mit Hilfe von dem 2. Newtonschen Gesetz herleiten. Die Gleichung ist nichtlinear. Die Taylor Entwicklung Formel liefert dass für klein x , kann man die Funktion $\sin x$ mit x approximieren. Dann eine Approximation des mathematischen Pendel lautet

$$x'' + \omega^2 x = 0,$$

die eine lineare Differentialgleichung ist.

Definition 1.4 Eine Differentialgleichung heißt **linear**, falls sie linear in allen abhängigen Variablen ist, also in $x, x', \dots, x^{(m)}$. Ansonsten heißt sie **nichtlinear**.

1.2 Ordnung Reduktion

Durch eine geeignete Substitution kann man Differentialgleichung höherer Ordnung auf ein System erster Ordnung reduzieren.

Sei

$$y^{(m)} = g(t, y, y', \dots, y^{(m-1)}) \quad (1.2)$$

eine explizite Differentialgleichung m -ter Ordnung. Man setze

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(m-1)} \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

und x erfüllt das 1. Ordnung System

$$x' = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ \vdots \\ y^{(m)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_m \\ g(t, x_1, \dots, x_m) \end{pmatrix} := f(t, x) \quad (1.4)$$

Proposition 1.5 *Die Funktion $y \in C^m(J)$ löst (1.2) genau dann, wenn $x \in C^1(J; \mathbb{R}^m)$ das System (1.4) löst.*

Bemerkung 1.6 Diese Reduktion auf ein System 1. Ordnung kann ebenso auch für Systeme höherer Ordnung durchgeführt werden.

1.3 Fragestellungen der Theorie

Die Lösungstheorie betrifft sich auf eine Reihe von Fragen.

1. Existenz der Lösungen? Wenn die Lösungen existieren, wie viele? Sind sie lokal oder global?
2. Eindeutigkeit der Lösung.
3. Abhängigkeit und Differenzierbarkeit der Lösung von den Daten.
4. Wie berechnet man die Lösungen? (Analytisch, Numerisch)
5. Qualitative Theorie (Eigenschaften der Lösungen). Die Lösungsverhalten sind in Anwendungen sehr wichtig.

1.4 Linienelement und Richtungsfeld

Wir betrachten das Anfangswertproblem einer Gleichung

$$\begin{aligned} x' &= f(t, x) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned} \tag{1.5}$$

wobei $f : J \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall ist.

Das Graph von x , $(t, x(t))$ heißt eine Lösungskurve, die durch (t_0, x_0) läuft. Der Anstieg der Kurve ist durch $f(t, x(t))$ gegeben.

Definition 1.7 *Ein Zahlentripel (t, x, m) wird geometrisch so bedeutet dass m die Steigung einer durch den Punkt (t, x) gehenden Geraden angibt. (t, x, m) nennt man ein Linienelement. Die Gesamtheit aller Linienelemente zu ausgewählten Punkten $(t, x) \in J \times \mathbb{R}$ nennt man Richtungsfeld der Gleichung $x' = f(t, x)$.*

Beispiel 1.8 $x' = t^2 + x^2$

2 Elementare Methoden

2.1 Trennung der Variablen

Wir untersuchen die folgende Differentialgleichung getrennten Variablen,

$$x'(t) = h(t) \cdot g(x). \quad x(t_0) = x_0.$$

Die Hauptidee ist, dass wir die Gleichung so 'formal trennen' dass gilt

$$\frac{dx}{g(x)} = h(t)dt.$$

Wir integrieren beide Seiten von (t_0, x_0) bis (t, x) und folgt,

$$\int_{x_0}^x \frac{1}{g(x)} dx = \int_{t_0}^t h(t) dt.$$

Mit der Stammfunktionen von g bzw. h , bezeichnet G und H werden, haben wir dann,

$$G(x) = H(t).$$

Dann ist die Lösung durch folgende gegeben

$$x(t) = G^{-1}(H(t)).$$

Satz 2.1 Seien $h : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $t_0 \in (\alpha, \beta)$, $x_0 \in (a, b)$. Die Stammfunktionen seien gegeben,

$$G(x) = \int_{x_0}^x \frac{1}{g(s)} ds, \text{ sofern } g(x_0) \neq 0,$$

$$H(t) = \int_{t_0}^t h(\tau) d\tau.$$

Dann,

1. ist $g(x_0) = 0$, so ist $x(t) \equiv x_0$ eine Lösung auf (α, β) ,
Bemerkung: es kann jedoch weitere Lösungen geben (nicht-Eindeutigkeit)
2. ist $g(x_0) \neq 0$, so gibt es ein $\delta > 0$, sodass die eindeutig bestimmte Lösung $x(t)$ auf $J_\delta := (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ mit $x(t_0) = x_0$ durch $x(t) = G^{-1}(H(t))$, wobei $t \in J_\delta$ gegeben ist.

Beweis:

1. Wenn $g(x_0) = 0$ ist, so ist $x'|_{t_0} = h(t_0)g(x_0) = 0$. Dann ist es offenbar $x \equiv 0$ eine Lösung. Beispiel für Nicht-Eindeutigkeit werden wir später geben.
2. Angenommen $x = x(t)$ eine Lösung ist. Nach der Voraussetzung, die g ist, so ist $g(x(t))$. Da $g(x_0) \neq 0$; $\exists \delta > 0$ sodass $g(x(t)) \neq 0$, $\forall t \in J_\delta$. Dann gilt

$$\frac{x'(t)}{g(x(t))} = h(t), \quad \forall t \in J_\delta.$$

Mit der Kettenregel erhalten wir,

$$\frac{d}{dt}G(x(t)) = \frac{d(G(x(t)))}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{x'}{g(x(t))} = h(t).$$

Der Hauptsatz der Differential und Integralrechnung liefert,

$$G(x(t)) - G(x_0) = H(t), \quad \forall t \in J_\delta.$$

Aufgrund von $G'(x(t)) = \frac{dG}{dx}(x(t)) = \frac{1}{g(x(t))} \neq 0$, $\forall t \in J_\delta$, ist die Funktion G streng monoton nahe bei x_0 . Dies stellt die Existenz der Umkehrfunktion G^{-1} und gilt

$$x(t) = G^{-1}(H(t)), \quad \forall t \in J_\delta.$$

Daher ist the Lösung $x(t)$ durch diese Darstellung eindeutig bestimmt. ■

Beispiel 2.2 $x' = -2x$. Wenn $x_0 = 0$, then ist $x = 0$ eine Lösung. Sonst kann man direkt rechnen.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{x} &= -2dt \\ \Rightarrow \ln |x| &= -2t + C \\ \Rightarrow x &= c \cdot e^{-2t}, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

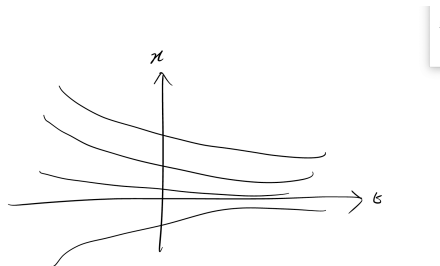


Abbildung 2.1: Beispiel 2.2.

Beispiel 2.3 $x' = \sqrt{|x|}$. $x \equiv 0$ ist eine Lösung. Aufgrund der Symmetrie des Richtungsfelds, wenn $x(t)$ eine Lösung ist, ist $-x(-t)$ auch eine Lösung. Daher ist es genug, positive Lösungen zu zeigen.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{\sqrt{x}} = dt &\Rightarrow \int_0^x \frac{1}{\sqrt{z}} = t + c \Rightarrow 2\sqrt{x} = t + c \\ &\Rightarrow x = \left(\frac{t+c}{2}\right)^2, \quad t \geq -c. \end{aligned}$$

Sei $x(2) = 1$, dann die Lösungen sind

$$x(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{4}, & t > 0, \\ 0, & -c \leq t \leq 0, \\ -\frac{(t+c)^2}{4}, & t < -c. \end{cases}$$

Und,

$$\tilde{x}(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{4}, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0, \end{cases}$$

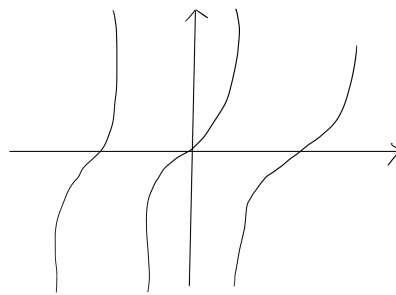


Abbildung 2.2: Beispiel 2.3.

Bemerkung 2.4 Das Beispiel 2.3 mit jedem Anfangswert hast unendlich viele Lösungen.

1. Wenn $(x_0, t_0) = (0, 0)$, $c = 0$, dann verzweigen die Lösungen sich direkt an $(0, 0)$.
2. (*Lokal eindeutig lösbar*) Wenn $(x_0, t_0) \neq (0, 0)$, $c \neq 0$, dann hat man zunächst eine Lösung, die einiger Entfernung von (x_0, t_0) verzweigt. Wenn $x = 0$, gibt es viele Möglichkeiten: Die Lösung kann an $x = 0$ bleiben, oder mit $x(t) = -\frac{(t+c)^2}{4}$ weiter gehen.

Satz 2.5 (Weiteres Ergebnis wenn $g(x_0) = 0$) Seien $h : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. $g(x_0) = 0$ und $g(x) \neq 0$, $\forall x_0 < x < \eta + x_0$, für $\eta > 0$. (bzw. $x_0 - \eta < x < x_0$) und ist das uneigentliche Integral

$$\int_{x_0}^{x_0+\eta} \frac{ds}{g(s)}, \left(\text{bzw. } \int_{x_0-\eta}^{x_0} \frac{ds}{g(s)} \right)$$

divergent, so gibt es keine Lösung, die von ober (bzw. unten) in die Gerade $x = x_0$ einmündet (hineinführen).

Bemerkung 2.6 Die Resultat zeigt nur eine Lösung $x(t) \equiv x_0$ gibt und die Lösungen $x(t)$, die an einer Stelle $> x_0$ ist, bleibt in ihrem Verlauf $> x_0$. (bzw. $<$)

Beweis: Wir nehmen an es existiere eine Lösung $x(t)$, die nicht identisch gleich x_0 ist. o.B.d.A., $\exists t_0 < \bar{t}$ und $x_0 < x(\bar{t}) < x_0 + \eta$ sodass $\forall t < \bar{t}$, $x_0 < x(t) < x_0 + \eta$, es gilt

$$\int_{x(\bar{t})}^{x(t)} \frac{ds}{g(s)} = \int_{\bar{t}}^t h(\tau) d\tau.$$

Für $t \rightarrow t_0$, bleibt das Integral $\int_{\bar{t}}^t h(\tau) d\tau$ beschränkt. Während $\lim_{t \rightarrow t_0} \int_{x(\bar{t})}^{x(t)} \frac{ds}{g(s)}$ divergent ist. Das ist ein Widerspruch. ■

Beispiele für Trennung der Variablen. Sei $f \in C$.

1. $x' = f(at + bx + c)$, $b \neq 0$. Sei

$$u(t) = at + bx(t) + c,$$

so gilt für u

$$u' = a + bx' = a + b \cdot f(u).$$

2. $x' = f\left(\frac{x}{t}\right)$. Sei

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{x(t)}{t}, \text{ dann für } u \text{ gilt die Gleichung} \\ u' &= \frac{x'(t)}{t} - \frac{x(t)}{t^2} = \frac{f(u)}{t} - \frac{u}{t}, \\ \Rightarrow u' &= \frac{f(u) - u}{t}. \end{aligned}$$

3. $x' = f\left(\frac{at+bx+c}{\alpha t+\beta x+\gamma}\right)$, damit

$$M = \det \begin{bmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{bmatrix} \neq 0. \quad (2.6)$$

Die Gleichungen

$$\begin{cases} at + bx + c = 0, \\ \alpha t + \beta x + \gamma = 0, \end{cases}$$

haben genaue Lösung t_0, x_0 . Dann setzen wir

$$\begin{cases} \bar{x} = x - x_0 = x(t) - x_0, \\ \bar{t} = t - t_0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} &= x'(t) = \bar{x}'(\bar{t} + t_0) \\ &= f\left(\frac{a\bar{t} + b\bar{x}}{\alpha\bar{t} + \beta\bar{x}}\right) = f\left(\frac{a + b\frac{\bar{x}}{\bar{t}}}{\alpha + \beta\frac{\bar{x}}{\bar{t}}}\right). \end{aligned}$$

2.2 Die lineare Differentialgleichungen

Seien $g(t), h(t) \in C(J)$. Wir betrachten die lineare Gleichung 1. Ordnung.

$$x' + g(t)x = h(t).$$

Ist $h \equiv 0$, so nennt man die eine **homogene** Gleichung, andernfalls eine **inhomogene** lineare Gleichung.

Proposition 2.7 *Das Anfangswertproblem*

$$\begin{cases} x' + g(t)x = 0, \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad t_0 \in J,$$

hat eine eindeutige Lösung,

$$x(t) = x_0 e^{-\int_{t_0}^t g(s) ds}.$$

Die Lösungsdarstellung kann man durch der Trennung der Variablen rechnen. Oder nach dem direkten Rechnen wie folgend. Wir multiplizieren die Gleichung mit $e^{\int_{t_0}^t g(s) ds}$.

$$\begin{aligned} e^{\int_{t_0}^t g(s) ds} x'(t) + g(t) e^{\int_{t_0}^t g(s) ds} x(t) &= 0, \\ \Rightarrow \left(e^{\int_{t_0}^t g(s) ds} x(t) \right)' &= 0, \end{aligned}$$

Nach dem Hauptsatz mit dem Integral $\int_{t_0}^t$, erhalten wir

$$\begin{aligned} &\Rightarrow e^{\int_{t_0}^t g(s) ds} x(t) - e^0 x(t_0) = 0, \\ &\Rightarrow x(t) = e^{-\int_{t_0}^t g(s) ds} x_0. \end{aligned}$$

Für die inhomogene Gleichung

$$\begin{cases} x' + g(t)x &= h(t), \\ x(t_0) &= x_0, \quad \forall t_0 \in J, \end{cases}$$

wir lösen die mit der **Methode der Variation der Konstant**.

Ansatz. $x(t) = C(t) \cdot e^{-G(t)}$, wobei $G(t) = \int_{t_0}^t g(s) ds$.

Durchpassende Wahl von $C(t)$ eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung zu gewinnen. Wir setzen den Ansatz in die Gleichung ein,

$$x' + g(t)x = (C'(t) - g(t)C(t) + g(t)C(t)) e^{-G(t)} = C' \cdot e^{-G(t)}.$$

Dann gilt,

$$C' = h(t)e^{G(t)} \Rightarrow C(t) = \int_{t_0}^t h(s)e^{G(s)} ds + C_0,$$

die eine allgemeine Lösung ist. Nun setzen wir den Anfangswert ein, gilt

$$\begin{aligned} x_0 &= x(t_0) = C(t_0) \cdot e^{-G(t_0)} = C_0 e^0 = C_0 \\ \Rightarrow x(t) &= e^{-G(t)} \left(\int_{t_0}^t h(s)e^{G(s)} ds + x_0 \right) \\ \Rightarrow x(t) &= x_0 e^{-\int_{t_0}^t g(s) ds} + \int_{t_0}^t h(s) e^{-\int_{t_0}^t g(\tau) d\tau + \int_{t_0}^s g(\tau) d\tau} ds \\ &= x_0 e^{-\int_{t_0}^t g(s) ds} + \int_{t_0}^t h(s) \cdot e^{-\int_s^t g(\tau) d\tau} ds. \end{aligned}$$

Satz 2.8 *Das Anfangswertproblem*

$$\begin{cases} x' + g(t)x = h(t), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

hat, wenn die Funktionen $g(t)$, $h(t)$ in J stetig sind und $t_0 \in J$ ist, genau eine Lösung,

$$x(t) = x_0 e^{-\int_{t_0}^t g(s) ds} + \int_{t_0}^t h(s) \cdot e^{-\int_s^t g(\tau) d\tau} ds, \quad \forall t \in J.$$

Alternative kann man wie folgenden direktes Rechnen. Für das Anfangswertproblem,

$$x' + g(t)x = h(t), \quad x(t_0) = x_0.$$

Multiplizieren wir die Gleichung mit $e^{\int_{t_0}^t g(s)ds}$. Dann gilt,

$$\left(e^{\int_{t_0}^t g(s)ds} x \right)' = h(t) e^{\int_{t_0}^t g(s)ds},$$

nach dem Hauptsatz erhalten wir

$$\begin{aligned} e^{\int_{t_0}^t g(s)ds} x(t) - e^0 x_0 &= \int_{t_0}^t h(s) e^{\int_{t_0}^s g(\tau)d\tau} ds, \\ \Rightarrow x(t) &= x_0 e^{-\int_{t_0}^t g(s)ds} + \int_{t_0}^t h(s) e^{\int_t^s g(\tau)d\tau} ds. \end{aligned}$$

Superposition von Lösungen (für alle Lineare Operatoren L) Einer Operator L ist linear, wenn $\forall a, b \in \mathbb{R}$, gilt

$$L(a\phi + b\psi) = aL(\phi) + bL(\psi).$$

1. $Lx = x' + g(t)x$, dann es folgt

$$Lx_i = h_i \Rightarrow Lx = h \text{ mit } x = \sum_i \lambda_i y_i, \quad h = \sum_i \lambda_i h_i,$$

hierbei ist λ_i reell, und i durch läuft eine endliche Indexmenge.

2. Eindeutigkeit der Lösung

Sind $x, \bar{x}$ zwei Lösungen, d.h. $Lx = h, L\bar{x} = h$. So ist $z(t) = x(t) - \bar{x}(t)$ eine Lösung der homogenen Differentialgleichung.

$$Lz = Lx - L\bar{x} = 0.$$

Mit anderen Worten, alle Lösungen x der inhomogenen Differentialgleichung sind durch $x = \tilde{x} + z$ gegeben, wobei $\tilde{x}$ eine fest gewählte Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist und $z(t)$ sind alle Lösungen der homogenen Differentialgleichung durch läuft.

Beispiel. $x' + x \sin t = \sin^3 t$. Es ist $\int_0^t \sin s ds = -\cos t + \tilde{C}$ und $z(t; C) = C \cdot e^{\cos t}$ die allgemeine Lösung der homogene Differentialgleichung.

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t) &= \int_0^t \sin^3 s e^{\cos t - \cos s} ds, \\ &\stackrel{u=\cos s}{=} e^{\cos t} \int_1^{\cos t} (u^2 - 1) e^{-u} du, \\ &= -e^{\cos t} \left((u^2 - 1) + 2u + 2 \right) e^{-u} \Big|_1^{\cos t} \\ &= \sin^2 t - 2 \cos t - 2 + 4e^{\cos t - 1} \end{aligned}$$

eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung. Dann ist die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$\begin{aligned} x(t; C) &= \sin^2 t - 2 \cos t - 2 + 4e^{\cos t - 1} + C \cdot e^{\cos t} \\ &= \sin^2 t - 2 \cos t - 2 + C \cdot e^{\cos t}. \end{aligned}$$

2.3 Die Bernoulli und Riccati Differentialgleichungen

Bernoulli-DGL

$$x' + g(t)x + h(t)x^\alpha = 0.$$

Wir multiplizieren $(1 - \alpha)x^{-\alpha}$. So erhalten wir,

$$(x^{1-\alpha})' + (1 - \alpha)g(t)x^{1-\alpha} + (1 - \alpha)h(t) = 0,$$

die eine lineare Gleichung für $x^{1-\alpha}$ ist.

Für das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} x' + \frac{x}{1+t} + (1+t)x^4 = 0 & , \\ x(0) = -1. \end{cases}$$

Sei $z = x^{-3}$, dann erfüllt z die DGL

$$z' - \frac{3}{1+t}z - 3(1+t) = 0, \quad \text{mit } z(0) = -1.$$

Die Lösung ist $z(t) = (1+t)^2(2t-1)$. Zurück zu x gilt

$$x(t) = \frac{1}{(1+t)^{\frac{2}{3}}(2t-1)}, \quad -1 < t < \frac{1}{2}.$$

Riccati-DGL

$$x' + g(t)x + h(t)x^2 = k(t).$$

Seien g, h, k , stetig. Im Falle $k \equiv 0$, ist sie eine Bernoullische Gleichung.

Falls $k(t) \not\equiv 0$, gibt es keine geschlossene Form. Aber wenn wir eine Lösung erkennen, können wir sie lösen:

Seien x und ϕ zwei Lösungen, dann erfüllt $u = x - \phi$, die Differentialgleichung,

$$\begin{aligned} u' + g(t)u + h(t)(x^2 - \phi^2) &= 0, \\ \Rightarrow u' + [g(t) + 2\phi(t)h(t)]u(t) + h(t)u^2 &= 0. \end{aligned}$$

Das heißt, dass u die Riccati Differentialgleichung erfüllt, sei $z = u^{-1}$,

$$z' - [g(t) + 2\phi(t)h(t)]z - h(t) = 0.$$

Also kennt man eine Lösung ϕ , erhält man alle Lösungen in der Form

$$x(t) = \phi(t) + \frac{1}{z(t)}.$$

z.B. für die DGL $x' - x^2 - 2tx = 2$. Eine spezielle Lösung ist $\phi = -t^{-1}$, dann erfüllt z die DGL

$$z' + z(2t - \frac{2}{t}) + 1 = 0.$$

Eine Lösung ist

$$\begin{aligned}\bar{z}(t) &= -t^2 e^{-t^2} \int_0^t \frac{e^{s^2}}{s^2} ds \\ &= t - 2t^2 e^{-t^2} \int_0^t e^{s^2} ds.\end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung für $z' + z(2t - \frac{2}{t}) = 0$ ist $z(t; C) = Ct^2 e^{-t^2}$. Dann ist die allgemeine Lösung der Riccati DGL

$$\begin{aligned}x(t; C) &= \phi(t) + \frac{1}{z(t; C) + \bar{z}} \\ &= \frac{-e^{t^2} \left(C - 2 \int_0^t e^{s^2} ds \right)}{1 + te^{-t^2} \left(C - 2 \int_0^t e^{s^2} ds \right)}.\end{aligned}$$

2.4 Die Exakte Differentialgleichungen

Eine DGL $x' = \phi(t, x)$ sei in der Form geschrieben,

$$f(t, x)dt + g(t, x)dx = 0.$$

Falls eine Funktion $z(t, x)$ existiert sodass,

$$f(t, x) = \frac{\partial z}{\partial t} \text{ und } g(t, x) = \frac{\partial z}{\partial x},$$

ist, dann nennt man die GDL eine **vollständige** oder **exakte** DGL. $z(t, x) \equiv \text{const}$ ist die allgemeine Lösung in impliziter Form.

Eine Aussage aus Analysis: Für die gemischte zweite Ableitungen einer Funktion, d.h. $\frac{\partial^2 z}{\partial t \partial x}$ und $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial t}$, wenn die stetig sind, dann gilt,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial t}.$$

Daher erhalten wir ein notwendiges Kriterium für exakte DGL,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial t}.$$

z.B.

$$t \, dt + x \, dx = 0$$

Es gilt,

$$\begin{aligned} z(t, x) &= \int t \, dt \\ &= \frac{1}{2} t^2 + C(x). \end{aligned}$$

Andererseits.

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} t^2 \right) + C'(x) \\ &= 0 + C'(x) = x, \\ \Rightarrow C(x) &= \frac{1}{2} x^2 + C. \end{aligned}$$

Also die Lösung ist durch die folgende Form (impliziert) gegen,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} t^2 + \frac{1}{2} x^2 &= C, \\ \Rightarrow t^2 + x^2 &= C. \end{aligned}$$

Bemerkung: Normalerweise ist $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial t}$ nicht erfüllt. Man muss einen integrierenden Faktor finden.

Der Integrierende Faktor:

$$f(t, x) \, dt + g(t, x) \, dx = 0,$$

mit

$$\frac{\partial f}{\partial x} \neq \frac{\partial g}{\partial t}.$$

Wenn eine geeignete Funktion $\mu(t, x)$ existiert, sodass

$$\frac{\partial(f\mu)}{\partial x} = \frac{\partial(g\mu)}{\partial t},$$

dann nehmen wir $\mu(t, x)$ einen integrierenden Faktor.

Es ist äquivalent, dass

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} f - \frac{\partial \mu}{\partial t} g + \mu \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial t} \right) = 0.$$

Die Hauptsache ist, um eine μ zu finden. Das heißt man muss diese PDE Lösen, hart!

Bemerkung: Eine solche μ ist genug. (Muss nicht alle Lösungen von diesem PDE erledigen.)

Beispiel

$$x' = -\frac{tx^3}{1+2t^2x^2},$$

welche ist äquivalent zu

$$tx^3 dt + (1 + 2t^2x^2) dx = 0.$$

Die Gleichung für μ lautet,

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} tx^3 - \frac{\partial \mu}{\partial t} (1 + 2t^2x^2) + \mu(3tx^2 - 4tx^2) = 0.$$

Wir versuchen, für $\frac{\partial \mu}{\partial t} = 0$, eine Lösung zu finden, d.h. μ ist nun nur von x abhängig. Dann reduziert die Gleichung für μ auf

$$x \frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu \Rightarrow \mu = C \cdot x.$$

Da nur eine Lösung benötigt wird, nehmen wir einfach $C \equiv 1$. Daher gilt

$$tx^4 dt + (x + 2t^2x^3) dx = 0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = tx^4 \Rightarrow z = x^4 \frac{t^2}{2} + C_1(x) = \frac{t^2x^4}{2} + C_1(x).$$

Entsprechend ergibt

$$\frac{\partial z}{\partial x} = x + 2t^2x^3 \Rightarrow z = \frac{x^2}{2} + \frac{t^2x^4}{2} + C_2(t).$$

Nun vergleichen wir die beide Lösungen für z , erhalten wir

$$C_2(t) = 0 \text{ und } C_1(x) = \frac{x^2}{2} + C.$$

Damit lautet die allgemeine Lösung

$$x^2 + t^2x^4 = C.$$

2.5 Implizierte Differentialgleichung erster Ordnung

$$F(t, x, x') = 0, \quad \text{wobei } F \in C(\mathbb{R}^3).$$

Sei $(\bar{t}, \bar{x}, \bar{p}) \in D \subset \mathbb{R}^3$ sodass $F(\bar{t}, \bar{x}, \bar{p}) = 0$.

Wenn es eine Umgebung $U \subset D$ von Punkt $(\bar{t}, \bar{x}, \bar{p})$ gibt sodass $F(t, x, p) = 0$ eine eindeutige Lösung in der Form

$$p = f(t, x),$$

mit einer stetigen f in U hat, dann nennen wir $(\bar{t}, \bar{x}, \bar{p})$ einen **regulären** Linienelement. Die nichtreguläre Linienelement nennen wir **Singuläre**, und (t, x) ein **singulärer** Punkt, wenn es ein singuläres Linienelement (t, x, p) gibt.

Beispiel:

$$(x')^2 = 4t^2, \quad p = \pm 2t.$$

Linienelemente sind die Tripel $(t, x, \pm 2t)$.

Lösungen sind die Parabeln $x = C \pm t^2$.

Nur für $t = 0$ ist eine Auflösung von $p^2 = 4t^2$ in explizierter Form unmöglich, d.h. Singulär sind die Linienelemente $(0, x, 0)$ und Punkt, $(0, x)$, also die x -Achse.

Satz 2.9 Sind in einer Umgebung von $(\bar{t}, \bar{x}, \bar{p}) \in D$ die Funktionen $F(t, x, p)$ und $F_p(t, x, p)$ stetig und ist $F(\bar{t}, \bar{x}, \bar{p}) = 0$, $F(\bar{t}, \bar{x}, \bar{p}) \neq 0$, so ist $(\bar{t}, \bar{x}, \bar{p})$ ein reguläres Linienelement.

Den Beweis kann man mit Hilfe von dem Satz der implizierten Funktion durch geben.

Parameterdarsellung mit x' als Parameter

Beispiele

1. $t = g(x')$, $g \in C^1$.

Sei $x' = p$. Hier ist $t(p) = g(p)$ gegeben, und die Lösungskurven sind

$$\begin{cases} t(p) &= g(p), \\ x(p) &= \int p \cdot g'(p) dp + C, \end{cases}$$

wobei $p = \frac{dx}{dt} = \frac{dx/dp}{dt/dp} \Rightarrow \frac{dx}{dp} = p \cdot \frac{dt}{dp}$ verwendet wird.

2. $x = g(x')$, $g \in C^1$.

die Lösungskurven sind

$$\begin{cases} x(p) &= g(p), \\ t(p) &= \int \frac{g'(p)}{p} dp + C, \end{cases}$$

wobei $p = \frac{dx}{dt} = \frac{dx/dp}{dt/dp} \Rightarrow \frac{dt}{dp} = \frac{dx}{dp}/p$ verwendet wird. Ferner ist die konstante Funktion $x = g(0)$ eine Lösung falls $0 \in J$.

3. (Clairaut-Differentialgleichung) $x = tx' + g(x')$, $g \in C^1$.

Aus $x(p) = t(p) \cdot p + g(p)$ folgt

$$\frac{dx}{dp} = \frac{dt}{dp} \cdot p + t(p) + g'(p).$$

Dann mit $\frac{dx}{dp} = p \cdot \frac{dt}{dp}$ erhalten wir

$$\begin{cases} t(p) &= -g'(p), \\ x(p) &= -pg'(p) + g(p). \end{cases}$$

Dies ist eine Lösung. Es ist offensichtlich dass alle Geraden $x = ct + g(c)$, $\forall c \in J$ auch Lösungen sind.

4. $x = tx' + e^{x'}$

Lösungskurven sind die Geraden $x = ct + e^c$, $c \in \mathbb{R}$ und ihre Envelope

$$\begin{cases} t &= -e^p, \\ x &= (1-p)e^p, \quad p \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = t(\ln(-t) - 1), \quad t < 0.$$

5. (d'Alembert Differentialgleichung) $x = tf(x') + g(x')$.

$$\begin{aligned} \stackrel{x'=p}{\Rightarrow} x(p) &= tf(p) + g(p), \\ \Rightarrow \frac{dx}{dp} &= \frac{dt}{dp}f(p) + t(p)f'(p) + g'(p), \\ \stackrel{\frac{dx}{dp}=p \frac{dt}{dp}}{\Rightarrow} \frac{dt}{dp} &= \frac{t(p)f'(p) + g'(p)}{p - f(p)}. \end{aligned}$$

Es ist eine lineare Gleichung für $t(p)$, die lösbar ist. Daher wird $x(p)$ durch $x(p) = t(p)f(p) + g(p)$ ausgegeben.

Zusammenfassung: Für die implizierte erste Ordnung DGL,

$$F(t', x, x') = 0,$$

kann man $x' = p$ als Parameter nennen, also $F(t(p), x(p), p) = 0$. Nach der partiellen Ableitungen gilt

$$F_t \cdot \frac{dt}{dp} + F_x \cdot \frac{dx}{dp} + F_p = 0,$$

Mit Hilfe von $\frac{dx}{dp} = p \cdot \frac{dt}{dp}$ erhält man

$$\frac{dt}{dp} = -\frac{F_p}{F_t + pF_x}, \text{ und } \frac{dx}{dp} = -\frac{p \cdot F_p}{F_t + pF_x}.$$

In vielen Fällen, kann man nur einer der obigen Formen benutzen, z.B.,

$$\begin{aligned} x = G(t, x') &\Rightarrow \frac{dt}{dp} = \frac{G_p(t, p)}{p - G_t(t, p)}, \quad x(p) = G(t(p), p), \\ t = H(x, x') &\Rightarrow \frac{dx}{dp} = \frac{pH_p(x, p)}{1 - pH_x(x, p)}, \quad t(p) = H(x(p), p). \end{aligned}$$

3 Existenz und Eindeutigkeit

Im diesen Abschnitt betrachten wir das Anfangswertproblem 1. Ordnung System

$$\begin{aligned} x' &= f(t, x) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

wobei $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen ist. Die Existenz und Eindeutigkeit dieses Problems werden gezeigt.

3.1 Hilfsmittel aus der Funktionalanalysis

- Linearer Raum
- Normierter Raum
- Metrischer Raum
- Konvergenz und Vollständigkeit. Ein linear normiert Raum L heißt vollständig, wenn jede Cauchy-Folge von Elementen aus L einen Grenzwert in L besitzt.

Beispiel 3.1 • $\mathbb{R}^n$, der n dimensionale Euklidische Raum.

Elementen sind durch $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) = (a_i)$ dargestellt.

Addition und Multiplikation sind durch $a + b = (a_i + b_i)$ und $\lambda a = (\lambda a_i)$ gegeben.

Die folgende äquivalente Normen sind verwendet werden kann

- * $\|a\|_2 = \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}$, die Euklid-Norm
- * $\|a\|_1 = |a_1| + \dots + |a_n|$, die Summern-Norm
- * $\|a\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |a_i|$, die Maximum-Norm
- Es sei $K \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Menge und $C(K)$ die Menge aller auf K stetigen reellwertigen Funktionen $f(x)$, $x \in K$.
 $C(K)$ ist ein linear Raum, da $f + g, \lambda f \in C(K)$ gilt für alle $f, g \in C(K)$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.

Die Maximum-Norm

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in K} |f(x)|. \quad (3.8)$$

Eine gewichtete Maximum-Norm

$$\|f\|_p = \max_{x \in K} p(x) |f(x)| \quad (3.9)$$

mit der Gewichtsfunktion $p(x)$ fest vorgegeben und $\exists 0 < \alpha \leq \beta$ sodass $0 < \alpha \leq p(x) \leq \beta < +\infty$.

- Banach Raum

Ein Banachraum ist ein vollständiger linear normierter Raum.

- Operatoren und Funktionale

Es seien E, F zwei reelle (komplexe) normierte Räume. Eine Abbildung

$$T : D \rightarrow F, \quad D \subset E$$

heißt Funktional wenn $F = \mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{C}$). Ein Operator $T : D \rightarrow F$ heißt linear, wenn D ein linearer Unterraum von E ist und es gelte

$$T(\lambda x + \mu y) = \lambda T(x) + \mu T(y), \quad \forall x, y \in D, \lambda, \mu \in \mathbb{R}(\mathbb{C}).$$

Falls T linear ist, statt $T(x)$ wird häufig einfach Tx geschrieben.

Stetigkeit. Man sagt, der Operator $T : D \rightarrow F$ sei stetig im Punkt $x_0 \in D$, wenn aus $x_n \in D$, $x_n \rightarrow x_0$ folgt $Tx_n \rightarrow Tx_0$. Äquivalent ist die $\epsilon - \delta$ Formulierung:

Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, sodass aus $x \in D$ mit $\|x - x_0\| < \delta$ folgt $\|Tx - Tx_0\| < \epsilon$.

3.2 Lipschitz Stetigkeit

Sei $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine offene Menge.

Definition 3.2 Eine stetige Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt **lokal Lipschitz** bzgl. x falls zu jedem Punkt $(t_1, x_1) \in G$ eine Kugel $\overline{B_r(x_1)}$ und ein $\alpha > 0$ mit $[t_1 - \alpha, t_1 + \alpha] \times \overline{B_r(x_1)} \subset G$, sowie eine Konstante $L = L(t_1, x_1) > 0$ existieren sodass gilt:

$$|f(t, x) - f(t, \bar{x})| \leq L(t_1, x_1)|x - \bar{x}|, \quad \forall t \in [t_1 - \alpha, t_1 + \alpha], \forall x, \bar{x} \in \overline{B_r(x_1)}.$$

f heißt **global Lipschitz** bzgl. x , falls die Konstante $L > 0$ unabhängig von $(t_1, x_1) \in G$ ist, also

$$|f(t, x) - f(t, \bar{x})| \leq L|x - \bar{x}|, \quad \forall (t, x), (t, \bar{x}) \in G.$$

Proposition 3.3 Sei $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und bzgl. x stetig differenzierbar, dann ist f lokal Lipschitz in x .

Beweis: Übung. ■

Proposition 3.4 Sei $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und lokal Lipschitz in x und es sei $K \subset G$ kompakt, dann ist die Einschränkung $f|_K$ von f auf K global Lipschitz in x .

Beweis: Angenommen $f|_K$ ist nicht global Lipschitz, also $\forall n \in \mathbb{N}, \exists (t_n, x_n), (t_n, \bar{x}_n) \in K$ sodass gilt:

$$|f(t_n, x_n) - f(t_n, \bar{x}_n)| > n|x_n - \bar{x}_n|$$

Da K kompakt ist, existieren Teilfolgen (t_{n_k}, x_{n_k}) von (t_n, x_n) und $(t_{n_k}, \bar{x}_{n_k})$ von $(t_n, \bar{x}_n)$ sodass

$$(t_{n_k}, x_{n_k}) \rightarrow (t_*, x_*) \in K, \quad k \rightarrow \infty$$

$$(t_{n_k}, \bar{x}_{n_k}) \rightarrow (t_*, \bar{x}_*) \in K, \quad k \rightarrow \infty$$

Da $f|_K \in C(K)$ ist, hat sie ein Maximum $M = \max_K |f(t, x)| < \infty$. Daraus folgt

$$|x_{n_k} - \bar{x}_{n_k}| < \frac{1}{n_k} |f(t_{n_k}, x_{n_k}) - f(t_{n_k}, \bar{x}_{n_k})| \leq \frac{1}{n_k} 2M \rightarrow 0$$

für $k \rightarrow \infty$, welche zeigt $x_* = \bar{x}_*$. Die lokale Lipschitz Stetigkeit von f in x liefert dass, für $x = x_*$, $t = t_*$, existieren $\alpha^* > 0$, $r^* > 0$ und $L(t^*, x^*) > 0$ sodass gilt

$$|f(t, x) - f(t, \bar{x})| \leq L(t^*, x^*)|x - \bar{x}|, \quad \forall t \in [t^* - \alpha^*, t^* + \alpha^*], x, \bar{x} \in \overline{B_{r^*}(x^*)}.$$

Wegen $\lim_{k \rightarrow \infty} t_{n_k} = t^*$ und $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \bar{x}_{n_k} = x^*$, existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$ sodass $\forall k > k_0$ gilt

$$|t_{n_k} - t^*| \leq \frac{\alpha^*}{2}, \quad |x_{n_k} - x^*| = |\bar{x}_{n_k} - x^*| \leq \frac{r^*}{2}.$$

Daher erhalten wir die folgende Abschätzung

$$n_k |x_{n_k} - \bar{x}_{n_k}| < |f(t_{n_k}, x_{n_k}) - f(t_{n_k}, \bar{x}_{n_k})| \leq L(t^*, x^*) |x_{n_k} - \bar{x}_{n_k}|,$$

welche ergibt $n_k < L(t^*, x^*) < \infty$. Das ist ein Widerspruch. ■

Satz 3.5 (Banach Fixpunkt Satz) *Es sei (M, d) ein vollständiger metrischer Raum und $T : M \rightarrow M$ eine Kontraktion, d.h. es existiert eine Konstante $q \in (0, 1)$ so dass*

$$d(Tx, Ty) \leq qd(x, y), \quad \forall x, y \in M$$

gilt. Dann besitzt T genau einen Fixpunkt $x_ \in M$, also $Tx_* = x_*$.*

Bemerkung 3.6 Viele Existenzsätze der Differentialgleichungen lassen sich in einem geeigneten Banachraum B in Form eine Gleichung $x = Tx$ schreiben. Eine Lösung von $x = Tx$ nennt man einen Fixpunkt von T .

Beweis:[Banach Fixpunkt Satz] Man benutzt ein Iterationsverfahren, der das Problem sukzessiv approximiert. $\forall x_0 \in M$, man setzt

$$x_1 = Tx_0, x_2 = Tx_1, \dots, x_{n+1} = Tx_n, \dots$$

Dann $\forall n, p \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} d(x_{n+p}, x_n) &\leq \sum_{j=1}^p d(x_{n+j}, x_{n+j-1}) \\ &\leq \sum_{j=2}^p qd(x_{n+j-1}, x_{n+j-2}) + d(x_{n+1}, x_n) \\ &\leq \sum_{j=0}^p q^j d(x_{n+1}, x_n) \leq \sum_{j=0}^p q^{j+n} d(x_1, x_0) \\ &= \frac{q^n(1 - q^p)}{1 - q} d(x_1, x_0) \leq \frac{q^n}{1 - q} d(x_1, x_0) \rightarrow 0, \quad 0 < q < 1. \end{aligned}$$

Daraus folgt dass die Folge $(x_n)_{n=0}^\infty$ eine Cauchy Folge ist. Nach der Vollständigkeit besitzt sie ein Grenzwert, $\bar{x}$, also $d(x_n, \bar{x}) \rightarrow 0$. Nun lassen wir $n \rightarrow \infty$ auf dem Iterationsverfahren $Tx_n = x_{n+1}$, erhalten wir dann $T\bar{x} = \bar{x}$.

Sind $\bar{x}$ und $\bar{y}$ zwei Fixpunkten, also $T\bar{x} = \bar{x}$ und $T\bar{y} = \bar{y}$, dann folgt nach der Kontraktion dass,

$$d(\bar{x}, \bar{y}) = d(T\bar{x}, T\bar{y}) \leq qd(\bar{x}, \bar{y}),$$

welche ist $(1 - q)d(\bar{x}, \bar{y}) = 0$, also $\bar{x} = \bar{y}$. ■

3.3 Der Eindeutigkeit Satz

Satz 3.7 (Eindeutigkeit) Sei $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen und $f \in C(G; \mathbb{R}^n)$ lokal Lipschitz in x . Dann existiert höchstens eine Lösung von (3.7).

Beweis: Seien $x, \bar{x} \in C^1([t_0, t_1]; \mathbb{R}^n)$ zwei Lösungen und $(t, x(t)), (t, \bar{x}(t)) \in G$ für $t \in [t_0, t_1]$. Dann ist die Menge

$$K = \{(t, x(t)), (t, \bar{x}(t)) \in G : t \in [t_0, t_1]\} \subset G$$

kompakt, dann ist die Einschränkung $f|_K$ auf K global Lipschitz stetig. Sei L ihre Lipschitz Konstante, also

$$|f(t, x) - f(t, \bar{x})| \leq L|x - \bar{x}|, \quad \forall (t, x), (t, \bar{x}) \in K.$$

Nun schreiben wir das Anfangswertproblem (3.7) in seine integrale Form um,

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds, \quad \forall t \in [t_0, t_1] \\ \bar{x}(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \bar{x}(s)) ds, \quad \forall t \in [t_0, t_1] \end{aligned}$$

Dann folgt die Abschätzung

$$\begin{aligned} \rho(t) &\triangleq |x(t) - \bar{x}(t)| = \left| \int_{t_0}^t (f(s, x(s)) - f(s, \bar{x}(s))) ds \right| \\ &\leq \int_{t_0}^t |f(s, x(s)) - f(s, \bar{x}(s))| ds \leq L \int_{t_0}^t |x(s) - \bar{x}(s)| ds \\ &= L \int_{t_0}^t \rho(s) ds = L \int_{t_0}^t e^{-\alpha(s-t_0)} \rho(s) e^{\alpha(s-t_0)} ds \\ &\leq L \max_{s \in [t_0, t_1]} \left(e^{-\alpha(s-t_0)} \rho(s) \right) \int_{t_0}^t e^{\alpha(s-t_0)} ds \\ &\leq \frac{L}{\alpha} e^{\alpha(t-t_0)} \max_{s \in [t_0, t_1]} \left(e^{-\alpha(s-t_0)} \rho(s) \right) \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\max_{t \in [t_0, t_1]} e^{-\alpha(t-t_0)} \rho(t) \leq \frac{L}{\alpha} \max_{s \in [t_0, t_1]} \left(e^{-\alpha(s-t_0)} \rho(s) \right)$$

Nun wählen wir $\alpha = 2L$ und gilt

$$\max_{s \in [t_0, t_1]} \left(e^{-\alpha(s-t_0)} \rho(s) \right) \leq 0,$$

welche sagt dass $\rho(t) \equiv 0$ für $t \in [t_0, t_1]$. Und daraus folgt $x(t) \equiv \bar{x}(t)$. ■

Bemerkung 3.8 Für das Beispiel $x' = \sqrt{|x|}$, $x(0) = 0$, es hat keine eindeutige Lösung. Die Funktion $\sqrt{x}$ in keiner Umgebung von $x = 0$ Lipschitz stetig, deswegen erfüllt sich die Voraussetzung des Eindeutigkeit Satzes nicht. Eine Erklärung für “ $\sqrt{x}$ ist in der Nahe von $x = 0$ nicht Lipschitz stetig.” Nach dem Mittelwertsatz der differential Rechnung gilt: $\forall 0 < x < \bar{x}$, $\exists \xi \in (x, \bar{x})$ sodass gilt

$$|\sqrt{x} - \sqrt{\bar{x}}| = \frac{1}{2\sqrt{\xi}} |x - \bar{x}|.$$

Wenn x und $\bar{x}$ nahe beim 0 legen, ist $\frac{1}{\sqrt{\xi}}$ nach oben unbeschränkt.

3.4 Existenzsatz von Picard-Lindelöf

Satz 3.9 (Existenzsatz von Picard-Lindelöf) Sei $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen, $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und lokal Lipschitz in x . Dann existiert ein $\delta > 0$ und eine eindeutige differenzierbare Funktion $x \in C^1(J_\delta; \mathbb{R}^n)$ mit $J_\delta = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, sodass $(t, x(t)) \in G$ für alle $t \in J_\delta$ gilt, und $x(t)$ löst das Anfangswertproblem (3.7) im Intervall J_δ .

Beweis: Wir zeigen die Existenz nach rechts, also auf $[t_0, t_0 + \delta]$, $\delta > 0$. Die Resultat nach links kann ähnlich gezeigt werden. Das Problem (3.7) ist äquivalent zur Integralgleichung

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds.$$

Seien $\delta_0 > 0$ und $r > 0$ so fixiert dass $J_{\delta_0} \times \overline{B_r(x_0)} \subset G$ ist, wobei

$$\overline{B_r(x_0)} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| \leq r\}.$$

Wir setzen $m = \max_{J_{\delta_0} \times \overline{B_r(x_0)}} |f(t, x)|$. Um Banach Fixpunktsatz zu verwenden, konstruieren wir einen metrischen Raum (M, d) und eine Abbildung $T : M \rightarrow M$, die Kontraktion ist.

- **Schritt 1. Definition von M und T .**

Wir definieren

$$M = \{x \in C(J_\delta; \mathbb{R}^n) : x(t) \in \overline{B_r(x_0)}, x(t_0) = x_0, t \in J_\delta = [t_0, t_0 + \delta]\}$$

wobei $\delta \leq \delta_0$ im weiteren festgelegt wird.

$\forall x \in M$, definieren wir eine Abbildung durch

$$T(x(t)) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds.$$

- **Schritt 2. Zeigen $TM \subset M$.**

Aus der Stetigkeit von f und x , ist $T(x(t))$ auch stetig und $\forall t \in J_\delta$ gilt

$$\begin{aligned} |T(x(t)) - x_0| &= \left| \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \right| \\ &\leq \int_{t_0}^t |f(s, x(s))| ds \leq \delta \max_{(t,x) \in J_\delta \times \overline{B_r(x_0)}} |f(t, x)| \leq \delta m \end{aligned}$$

Dann für $\delta \leq \min\{\delta_0, \frac{r}{m}\}$, erhalten wir dass $|T(x(t)) - x_0| \leq r$, $\forall t \in J_\delta$, also $T(x(t)) \in \overline{B_r(x_0)}$.

• **Schritt 3. Kontraktionseigenschaft für T .**

Auf M kann man verschiedene Metrik definieren, z. B. man benutzt die Maximum-Norm in (3.8) oder die Maximum-Norm mit Gewicht in (3.9). In den folgenden Beweisen werden wir mit dieser zwei Metriken die Kontraktion zu zeigen. Allerdings einer reicht für die vollständigung des Beweises.

* **Kontraktion mit der Maximum-Norm**

Auf M ist die Norm durch $\|x\|_\infty = \max_{t \in J_\delta} |x(t)|$ definiert. Die Norm induzierte Metrik d_1 ist

$$d_1(x, \bar{x}) = \|x - \bar{x}\|_\infty, \quad x, \bar{x} \in M.$$

Mit der Metrik d_1 , können wir wie folgend die Kontraktion von T zeigen.

$$\begin{aligned} d_1(T(x), T(\bar{x})) &= \max_{t \in J_\delta} |T(x(t)) - T(\bar{x}(t))| \\ &= \max_{t \in J_\delta} \left| \int_{t_0}^t (f(s, x(s)) - f(s, \bar{x}(s))) ds \right| \\ &\leq \max_{t \in J_\delta} \int_{t_0}^t |f(s, x(s)) - f(s, \bar{x}(s))| ds \\ &\leq L \max_{t \in J_\delta} \int_{t_0}^t |x(s) - \bar{x}(s)| ds \\ &\leq L \delta d_1(x, \bar{x}). \end{aligned}$$

Nun für $\delta \leq \min\{\delta_0, \frac{r}{m}, \frac{1}{2L}\}$ gilt

$$d_1(T(x), T(\bar{x})) \leq \frac{1}{2} d_1(x, \bar{x}).$$

Dann nach dem Banach Fixpunktsatz erhält man genau einen Fixpunkt $x_* \in M$ von T sodass gilt

$$x_*(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x_*(s)) ds, \quad t \in J_\delta.$$

* **Kontraktion mit der gewichteten Maximum-Norm**

Man kann auf M eine andere Metrik durch Norm in (3.9) mit einem ausgewählten Gewicht definieren.

$$d_2(x, \bar{x}) = \max_{t \in J_\delta} e^{-\alpha(t-t_0)} |x(t) - \bar{x}(t)|, \quad \forall x, \bar{x} \in M,$$

wobei α im weiteren fest gelegt wird. Daraus folgt

$$\begin{aligned}
& d_2(T(x), T(\bar{x})) \\
&= \max_{t \in J_\delta} e^{-\alpha(t-t_0)} \left| \int_{t_0}^t (f(s, x(s)) - f(s, \bar{x}(s))) ds \right| \\
&\leq L \max_{t \in J_\delta} e^{-\alpha(t-t_0)} \int_{t_0}^t |x(s) - \bar{x}(s)| ds \\
&= L \max_{t \in J_\delta} e^{-\alpha(t-t_0)} \int_{t_0}^t e^{-\alpha(s-t_0)} |x(s) - \bar{x}(s)| e^{\alpha(s-t_0)} ds \\
&\leq L \max_{s \in J_\delta} e^{-\alpha(s-t_0)} |x(s) - \bar{x}(s)| \max_{t \in J_\delta} e^{-\alpha(t-t_0)} \int_{t_0}^t e^{\alpha(s-t_0)} ds \\
&= L d_2(x, \bar{x}) \max_{t \in J_\delta} e^{-\alpha(t-t_0)} \int_{t_0}^t e^{\alpha(s-t_0)} ds \\
&\leq \frac{L}{\alpha} d_2(x, \bar{x}).
\end{aligned}$$

Für $\alpha = 2L$, ist T eine Kontraktion.

■

Bemerkung 3.10 Mit der Metrik d_2 ist das Existenzintervall $[t_0, t_0 + \delta]$ nicht von der Lipschitz Konstante L abhängig.

3.5 Picard Iteration

Picard Iteration zeigt eine Möglichkeit, die man eine numerische Approximation für die Lösung erhalten kann.

Man definiere

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x_0) ds \\
x_2(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x_1(s)) ds \\
&\vdots \\
x_n(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x_{n-1}(s)) ds
\end{aligned}$$

wobei $f \in C(J_{\delta_0} \times \overline{B_r(x_0)})$ mit $J_{\delta_0} = [t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0]$ vorausgesetzt wird.

Satz 3.11 Die Folge $(x_n(t))_{n=0}^\infty$ konvergiert gegen $x(t) \in C^1(J_\delta)$ für $\delta \leq \min\{\delta_0, \frac{r}{m}\}$ und $m = \max_{|t-t_0| \leq \delta_0, x \in \overline{B_r(x_0)}} |f(t, x)|$.

Beweis: Wir zeigen dass $(x_n(t))_{n=0}^\infty$ eine Cauchy Folge in $C(J_\delta)$ ist. Nach der Lipschitz Stetigkeit erhalten wir

$$\begin{aligned} |x_2(t) - x_1(t)| &\leq \int_{t_0}^t |f(s, x_1(s)) - f(s, x_0)| ds \\ &\leq L \int_{t_0}^t |x_1(s_0) - x_0| ds_0 \\ &\leq L \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{s_0} |f(s_1, x_0)| ds_1 ds_0 \\ &\leq mL \int_{t_0}^t (s_0 - t_0) ds_0 = mL \frac{(t - t_0)^2}{2}. \end{aligned}$$

Dann ähnliche Abschätzungen liefern dass

$$|x_n(t) - x_{n-1}(t)| \leq \frac{mL^{n-1}|t - t_0|^n}{n!}.$$

Für beliebige Ganzzahlen $p, n > 0$, gilt

$$\begin{aligned} &|x_{n+p}(t) - x_n(t)| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |x_k(t) - x_{k-1}(t)| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} m \frac{L^{k-1} \delta^k}{k!} \\ &= \frac{m}{L} \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{(L\delta)^k}{k!} \leq \frac{m}{L} \frac{(L\delta)^{n+1}}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{(L\delta)^k}{k!} \\ &\leq \frac{m}{L} \frac{(L\delta)^{n+1}}{(n+1)!} e^{L\delta}. \end{aligned}$$

Wegen der Vollständigkeit des Raums, gibt es eine Funktion $x(t) \in C(J_\delta)$ sodass

$$x_n(t) \rightarrow x(t), \quad \text{gleichmäßig in } J_\delta.$$

Dann nach den Grenzwertübergang $n \rightarrow \infty$ in dem Iterationsverfahren, erhält man

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds.$$

■

Beispiel 3.12 (Lokta-Volterra-Modell)

$$\begin{cases} u' = u(1 - v) \\ v' = v(u - \varepsilon), \quad \varepsilon > 0. \end{cases}$$

Offenbar ist $f(u, v) = \begin{pmatrix} u(1 - v) \\ v(u - \varepsilon) \end{pmatrix} \in C^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$. Dann ist f lokal Lipschitz stetig und der Satz von Picard-Lindellöf liefert zu jedem Anfangswert $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$ genau eine lokale Lösung.

Beispiel 3.13 (Das mathematische Pendel)

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} v \\ -\omega^2 \sin u \end{pmatrix} \in C^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2).$$

Das Problem hat zu jedem Anfangswert $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$ genau eine lokale Lösung.

Korollar 3.14 Seien $J \in [a, b]$, $t_0 \in (a, b)$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $f \in C(J; \mathbb{R}^n)$, $A \in C(J; \mathbb{R}^{n \times n})$ gegeben. Dann besitzt das Anfangswertproblem linearen Systems

$$\begin{cases} x' = A(t)x(t) + f(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

genau eine lokale Lösung.

3.6 Fortsetzbarkeit und maximale Existenzintervall

Seien $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen, $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und lokal Lipschitz in x . Nach dem Satz von Picard-Lindellöf hat das Problem (3.7) eine eindeutige lokale Lösung $x(t)$.

Definition 3.15 Für $(t_0, x_0) \in G$, sei $t_\pm(t_0, x_0) \in \mathbb{R}$ durch

$$\begin{aligned} t_+ &:= t_+(t_0, x_0) = \sup\{t_1 \geq t_0 : \text{auf } [t_0, t_1] \text{ besitzt (3.7) eine Lösung}\} \\ t_- &:= t_-(t_0, x_0) = \inf\{t_2 \leq t_0 : \text{auf } [t_2, t_0] \text{ besitzt (3.7) eine Lösung}\} \end{aligned}$$

definiert. Die Intervalle $[t_0, t_+)$ und $(t_-, t_0]$ heißen **maximale Existenzintervalle** der Lösung nach rechts und nach links.

Die **maximale Lösung** von (3.7) wird definiert durch

$$x(t) = \begin{cases} x_1(t) & \forall t \in [t_0, t_+) \\ x_2(t) & \forall t \in (t_-, t_0]. \end{cases}$$

Der Existenzsatz stellt $t_+ > t_0$ und $t_1 < t_0$ und die globale Existenz bedeutet $t_+ = +\infty$ (nach rechts), oder $t_- = -\infty$ (nach links). Wenn $t_+ < \infty$ (bzw. $t_- > -\infty$), was sind die Möglichkeiten ?

- $\liminf_{t \rightarrow t_+} \text{dist}((t, x(t)), \partial G) = 0$;
- $\lim_{t \rightarrow t_+} |x(t)| = \infty$.

Beispiel 3.16 Das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} x' = -\sqrt{1 - x^2} \frac{1}{t^2} \\ x(\frac{1}{\pi}) = 0 \end{cases}$$

hat eine Lösung $x(t) = \sin \frac{1}{t}$, $\forall t \in (0, +\infty)$, wobei der Definitionsbereich G für f ist $(0, \infty) \times [-1, 1]$. Hier ist $t_- = 0$ und

$$\lim_{t \rightarrow t_-} (t, \sin \frac{1}{t}) = 0.$$

Satz 3.17 (Fortsetzungssatz) Sei $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und lokal Lipschitz in x . Dann existiert die Lösung von (3.7) auf dem maximalen Intervall (t_-, t_+) mit $t_- < t_0 < t_+$, wobei t_+ (bzw. t_-) ist durch die folgenden Alternativen charakterisiert.

- $t_+ = \infty$, $x(t)$ ist eine globale Lösung nach rechts;
- $t_+ < \infty$ und $\liminf_{t \rightarrow t_+} \text{dist}((t, x(t)), \partial G) = 0$. Das heißt die Lösung $x(t)$ kommt dem Rand von G beliebig nahe.
- $t_+ < \infty$, $\liminf_{t \rightarrow t_+} \text{dist}((t, x(t)), \partial G) > 0$, und $\lim_{t \rightarrow t_+} |x(t)| = \infty$.

Entsprechendes gilt für den linken Endpunkt t_- .

Beweis: Wir beweisen nur den Fall für t_+ . Sei $t_+ < \infty$ und angenommen dass $\text{dist}((t, x(t)), \partial G) > 0$ und die Lösung beschränkt ist. Dann $\exists M > 0$ und existiere eine Folge t_n monoton wachsend gegen t_+ konvergiert, sodass

$$|x(t_n)| \leq M \text{ und } \text{dist}((t_n, x(t_n)), \partial G) \geq \frac{1}{M}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Daraus folgt nach dem Satz von Bolzano-Weierstrass eine konvergente Teilfolge von $(x(t_n))_{n=1}^\infty$,

$$x(t_{n_k}) \rightarrow x_*, \text{ für } k \rightarrow \infty,$$

und deshalb

$$(t_{n_k}, x(t_{n_k})) \rightarrow (t_+, x_*) \in G, \text{ für } k \rightarrow \infty.$$

Sei δ aus dem Satz von Picard-Lindellöf, die nur von $\max |f|$ auf eine Kompakt Menge abhängt, also im diesen Fall von M abhängt. Aus $t_{n_k} \rightarrow t_+$ folgt dass $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ sodass für $k \geq k_0$, gilt

$$t_{n_k} \geq t_+ - \frac{\delta}{2}.$$

Dann zu jedem $k \geq k_0$, hat das Anfangswertproblem (3.7)

$$\begin{cases} x'_k = f(t, x_k) \\ x_k(t_{n_k}) = x(t_{n_k}) \end{cases}$$

eine eindeutig bestimmte Lösung $x_k(t)$ auf $[t_{n_k}, t_{n_k} + \delta]$. Da $x(t)$ die einzige Lösung auf $[t_0, t_+)$ ist, wegen der Eindeutigkeit der Lösung, gilt dann

$$x(t) = x_k(t), \quad \forall t \in [t_{n_k}, t_+).$$

Weil $t_{n_k} + \delta \geq t_+ + \frac{\delta}{2}$ ist, erhalten wir dass die Lösung $x(t_+) = x_*$ und nach der Zeit t_+ auch existiert, welche ein Widerspruch zu die Definition von t_+ ist. ■

3.7 Differential und Integralungleichungen

Lemma 3.18 [Gronwallsche Ungleichung] Seien die Funktionen $\alpha, \beta, \varphi \in C[a, b]$ mit $\beta(t) \geq 0, \forall t \in [a, b]$ gegeben und es sei

$$0 \leq \varphi(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s)\varphi(s)ds, \quad \forall t \in [a, b].$$

Dann gilt

$$\varphi(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s)e^{\int_s^t \beta(\tau)d\tau} \alpha(s)ds, \quad \forall t \in [a, b].$$

Speziell gilt für $\alpha(t) \equiv M$,

$$\varphi(t) \leq Me^{\int_a^t \beta(\tau)d\tau}, \quad \forall t \in [a, b].$$

Beweis: Wir setzen

$$\psi(t) = \int_a^t \beta(\tau)\varphi(\tau)d\tau, \quad \forall t \in [a, b].$$

Wegen der Stetigkeit von β und φ , ist ψ stetig differenzierbar auf $[a, b]$, und

$$\psi'(t) = \beta(t)\varphi(t).$$

Aus $\beta(t) \geq 0$ folgt

$$\psi'(t) = \beta(t)\varphi(t) \leq \beta(t)(\alpha(t) + \psi(t)) \quad \forall t \in [a, b].$$

Nun multiplizieren wir diese Ungleichung mit $e^{-\int_a^t \beta(\tau)d\tau}$ und erhalten

$$\frac{d}{dt} \left(e^{-\int_a^t \beta(\tau)d\tau} \psi(t) \right) \leq \beta(t)\alpha(t)e^{-\int_a^t \beta(\tau)d\tau}.$$

Integriere dieser Ungleichung von a bis t ergibt

$$e^{-\int_a^t \beta(\tau) d\tau} \psi(t) - e^{-\int_a^a \beta(\tau) d\tau} \psi(a) \leq \int_a^t \beta(s) \alpha(s) e^{-\int_a^s \beta(\tau) d\tau} ds.$$

Daraus folgt

$$\psi(t) \leq \int_a^t \beta(s) \alpha(s) e^{\int_s^t \beta(\tau) d\tau} ds$$

und

$$\varphi(t) \leq \alpha(t) + \psi(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s) \alpha(s) e^{\int_s^t \beta(\tau) d\tau} ds.$$

Für $\alpha(t) \equiv M$, nach dem Hauptsatz der Integral und Differential Rechnung erhält man

$$\begin{aligned} \varphi(t) &\leq M \left(1 + \int_a^t \beta(s) e^{\int_s^t \beta(\tau) d\tau} ds \right) \\ &= M \left(1 - e^{\int_s^t \beta(\tau) d\tau} \Big|_a^t \right) = M e^{\int_a^t \beta(\tau) d\tau} \end{aligned}$$

■

Lemma 3.19 [Comparison Principle] Sei $J = [t_0, t_1]$, $u : J \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $\rho \in C^1(J; \mathbb{R})$ erfülle die stricte Differentialungleichung

$$\begin{cases} \rho'(t) < u(t, \rho(t)) \\ \rho(t_0) < \varphi_0. \end{cases}$$

Weiter sei $\varphi \in C^1(J; \mathbb{R})$ eine Lösung von

$$\begin{cases} \varphi'(t) = u(t, \varphi(t)) \\ \varphi(t_0) = \varphi_0. \end{cases}$$

Dann gilt $\rho(t) < \varphi(t)$, $\forall t \in J$.

Beweis: Angenommen es existiert ein $t_* \in [t_0, t_*)$ mit

$$\begin{aligned} \rho(t) &< \varphi(t), \quad \forall t \in [t_0, t_*) \\ \rho(t_*) &= \varphi(t_*), \end{aligned}$$

also t_* ist die erste Zeit an der ρ und φ sich treffen. Dann für hinreichend kleine $h > 0$, gilt

$$\frac{\rho(t_*) - \rho(t_* - h)}{h} > \frac{\varphi(t_*) - \varphi(t_* - h)}{h}.$$

Dann nach der Differenzierbarkeit der beiden Funktionen, mit $h \rightarrow 0+$ gilt

$$\rho'(t_*) \geq \varphi'(t_*) = u(t_*, \varphi(t_*)) = u(t_*, \rho(t_*)).$$

Das ist ein Widerspruch gegen der Annahme $\rho'(t_*) < u(t_*, \rho(t_*))$.

■

Beispiel 3.20

$$\begin{cases} x'(t) = t^2 + x^2 \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

Mithilfe vom Lemma 3.19 kann man die Lösung abschätzen.

Für $t < 1$, gilt $t^2 + x^2 < 1 + x^2$. Daher können wir das originale Problem mit dem folgenden Problem vergleichen

$$\begin{cases} y' = 1 + y^2 \\ y(0) = \tan \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \ll 1. \end{cases}$$

Daraus folgt $x(t) < y(t) = \tan(t + \varepsilon)$, $\forall 0 \leq t < 1$. Ferner ist $t^2 + x^2 > t^2$, $\forall t \in (0, 1]$. Mit dem Vergleichsproblem

$$\begin{cases} y' = t^2 \\ y(0) = \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \ll 1. \end{cases}$$

erhält man $x(t) > \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{3}\varepsilon^3$, $\forall t \in [0, 1]$. Insbesondere erhält man $x(1) > \frac{1}{3}(1 - \varepsilon^3)$, die als neuen Anfangswert verwendet wird.

Für $t > 1$, ist $t^2 + x^2 > 1 + x^2$. Dann mit dem Vergleichsproblem

$$\begin{cases} y' = 1 + y^2 \\ y(1) = \frac{1}{3}(1 - \varepsilon^3), \quad 0 < \varepsilon \ll 1. \end{cases}$$

erhält man $x(t) > \tan\left(t + \arctan\left(\frac{1}{3}(1 - \varepsilon^3)\right) - 1\right)$, $\forall 1 \leq t \leq \frac{\pi}{2} + 1 - \arctan \frac{1}{3}$.

3.8 Globale Existenz

Der Satz von Picard Lindell liefert eine eindeutige lokale Lösung und der Fortsetzungssatz ergibt ein maximales Existenzintervall. Nun geben wir Kriterien um global existierende Lösung zu haben.

Korollar 3.21 (Korollar von Fortsetzungssatz) Sei $G = J \times \mathbb{R}^n$, $J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $(t_0, x_0) \in G$ und $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und Lipschitz stetig in x . Seien ferner $a, b \in C(J; \mathbb{R}_+)$ gegeben, sodass

$$|f(t, x)| \leq a(t) + b(t)|x|, \quad \forall t \in J, x \in \mathbb{R}^n \quad (3.10)$$

gilt, man sagt f sei bzgl. x linear beschränkt. Dann existiert die Lösung von (3.7) global.

Beweis: Sei $x(t)$ die Lösung. Angenommen dass $t_+ \in J$ und

$$\lim_{t \rightarrow t_+} |x(t)| = \infty. \quad (3.11)$$

Dann nach der Integralgleichung $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds$, $\forall t \in [t_0, t_+]$ und die lineare Abschätzung in der Voraussetzung $|f(t, x)| \leq a(t) + b(t)|x|$, erhalten wir

$$\begin{aligned} |x(t)| &\leq |x_0| + \int_{t_0}^t (a(s) + b(s)|x(s)|) ds \\ &= |x_0| + \int_{t_0}^t a(s) ds + \int_{t_0}^t b(s)|x(s)| ds, \quad \forall t \in [t_0, t_+) \end{aligned}$$

Nach der Gronwallschen Ungleichung 3.18 mit $\alpha(t) = |x_0| + \int_{t_0}^t a(s) ds$ und $\beta(t) = b(t)$ gilt

$$|x(t)| \leq \alpha(t) + \int_{t_0}^t \beta(s) e^{\int_s^t \beta(\tau) d\tau} \alpha(s) ds.$$

Da a und b stetig sind, bleibt die rechte Seite für t gegen t_+ beschränkt. Das ist ein Widerspruch gegen (3.11) ■

Korollar 3.22 Sei $J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $(t_0, x_0) \in J \times \mathbb{R}^n$ und $A \in C(J; \mathbb{R}^{n \times n})$, $b \in C(J; \mathbb{R}^n)$ gegeben. Dann besitzt das Lineare Anfangswertproblem

$$\begin{cases} x' = A(t)x + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (3.12)$$

genau eine globale Lösung.

Beispiel 3.23 (Das gedämpfte Pendel)

$$x'' + \alpha x' + \omega^2 \sin x = b(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

wobei $\alpha \geq 0$, $b \in C(\mathbb{R})$ gegeben sind.

Man schreibt diese Gleichung nach 1. Ordnungssystem in

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} v \\ -\alpha v - \omega^2 \sin u + b(t) \end{pmatrix} =: f(t, u, v)$$

Offenbar ist f stetig und stetig differenzierbar in (u, v) , dann zu jedem $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$ gibt es genau eine lokale Lösung und die folgende Abschätzung gilt

$$|f(t, u, v)|^2 = v^2 + (-\alpha v - \omega^2 \sin u + b(t))^2 \leq C(u^2 + v^2 + b^2(t)).$$

Daher ist

$$|f(t, u, v)| \leq C(|u| + |v| + |b(t)|), \quad \forall t \in \mathbb{R}, (u, v) \in \mathbb{R}^2,$$

also ist die Lösung nach $(-\infty, \infty)$ fortsetzbar.

Beispiel 3.24 (Ein nichtlinearer Schwinger)

$$x'' + x - \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} = b(t) \in C(\mathbb{R})$$

Man schreibt diese Gleichung nach 1. Ordnungssystem in

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} v \\ b(t) - u + \frac{2u}{\sqrt{1+u^2}} \end{pmatrix} =: f(t, u, v)$$

f ist stetig und stetig differenzierbar in (u, v) . Ferner gilt

$$|f(t, u, v)| = \sqrt{v^2 + \left(b(t) - u + \frac{2u}{\sqrt{1+u^2}}\right)^2} \leq C(|u| + |v| + |b(t)|).$$

Nach dem Korollar existiert die Lösung zu jedem Anfangswert $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$ global.

Korollar 3.25 Sei $G = J \times \mathbb{R}^n$, $J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und lokal Lipschitz stetig in x . Ferner existiere eine Konstante $\omega \geq 0$ sodass

$$f(t, x) \cdot x \leq \omega |x|^2, \quad (t, x) \in G$$

gilt. Dann existieren all Lösungen global nach rechts.

Beweis: Sei $x(t)$ eine Lösung, dann gilt nach der Voraussetzung

$$\left(\frac{1}{2}|x|^2\right)' = x \cdot x' = x \cdot f(t, x) \leq \omega |x|^2.$$

$|x(t)|^2$ erfüllt die Bedingung der Gronwallschen Ungleichung $(|x|^2)' \leq 2\omega |x|^2$ mit dem Anfangswert $|x(t_0)|^2 = x_0^2$. Dann gilt

$$|x(t)|^2 \leq |x_0|^2 e^{2\omega(t-t_0)}$$

und $|x(t)| \leq |x_0| e^{\omega(t-t_0)}$. Diese Abschätzung zeigt dass die Lösung auf jedem kompakten Intervall beschränkt ist. Nach dem Fortsetzungssatz ist die Lösung nach rechts global. ■

Beispiel 3.26 (Lokta-Volterra System mit Sättigung)

$$\begin{cases} u' = u - ku^2 - uv \\ v' = -\varepsilon v + uv \\ (u, v)|_{t=0} = (t_0, v_0). \end{cases}$$

Sei $u_0 > 0, v_0 > 0$ und $u(t), v(t)$ die Lösung auf ihrem maximalen Existenzintervall $[0, t_+)$, dann gilt $\forall t \in [0, t_+)$

$$\begin{aligned} u(t) &= u_0 e^{\int_0^t (1 - ku(s) - v(s)) ds} \\ v(t) &= v_0 e^{\int_0^t (u(s) - \varepsilon) ds} \end{aligned}$$

Es ist offensichtlich dass u und v positiv sind. Angenommen $t_+ < \infty$, dann gilt

$$\begin{aligned} u(t) &\leq u_0 e^t \leq u_0 e^{t_+} < \infty \\ v(t) &\leq v_0 e^{Ct} \leq v_0 e^{Ct_+} < \infty. \end{aligned}$$

Das ist ein Widerspruch zur Fortsetzungsbedingung. Daher sind sie global positive Lösungen.

4 Lineare Systeme

$$\begin{cases} \mathbf{x}' &= A(t)\mathbf{x} + b(t), \\ \mathbf{x}(t_0) &= x_0, \quad t \in J := [t_0, t_1], \end{cases}$$

wobei $A \in C(J; \mathbb{R}^{n \times n}), b \in C(J; \mathbb{R}^n)$ sind gegebene Funktionen. Das System heißt **homogen** falls $b \equiv 0$ ist, anderenfalls nennt man es **inhomogen**.

4.1 Homogene Systeme und Lösungsräume

$$\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x}.$$

Die Menge aller Lösungen ist ein Vektorraum, genauer ein Teilraum $\mathcal{L} \subset C^1(J; \mathbb{R}^n)$. (der ist n -Dimension nach dem Superpositionsprinzip) Der ist $\mathcal{L}$ ein Vektorraum.

Erklärung: Sei $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\cdot, x_0)$ eine Lösung von

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x}, \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \end{cases}$$

dann definiert die Abbildung $T\mathbf{x}_0 := \mathbf{x}(\cdot, x_0)$ einen linearen Isomorphismus von $\mathbb{R}^n$ auf $\mathcal{L}$, also

$$T : x_0 \in \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbf{x}(\cdot, x_0) \in \mathcal{L}.$$

Die Abbildung T ist **injektiv** $T(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{L}$, und die ist auch **surjektiv**, weil jede Lösung einen Anfangswert besitzt.

T ist **linear**, es gilt $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} T(\alpha\mathbf{x}_0 + \beta\mathbf{x}_1) &= \mathbf{x}(\cdot, \alpha x_0 + \beta x_1) \\ &\stackrel{\text{Superposition}}{=} \alpha\mathbf{x}(\cdot, x_0) + \beta\mathbf{x}(\cdot, x_1) \\ &= \alpha T\mathbf{x}_0 + \beta T\mathbf{x}_1, \end{aligned}$$

dann gilt auch $\dim \mathcal{L} = \dim \mathbb{R}^n = n$.

Definition 4.1 Eine Basis von $\mathcal{L}$ heißt **Fundamentalsystem** (FS). Mit n Lösungen $y^i \in C^1(J; \mathbb{R}^n)$ kann man eine Lösungsmatrix $Y(t) = (y^1, y^2, \dots, y^n)$ zusammenfassen, wobei y^i die Spalten von $Y(t)$ darstellen. Ist $\{y^1, \dots, y^n\}$ ein FS, so nennt $Y(t)$ eine **Fundamentalmatrix** (FM). Gilt außerdem $Y(t_0) = I$, so heißt $Y(t)$ **Hauptfundamentalmatrix** (HFM) in t_0 und deren Spalten nennt man **Hauptfundamentalsystem** (HFS).

Folgerungen:

1. Für jede Lösungsmatrix $Y(t)$, gilt es $Y'(t) = A(t)Y(t)$.
2. Ist $Y(t)$ eine FM, so kann jede Lösung durch $y(t) = Y(t)c$, $\forall t \in J$, mit einem eindeutig bestimmten Vektor $c \in \mathbb{R}^n$ dargestellt werden.
3. Für jede Lösungsmatrix $Z(t)$ und jede konstante Matrix $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist auch $Y(t) = Z(t)C$ eine Lösungsmatrix weil

$$Y'(t) = Z'(t)C = A(t)Z(t)C = A(t)Y(t).$$

Definition 4.2 Sei $Y(t)$, $t \in J$, eine Lösungsmatrix, dann heißt $\phi(t) := \det Y(t)$ die **Wronski Determinante** von $Y(t)$.

Lemma 4.3 Sei $Y(t)$ eine Lösungsmatrix für $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ und $\phi(t) := \det Y(t)$. Dann gilt $\phi'(t) = (\mathbf{Sp}A(t)) \cdot \phi(t)$, $\forall t \in J$. Also

$$\phi(t) = \phi(\tau) \exp \left(\int_{\tau}^t \mathbf{Sp}(A(s)) ds \right), \quad \forall t, \tau \in J,$$

wobei $\mathbf{Sp}A := \sum_{i=1}^n a_{ii}$, die Spur von der Matrix A bezeichnet. Insbesondere ist $\phi(t) \neq 0$, $\forall t \in J$, wenn $Y(t)$ eine FM ist.

Beweis: Zu jedem fixierten $\tau \in J$, sei $Z(t)$ die HFM mit $Z(\tau) = I$. Dann ist $\tilde{Y}(t) := Z(t)Y(\tau)$ eine Lösungsmatrix mit dem Anfangswert $\tilde{Y}(\tau) = Y(\tau)$. Die Eindeutigkeit der Lösung liefert $\tilde{Y}(t) = Y(t) = Z(t)Y(\tau)$.

Daraus folgt

$$\phi'(t) = \frac{d}{dt} (\det Y(t)) = \frac{d}{dt} (\det Z(t) \cdot \det Y(\tau)) = \frac{d}{dt} (\det Z(t)) \cdot \phi(\tau).$$

Nach der Kettenregel erhalten wir,

$$\frac{d}{dt} (\det Z(t)) = \sum_{j=1}^n \det \left(z^1(t), \dots, \frac{d}{dt} z^j(t), \dots, z^n(t) \right),$$

wobei $z^j(t)$ die Lösung von

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} z^j(t) &= A(t)z^j(t), \\ z^j(\tau) &= e^j := (0, \dots, \overset{j}{1}, \dots, 0), \end{cases}$$

ist. Daher ist

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\det Z(t)) \big|_{t=\tau} &= \sum_{j=1}^n \det(e^1, \dots, A(\tau)e^j, \dots, e^n) \\ &= \sum_{j=1}^n a_{jj}(\tau) = \mathbf{Sp}A(\tau). \end{aligned}$$

Dann gilt es $\forall \tau \in J$,

$$\begin{aligned}\frac{d\phi}{d\tau} &= \mathbf{Sp}A(\tau) \cdot \phi(\tau) \\ \Rightarrow \phi(t) &= \phi(\tau) \cdot e^{\int_{\tau}^t \mathbf{Sp}A(s)ds}, \quad \forall t, \tau \in J.\end{aligned}$$

Bemerkung 4.4 Für FM $Y(t)$, ist der $Y(0) \neq 0$, daher nach dem Lemma 4.3, ist $\det Y(t) \neq 0$, $\forall t \in J$. d.h. dass $Y(t)$ invertierbar ist. Daher ist,

$$\begin{aligned}0 &= \frac{d}{dt} I_{n \times n} = \frac{d}{dt} (Y(t)Y^{-1}(t)) \\ &= Y'(t)Y^{-1}(t) + Y(t)(Y^{-1}(t))' \\ &= A(t)Y(t)Y^{-1}(t) + Y(t)(Y^{-1}(t))' = A(t) + Y(t)(Y^{-1}(t))', \\ \Rightarrow (Y^{-1}(t))' &= -Y^{-1}(t)A(t), \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} (Y^{-1}(t))^T &= -A^T(t)(Y^{-1}(t))^T,\end{aligned}$$

also ist $(Y^{-1}(t))^T$ eine Lösungsmatrix von $\mathbf{x}' = -A^T \mathbf{x}$.

Wir bezeichnen $X(t)$ als die HFM, dann erfüllt $X(t)$ das folgende AWP,

$$\begin{cases} X'(t) &= A(t)X(t), \\ X(t_0) &= I. \end{cases}$$

Sei $Y(t)$ eine FM mit $Y(t_0)$ gegeben,

$$\begin{cases} Y'(t) &= A(t)Y(t), \\ Y(t_0) &= Y(t_0). \end{cases}$$

Dann ist $X(t) = Y(t)Y^{-1}(t_0)$, denn $Y(t)Y^{-1}(t_0)$ erfüllt

$$\begin{cases} (Y(t)Y^{-1}(t_0))' &= A(t)Y(t)Y^{-1}(t_0), \\ Y(t)Y^{-1}(t_0)|_{t=t_0} &= I. \end{cases}$$

Proposition 4.5 Die Lösung von

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) &= A(t)\mathbf{x}, \\ \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0, \end{cases}$$

kann durch FM gegeben, also

$$\mathbf{x}(t) = X(t)\mathbf{x}_0 = Y(t)Y^{-1}(t_0)\mathbf{x}_0,$$

wobei $X(t)$ ist die HFM und $Y(t)$ eine FM.

Erklärung:

$$\begin{cases} (X(t)\mathbf{x}_0)' &= X'(t)\mathbf{x}_0 = A(t)X(t)\mathbf{x}_0, \\ X(t)\mathbf{x}_0|_{t=t_0} &= I \cdot \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0. \end{cases}$$

4.2 Inhomogene Systeme und Variation der Konstanten

$$\mathbf{x}(t) = A(t)\mathbf{x} + b(t), \quad t \in J.$$

Sei $Y \in C^1(J; \mathbb{R}^{n \times n})$ eine FM. $\mathbf{z} \in C^1(J; \mathbb{R}^n)$ eine spezielle Lösung. Dann nach dem Superpositionsprinzip, sind alle Lösungen durch

$$\mathbf{x}(t) = Y(t)c + \mathbf{z}(t), \quad \forall c \in \mathbb{R}^n,$$

gegeben.

Methode der Variation der Konstanten: (eine $\mathbf{z}(t)$ zu finden)

Man setze $Z(t) = Y(t) \cdot c(t)$ wobei $c \in C^1(J; \mathbb{R}^n)$. Die Produktregel liefert dass

$$\begin{aligned} \mathbf{z}'(t) &= Y'(t) \cdot c(t) + Y(t) \cdot c'(t) \\ &= A(t)Y(t)c(t) + Y(t)c'(t). \end{aligned}$$

Dann setzen wir in die Gleichung ein, erhalten wir,

$$\begin{aligned} A(t)Y(t)c(t) + Y(t)c'(t) &= A(t)Y(t)c(t) + b(t), \\ \Rightarrow c'(t) &= Y^{-1}b(t), \end{aligned}$$

wobei $Y(t)$ für jede t invertierbar ist.

$$\Rightarrow c(t) = c(t_0) + \int_{t_0}^t Y^{-1}(s)b(s) ds, \quad \forall t \in J.$$

Da wir nur eine spezielle Lösung suchen, mit $c(t_0) = 0 \in \mathbb{R}^n$, erhalten wir

$$\mathbf{z}(t) = Y(t) \cdot \int_{t_0}^t Y^{-1}(s)b(s) ds, \quad \forall t \in J.$$

Mit einem gegebenen Anfangswert $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ ist die Lösung

$$\mathbf{x}(t) = Y(t)Y^{-1}(t_0)\mathbf{x}_0 + Y(t) \int_{t_0}^t Y^{-1}(s)b(s) ds,$$

alternative gilt es

$$\mathbf{x}(t) = X(t)\mathbf{x}_0 + X(t) \int_{t_0}^t X^{-1}(s)b(s) ds.$$

Bemerkung 4.6 Im Vergleich zur den Lösungsdarstellung von skalarer Differenzialgleichung $x' + g(t)x = f(t)$:

$$x = e^{-G(t)}x_0 + \int_{t_0}^t e^{G(s)-G(t)}f(s)ds,$$

wobei $G(t)$ eine Stammfunktion von g ist, ist $e^{-G(t)}$ genau die FM, die Lösung der homogenen Gleichung ist.

4.3 Bestimmung von Fundamentalsystem für Systeme mit konstanten Koeffizienten

Es ist im allgemeinen nicht möglich, die Lösung eines homogenen Systems in geschlossener Form anzugeben. Wir stellen nur die Theorie der **Systeme mit Konstanten Koeffizienten**.

$$\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x},$$

A ist nicht von t abhängig.

Definition 4.7 (Matrix-Exponentialfunktion) $z \rightarrow e^{Az}$, die durch

$$e^{Az} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k z^k}{k!}, \quad z \in \mathbb{C},$$

definiert heißt **Matrix-Exponentialfunktion** zur Matrix A , wobei die Konventionen $A^0 = I$, $z^0 = 1$, $0! = 1$ verwendet werden.

Bemerkung: Mann muss zeigen ob die Abbildung $z \rightarrow e^{Az}$ auf $\mathbb{C}$ wohldefiniert ist.

Definition 4.8 Für Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, definieren wir die Menge

$$\sigma(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \text{ ist ein Eigenwert von } A\},$$

die **Spektrum** von A heißt. Mann nennt

$$\rho(A) := \mathbb{C} \setminus \sigma(A),$$

die **Resolventenmenge**. Die Zahl

$$r(A) := \max \{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\},$$

heißt **Spektralradius**.

Bemerkung:

1. $\lambda \in \sigma(A)$ ist äquivalent zu $\lambda I - A$ ist nicht invertierbar.

2. $r(A) = \limsup_{k \rightarrow \infty} |A^k|^{\frac{1}{k}}$,

wobei $|\cdot|$ ist eine der Matrixnormen, z.B., für $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$,

$$\begin{aligned} \|A\|_1 &:= \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|, \\ \|A\|_\infty &:= \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|, \\ &\dots \end{aligned}$$

Die Auswahl der Normen sind nicht erheblich.

Dieser Grenzwert zeigt dass, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists k_0$ sodass $\forall k \geq k_0$, ist

$$|A^k| \leq (r(A) + \varepsilon)^k.$$

Daraus folgt dass

$$\left| \frac{A^k z^k}{k!} \right| \leq \frac{(r(A) + \varepsilon)^k \cdot |z|^k}{k!}.$$

Dann nach dem Majorantekriterium vom Weierstrass, für jede kompakten Teilmenge $K \subset \mathbb{C}$, konvergiert die Reihe,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k z^k}{k!} \text{ absolut und gleichmäßig in } z \in K,$$

und die Konvergenz von

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dz} \left(\frac{A^k z^k}{k!} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} A \cdot \frac{A^k z^k}{k!}$$

auch absolut und gleichmäßig in K .

Daraus folgt das e^{Az} ist wohldefiniert und auch differenzierbar also

$$\frac{d}{dz} e^{Az} = A \cdot e^{Az}.$$

Das auch zeigt $x(t) = e^{At}$ eine Lösung von $x' = Ax$ ist. Speziell ist $x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0$ die eindeutige Lösung von

$$\begin{cases} x' &= Ax, \\ x(t_0) &= x_0, \end{cases}$$

und $e^{A(t-t_0)} = X(t)$ ist die HFM in t_0 , denn es ist $X(t_0) = I$, wobei

$$\lim_{t \rightarrow 0} e^{At} = \lim_{t \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} = I,$$

ist.

Mit der Exponentialfunktion wird die Lösungsdarstellung von

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) &= A\mathbf{x} + b(t), \\ \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0, \end{cases}$$

durch $\mathbf{x}(t) = e^{A(t-t_0)}\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)}b(s) ds$, $\forall t \in \mathbb{R}$ gegeben.

Bemerkung 4.9 General ist der Wert der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k z^k}{k!}$ schwierig zu rechnen.

Sei c_λ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ , also

$$Ac_\lambda = \lambda c_\lambda,$$

dann ist

$$e^{At}c_\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} \cdot c_\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k \lambda^k c_\lambda}{k!} = e^{\lambda t} c_\lambda.$$

Daraus folgt das $\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t} c_\lambda$ eine Lösung von $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ ist.

Nun wichtig ist die Eigenräume $E(\lambda) = \mathcal{N}(\lambda - A)$ von A zu diskutieren.

1. Fall:

Die Matrix A besitzt linear unabhängige Eigenvektoren $\{c_1, \dots, c_n\}$ d.h. A ist diagonalisierbar mit der Matrix $C = (c_1, \dots, c_n)$

$$AC = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} C$$

Lemma 4.10 Sei $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die nicht notwendigerweise verschiedenen Eigenwerte von A und existiere zugehörige Eigenvektoren $\{c_1, \dots, c_n\}$, die linear unabhängig sind, dann ist

$$Y(t) = (e^{\lambda_1 t} c_1, \dots, e^{\lambda_n t} c_n),$$

eine FM für $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$. Insbesondere ist dies der Fall, falls alle Eigenwerte $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$ paarweise verschieden sind.

Bemerkung 4.11 Sei A reellwertig, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ einer komplexen Eigenwert von A mit komplexen Eigenvektor $c_\lambda \in \mathbb{C}^n$. Dann ist $\bar{\lambda}$, die konjugierte komplexe Zahl von λ , einer Eigenwert von A und der zugehörige Eigenvektor ist $\bar{c}_\lambda$, denn

$$A\bar{c}_\lambda = \overline{Ac_\lambda} = \overline{\lambda c_\lambda} = \bar{\lambda}\bar{c}_\lambda.$$

Nun sei $\mathbf{x} = u + iv$ eine komplexe Lösung von $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, dann sind $\operatorname{Re} \mathbf{x} = u$ und $\operatorname{Im} \mathbf{x} = v$ Lösungen von $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$.

Mit $\lambda = \mu + i\nu$ und $c_\lambda = c_1 + ic_2$ erhält man,

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{(\mu+i\nu)t}(C_1 + iC_2) \\ &= e^{\mu t}(c_1 \cos(\nu t) - c_2 \sin(\nu t)) + ie^{\mu t}(c_2 \cos(\nu t) + c_1 \sin(\nu t)). \end{aligned}$$

Dann sind

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \operatorname{Re} x(t) = e^{\mu t}(c_1 \cos(\nu t) - c_2 \sin(\nu t)), \\ x_2(t) &= \operatorname{Im} x(t) = e^{\mu t}(c_2 \cos(\nu t) + c_1 \sin(\nu t)), \end{aligned}$$

die lineare unabhängige reelle Lösungen. Die konjugiert komplexe Eigenwert $\bar{\lambda} = \mu - i\nu$ liefert gleiche Lösungen.

Beispiel 4.12

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix} x.$$

Die Eigenwerte sind die Lösungen von $P_3(\lambda) = (1 - \lambda)(\lambda^2 + \lambda + 2) = 0$, also

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2}, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2}, \quad \lambda_3 = 1.$$

Die zugehörigen Eigenvektoren sind,

$$c_1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2} \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad c_2 = \bar{c}_1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2} \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad c_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

aus der Lösung

$$y(t) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2} \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot e^{(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2})t},$$

erhält man die reelle Lösungen

$$\begin{aligned} x_1 &= e^{-\frac{t}{2}} \left(\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \cos \frac{\sqrt{7}t}{2} - \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{7}}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sin \frac{\sqrt{7}t}{2} \right), \\ x_2 &= e^{-\frac{t}{2}} \left(\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \cos \frac{\sqrt{7}t}{2} + \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{7}}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sin \frac{\sqrt{7}t}{2} \right), \\ x_3 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} e^t, \end{aligned}$$

die bilden ein FS.

Zusammenfassung: (A diagonalisierbar)

$$x' = Ax.$$

Nach linearer Transformation $x = Cy$ wobei $C^{-1}AC = B$ eine Diagonalmatrix, erhält man,

$$Cy' = ACy \Rightarrow y' = C^{-1}ACy = By = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} y.$$

Dann ist die HFM für $y' = By$ wie folgendes gegeben,

$$\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & \dots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix},$$

und das FM für $x' = Ax$ lautet

$$Y(t) = C \cdot \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & \dots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} = (c_1 e^{\lambda_1 t}, \dots, c_n e^{\lambda_n t}),$$

mit $Y(0) = C$.

Ferner ist die HFM für $x' = Ax$ durch

$$X(t) = Y(t)Y^{-1}(0) = C \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & \dots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} C^{-1}.$$

gegeben.

2. Fall (Jordansche Normalform einer Matrix):

Satz 4.13 (Aus Matrizen Theorie.) Zu jeder (reellen oder komplexen) Matrix A eine (im allgemeinen komplexe) nicht-singuläre Matrix C existiert, sodass $B = C^{-1}AC$ die sogenannte Jordansche Normalform,

$$B = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_k \end{pmatrix}$$

besitzt, wobei der Jordan-Kasten J_i eine quadratische Matrix der Form

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & & \lambda_i & 1 \\ 0 & \cdots & & \cdots & \lambda_i \end{pmatrix}_{r_i \times r_i},$$

und $r_1 + r_2 + \cdots + r_n = n$, $P_n(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{r_1} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{r_k}$.

Ein System mit Jordan -Kasten hat Hauptfundamentalmatrix,

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{1}{2}t^2e^{\lambda t} & \cdots & \frac{1}{(r-1)!}t^{r-1}e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \cdots & \frac{1}{(r-2)!}t^{r-2}e^{\lambda t} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & & & e^{\lambda t} \end{pmatrix}.$$

z.B. für Matrix

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \\ & & \mu & \\ & & & \nu & 1 \\ & & & 0 & \nu \end{pmatrix}$$

hat $x' = Bx$ die HFM

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{1}{2}t^2e^{\lambda t} & & & \\ 0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & & & \\ 0 & 0 & e^{\lambda t} & & & \\ & & & e^{\mu t} & & \\ & & & & e^{\nu t} & te^{\nu t} \\ & & & & 0 & e^{\nu t} \end{pmatrix}.$$

Algebraische und geometrische Vielfachheit:

Ist λ eine k -fache Nullstelle von $P_n(\lambda) = \det|\lambda I - A|$, wird $m(\lambda) := k$ die **algebraische Vielfachheit** von λ genannt.

Die Dimension $m_g(\lambda)$ des zugehörigen Eigenraums heißt die **geometrische Vielfachheit** von λ ,

$$1 \leq m_g(\lambda) \leq m(\lambda) \leq n.$$

Ist $m(\lambda) = m_g(\lambda)$, so heißt der Eigenwert halb-einfach. In diesem Fall, wird A **diagonalisierbar** genannt.

Die Berechnung der Lösungen ist geleistet, wenn man die Jordan Form $b = C^{-1}AC$ und C gefunden hat.

Mann kann auch schrittweise vorgehen.

1. Eigenwerte $\det(A - \lambda I) = 0$.
2. zu jedem Eigenwert λ die Eigenvektoren c_λ bestimmt, die zu den Lösung $y = c_\lambda e^{\lambda t}$ führen.
3. Dann werden nacheinander die Ansätze $(a, b \in \mathbb{C}^n)$,

$$y = (a + ct)e^{\lambda t}, y = (a + bt + ct^2)e^{\lambda t}, \dots$$

durchgerechnet, bis die Anzahl $m(\lambda)$ von Lösungen erreicht ist. Beim Koeffizientenvergleich stellt sich heraus, dass der Koeffizient c der höchsten t -Potenz immer ein Eigenvektor ist.

Beispiel 4.14

$$\begin{cases} x' &= x - y, \\ y' &= 4x - 3y, \end{cases}$$

wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

Aus $\det(A - \lambda I) = \lambda^2 + 2\lambda + 1$, folgt $\lambda = -1$, mit algebraischen Vielfachheit $m(\lambda) = 2$ und

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Die hat nur eine linear unabhängige Eigenvektor,

$$c_\lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{ also } m_g(\lambda) = 1.$$

Die zugehörige Lösung lautet

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot e^{-t}.$$

Eine zweite, unabhängige von der ergibt sich dann aus den Ansatz

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + bt \\ c + dt \end{pmatrix} \cdot e^{-t}.$$

Es ist,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} b - a - bt \\ d - c - dt \end{pmatrix} e^{-t} = A \begin{pmatrix} a + bt \\ c + dt \end{pmatrix} e^{-t}.$$

Beim Vergleich der Koeffizienten

$$A \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b - a \\ d - c \end{pmatrix},$$

also

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b - a \\ d - c \end{pmatrix}.$$

Dann folgt $b = 1$, $d = 2$, $a = 0$, $c = -1$.

Daraus ergibt es sich dass

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -1 + 2t \end{pmatrix} e^{-t},$$

die linear unabhängig von der ersten Lösung ist.

4.4 Lineare Gleichungen höher Ordnung

Wir betrachten die Gleichung

$$x^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-1} a_j(t) x^{(j)} = b(t),$$

wobei $a_j, b \in C(J)$, $J = [t_0, t_1]$, mit den Anfangswerten

$$x(t_0) = x_0, x'(t_0) = x_1, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}.$$

Mittels der Transformation

$$u_k = x^{(k-1)}, u_{k,0} = u_k(t_0) = x^{(k-1)}(t_0) = x_{k-1},$$

erhalten wir das äquivalente System erster Ordnung

$$u' = A(t)u + f(t),$$

wobei,

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}, \text{ und } f(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}.$$

Dieses Anfangswertproblem besitzt genau eine globale Lösung auf J . Deshalb ist das originale Problem für höhere Ordnung eindeutig lösbar. Der Lösungsraum von höherer Ordnung Gleichung $x^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-1} a_j(t)x^{(j)} = 0$ hat auch n Dimension.

Also sind $\{x_1(t), \dots, x_n(t)\}$ Lösungen der homogenen Gleichung, ist die Wronski-Determinante durch die folgende Formel gegeben.

$$\phi(t) = \det Y(t) = \det(u^1(t), \dots, u^n(t)) = \det \begin{pmatrix} x_1(t) & \cdots & x_n(t) \\ x'_1(t) & \cdots & x'_n(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(n-1)}(t) & \cdots & x_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix},$$

wobei $u^j \in C^1(J)$, und $x_j \in C^n(J)$. Weiterhin ist,

$$\phi(t) = \det Y(t) = \phi(t_0) e^{\int_{t_0}^t \text{Sp} A(s) ds} = \phi(t_0) \cdot e^{-\int_{t_0}^t a_{n-1}(s) ds}.$$

Variation der Konstanten Höherer Ordnungsgleichung

$$x^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-1} a_j(t)x^{(j)} = b(t),$$

$a_j, b \in C(J)$, $J = [t_0, t_1]$. Nach dem Superpositionsprinzip ist die allgemeine Lösung die Summe der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung und einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung.

Sei $\{x_1(t), \dots, x_n(t)\}$ ein Fundamentalsystem für die homogene Gleichung, dann ist

$$Y(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) & \cdots & x_n(t) \\ x'_1(t) & \cdots & x'_n(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(n-1)}(t) & \cdots & x_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix},$$

ein FS für das äquivalente System erster Ordnung. Daher ist,

$$u_*(t) = Y(t) \int_{t_0}^t Y^{-1}(s) f(s) ds,$$

eine spezielle Lösung von $u' = A(t)u + f(t)$, wobei $\forall 1 \leq i \leq n$, ist

$$(Y^{-1}(s)f(s))_i = \frac{\det Y_i(s)}{\det Y(s)}, \quad (\text{Cramer's rule})$$

mit

$$Y_i(s) = \begin{pmatrix} x_1(s) & \cdots & x_{i-1}(s) & 0 & x_{i+1}(s) & \cdots & x_n(s) \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ x_1^{(n-1)}(s) & \cdots & x_{i-1}^{(n-1)}(s) & b(s) & x_{i+1}^{(n-1)}(s) & \cdots & x_n^{(n-1)}(s) \end{pmatrix},$$

und $\det Y(s) = \phi(s)$,

$$\begin{aligned} \det Y_i(s) &= b(s) \cdot (-1)^{n+i} \det \begin{pmatrix} x_1(s) & \cdots & x_{i-1}(s) & x_{i+1}(s) & \cdots & x_n(s) \\ \vdots & & & & & \vdots \\ x_1^{(n-1)}(s) & \cdots & x_{i-1}^{(n-1)}(s) & x_{i+1}^{(n-1)}(s) & \cdots & x_n^{(n-1)}(s) \end{pmatrix} \\ &= b(s) \cdot \phi_i(s). \end{aligned}$$

Daher ist the spezielle Lösung

$$u_*(t) = Y(t) \cdot \int_{t_0}^t b(s) \begin{pmatrix} \frac{\phi_1(s)}{\phi(s)} \\ \vdots \\ \frac{\phi_n(s)}{\phi(s)} \end{pmatrix} ds,$$

und

$$x_*(t) = \sum_{i=1}^n x_i(t) \int_{t_0}^t b(s) \frac{\phi_i(s)}{\phi(s)} ds.$$

z.B. Im Fall $n = 2$, ist die Wronski-Determinante

$$\phi(t) = x_1(t)x_2'(t) - x_2(t)x_1'(t)$$

$$\phi_1(t) = -x_2(t)$$

$$\phi_2(t) = x_1(t)$$

$$\text{und } x_*(t) = -x_1(t) \int_{t_0}^t b(s) \frac{x_2(s)b(s)}{\phi(s)} ds + x_2(t) \int_{t_0}^t b(s) \frac{x_1(s)b(s)}{\phi(s)} ds$$

Beispiel 4.15

$$x'' + x = \sin t, \quad t_0 = 0.$$

$x_1(t) = \cos t$, $x_2(t) = \sin t$ sind offenbar Lösungen der homogenen DGL. Dann ist

$$Y(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix},$$

eine FM und $\det Y(t) = 1$.

$$\phi_1(t) = -\sin t, \quad \phi_2(t) = \cos t.$$

Dann erhalten wir eine spezielle Lösung

$$x_*(t) = -\cos t \int_0^t \sin^2 s \, ds + \sin t \int_0^t \sin s \cdot \cos s \, ds = \frac{1}{2}(\sin t - t \cos t).$$

4.5 Lineare Differentialgleichung höherer Ordnung mit den Konstanten Koeffizienten

Die explizierte homogene lineare Gleichung mit den Konstanten Koeffizienten lautet

$$x^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-1} a_j x^{(j)} = 0 \quad (4.13)$$

Wir nehmen den **Exponentialansatz** $x(t) = e^{\lambda t}$ mit $\lambda \in \mathbb{C}$, die weiteren festgelegt werden. Dann löst $x(t) = e^{\lambda t}$ die Gleichung (4.13) genau dann, wenn λ eine Nullstelle des Charakteristischen Polynoms

$$P(\lambda) = \sum_{j=0}^n a_j \lambda^j, \quad a_n = 1. \quad (4.14)$$

ist.

Proposition 4.16 *Ist λ_k eine Nullstelle von Polynom (4.14) von der Vielfachheit ν_k , so bilden $\{e^{\lambda_k t}, t e^{\lambda_k t}, \dots, t^{\nu_k-1} e^{\lambda_k t}\}$ linear unabhängige Lösungen von (4.13).*

Beispiel 4.17 Die Monome t^j sind offenbar linear unabhängig, deswegen sind $\{e^{\lambda_k t}, t e^{\lambda_k t}, \dots, t^{\nu_k-1} e^{\lambda_k t}\}$ auch linear unabhängig.

Dann bleibt zu zeigen ist dass eine Funktion der Form

$$y(t) = t^l e^{\lambda_k t}, \quad l \in \{0, \dots, \nu_k - 1\}$$

eine Lösung von (4.13) ist. Direkte Rechnen ergibt

$$\partial_t^j (t^l e^{\lambda t}) = \partial_t^j \partial_\lambda^l (e^{\lambda t}) = \partial_\lambda^l \partial_t^j (e^{\lambda t}) = \partial_\lambda^l (\lambda^j e^{\lambda t}).$$

Daraus folgt

$$y^{(j)}(t) = \partial_\lambda^l (\lambda^j e^{\lambda t}) \Big|_{\lambda=\lambda_k}.$$

Nun setzen wir dies in die Gleichung (4.13) ein, gilt

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^n a_j y^{(j)}(t) &= \sum_{j=0}^n a_j \partial_\lambda^l (\lambda^j e^{\lambda t}) \Big|_{\lambda=\lambda_k} \\ &= \partial_\lambda^l \left(\left(\sum_{j=0}^n a_j \lambda^j \right) e^{\lambda t} \right) \Big|_{\lambda=\lambda_k} = \partial_\lambda^l (P(\lambda) e^{\lambda t}) \Big|_{\lambda=\lambda_k}. \end{aligned}$$

Nach der Formel von Leibnitz ergibt

$$\partial_{\lambda}^l \left(P(\lambda) e^{\lambda t} \right) \Big|_{\lambda=\lambda_k} = \sum_{j=0}^l \binom{l}{j} P^{(j)}(\lambda_k) t^{l-j} e^{\lambda_k t} = 0, \quad \forall l \in \{0, \dots, \nu_k - 1\},$$

wobei λ_k eine ν_k vielfache Lösung von $P(\lambda) = 0$ verwendet wird.

Satz 4.18 Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ die paarweise verschiedenen Nullstellen von $P(\lambda)$. Dann bildet

$$\{e^{\lambda_j t}, t e^{\lambda_j t}, \dots, t^{\nu_k-1} e^{\lambda_j t} : j = 1, \dots, m\} \quad (4.15)$$

ein komplexes Fundamentalsystem, wobei ν_j die Vielfachheit von λ_j sind. Sind alle Koeffizienten a_j reell, so ignoriere man alle Eigenwerte mit negativem Imaginärteil, und bilde Reell und Imaginärteile der verbleibenden Lösung. Diese bilden dann ein reelles Fundamentalsystem.

Beweis: Sei

$$q(t) = \sum_{j=1}^m q_j(t) e^{\lambda_j t}$$

eine Linearkombination der n Lösungen von (4.13), wobei $q_j(t)$ Polynoms der Ordnung kleiner als $\nu_j - 1$ mit Koeffizienten aus $\mathbb{C}$ sind. Nun zeigen wir per vollständiger Induktion, dass $q(t) \equiv 0$ genau dann gilt, wenn alle $q_j(t) \equiv 0$ sind.

Offenbar ist $m = 1$ der Fall. Angenommen die Behauptung sei für ein $m > 1$ bewiesen, dann multiplizieren wir die Gleichung

$$0 \equiv \sum_{j=1}^m q_j(t) e^{\lambda_j t} + q_{m+1}(t) e^{\lambda_{m+1} t} \quad \text{wobei } \lambda_{m+1} \neq \lambda_j \quad (4.16)$$

mit $e^{-\lambda_{m+1} t}$ und erhalten

$$0 \equiv \sum_{j=1}^m q_j(t) e^{\mu_j t} + q_{m+1}(t) \quad \text{mit } \mu_j = \lambda_j - \lambda_{m+1} \neq 0.$$

Dann differenziert man diese Gleichung so oft bis $q_{m+1}(t)$ verschwindet, so ergibt

$$0 \equiv \sum_{j=1}^m r_j(t) e^{\mu_j t} \quad \text{mit gewissen Polynom } r_j(t).$$

Aus der Induktionsvoraussetzung folgt $r_j(t) \equiv 0$ gilt für alle $j = 1, \dots, m$.

Dann müssen auch alle $q_j(t) \equiv 0$ sein, denn nach der Produktregel gilt für ein Polynom $p(t)$

$$\frac{d}{dt}(p(t) e^{\mu t}) = (p'(t) + \mu p(t)) e^{\mu t} = r(t) e^{\mu t},$$

wobei $r(t)$ wieder ein Polynom ist mit der gleichen Ordnung wie $p(t)$. Dann ist auch $q_{m+1}(t) \equiv 0$ und das heißt dass wir die lineare Unabhängigkeit der n Lösungen gezeigt. ■

Beispiel 4.19 (Bernoulli-Balken)

$$x^{(4)} + x = f(t), \quad t \in J.$$

Die Gleichung für Eigenwerten ist $\lambda^4 + 1 = 0$ und die Lösungen sind

$$\lambda = \pm\sqrt{\pm i} = \pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{i}{\sqrt{2}}\right).$$

Dann ist ein reelles Fundamentalsystem gegeben durch

$$\left\{ e^{\frac{t}{\sqrt{2}}} \cos \frac{t}{\sqrt{2}}, e^{\frac{t}{\sqrt{2}}} \sin \frac{t}{\sqrt{2}}, e^{-\frac{t}{\sqrt{2}}} \cos \frac{t}{\sqrt{2}}, e^{-\frac{t}{\sqrt{2}}} \sin \frac{t}{\sqrt{2}} \right\}$$

Beispiel 4.20 (Das gefederte Doppelpendel)

$$\begin{cases} x'' = -gx + k(y - x) & g, k > 0 \\ y'' = -gy + k(x - y). \end{cases}$$

Bei dem Ansatz $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae^{\lambda t} \\ be^{\lambda t} \end{pmatrix}$, erhalten wir die folgende Gleichungen

$$\begin{aligned} ((\lambda^2 + g + k)a - kb)e^{\lambda t} &= 0 \\ ((\lambda^2 + g + k)b - ka)e^{\lambda t} &= 0. \end{aligned}$$

Dann lautet die Eigenwertgleichung

$$(\lambda^2 + g + k)^2 - k^2 = 0 \implies \lambda^2 = -g - k \pm k = \begin{cases} -g \\ -g - 2k. \end{cases}$$

Deswegen haben wir 4 imaginäre Eigenwerte,

$$\lambda_{1,3} = \pm i\sqrt{g}, \quad \lambda_{2,4} = \pm i\sqrt{g + 2k}.$$

Um die zugehörigen Eigenvektoren $(a, b)^T$ zu erhalten, wählen wir z. B. $a = k$ und $b = \lambda_j^2 + g + k$ für $j = 1, 2$. Dann die beide Lösungen sind

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{\lambda_2 t}.$$

Daraus folgt das folgenden reellen Fundamentalsystem

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\sqrt{g}t), \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \sin(\sqrt{g}t), \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cos(\sqrt{g + 2k}t), \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \sin(\sqrt{g + 2k}t) \right\}.$$

5 Stetige und differenzierbare Abhängigkeit

Es sei $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen, $f \in C(G; \mathbb{R}^n)$ stetig und lokal Lipschitz in x , $(t_0, x_0) \in G$. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} x' &= f(t, x) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned} \quad (5.17)$$

und untersuchen die Abhängigkeit der Lösungen von den Daten, also von t_0 , x_0 , und f . Die Abhängigkeit enthält Stetigkeit und Differenzierbarkeit.

5.1 Stetige Abhängigkeit

Gegeben sei die Lösung $x(t)$ auf ihrem maximalen Existenzintervall (t_-, t_+) und sei die Menge, für $t_0 \in (a, b)$ mit $J = [a, b] \subset (t_-, t_+)$,

$$\text{graph}_J(x) = \{(t, x(t)) \in G : t \in J\}.$$

Definition 5.1 Die gegebene Lösung $x(t)$ heißt **stetig abhängig** von (t_0, x_0, f) falls es zu jedem kompakten Intervall $J \subset (t_-, t_+)$ eine Umgebung $K \subset G$ von $\text{graph}_J(x)$ gibt sodass gilt:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, dass die Lösung $y(t)$ von

$$\begin{aligned} y' &= g(t, y) \\ y(\tau_0) &= y_0 \end{aligned} \quad (5.18)$$

$\forall t \in J$ existiert und die Ungleichung

$$|x(t) - y(t)| < \varepsilon, \quad \forall t \in J$$

genügt, sofern $g : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig, lokal Lipschitz von x und

$$|\tau_0 - t_0| < \delta, \quad |x_0 - y_0| < \delta, \quad \sup_{(s,z) \in K} |f(s, z) - g(s, z)| < \delta$$

erfüllen.

Satz 5.2 Sei $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen mit $(t_0, x_0) \in G$, $f \in C(G; \mathbb{R}^n)$ und lokal Lipschitz in x . Dann hängt die Lösung $x(t)$ stetig von den Daten (t_0, x_0, f) ab.

Beweis: Sei $y(t)$ die Lösung von Problem (5.18) auf ihrem maximalen Existenzintervall (τ_-, τ_+) mit $\tau_0 \in (\tau_-, \tau_+)$. Nun schreiben wir die Anfangswertprobleme für x und y in die Integralformeln für $t \in (t_-, t_+) \cap (\tau_-, \tau_+)$

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \\ y(t) &= y_0 + \int_{\tau_0}^t g(s, y(s)) ds \end{aligned}$$

Die Differenz $x(t) - y(t)$ ist

$$\begin{aligned}
 & x(t) - y(t) \\
 = & x_0 - y_0 + \int_{t_0}^t (f(s, x(s)) - g(s, y(s))) ds - \int_{\tau_0}^{t_0} g(s, y(s)) ds \\
 = & x_0 - y_0 - \int_{\tau_0}^{t_0} g(s, y(s)) ds + \int_{t_0}^t (f(s, x(s)) - f(s, y(s))) ds \quad (5.19) \\
 & + \int_{t_0}^t (f(s, y(s)) - g(s, y(s))) ds.
 \end{aligned}$$

Wir definieren die kompakte Menge durch

$$K := \{(t, y) : t \in [a - \eta, b + \eta], |x(t) - y| \leq \alpha\} \subset G \quad (5.20)$$

gegeben, wobei η so klein dass $[a - \eta, b + \eta] \subset (t_-, t_+)$ gilt. Dann ist die Einschränkung $f|_K$ auf K global Lipschitz stetig in x mit Lipschitz Konstante $L > 0$.

Für (τ_0, y_0) mit $|\tau_0 - t_0|, |y_0 - x_0| < \delta < \min\{\alpha, \eta\}$, ist es offenbar dass $(\tau_0, y_0) \in K$. Wir setzen $M = \max_{(t,x) \in K} |f(t, x)|$, dann für beliebige Funktion $g \in C(G; \mathbb{R}^n)$, die Lipschitz stetig in x ist, sofern

$$\max_{(t,x) \in K} |f(t, x) - g(t, x)| < \delta,$$

es gilt $\max_{(t,x) \in K} |g(t, x)| < M = \delta$. Dann aus (5.19) und der Dreiecksungleichung folgt dass $\forall t \in [t_0, \min\{b, \tau_+\}]$ mit $(s, y(s)) \in K$,

$$\begin{aligned}
 |x(t) - y(t)| & \leq |x_0 - y_0| + (M + \delta)|t_0 - \tau_0| + L \int_{t_0}^t |x(s) - y(s)| ds + \delta(b - a + \eta) \\
 & \leq C\delta + L \int_{t_0}^t |x(s) - y(s)| ds \quad (5.21)
 \end{aligned}$$

wobei $C = 1 + M + \delta + b - a + \eta$. Dann das Lemma von Gronwall liefert die Abschätzung

$$|x(t) - y(t)| \leq \delta C e^{L(t-t_0)} \quad (5.22)$$

so lange $(t, y(t)) \in K$ gilt. Nun wählen wir $\delta > 0$ hinreichend klein so dass die rechte Seite von (5.22) kleiner als α ist.

Angenommen es existiert ein erstes $t_* \in [t_0, \min\{b, \tau_+\}]$ mit

$$|x(t_*) - y(t_*)| = \alpha.$$

Da $(t_*, y(t_*)) \in K$ ist, nach der obigen Diskussion folgt $|x(t_*) - y(t_*)| < \alpha$, ein Widerspruch. Ebenso argumentiert man nach links.

Das heißt dass der Graph der Lösung $y(t)$ die Menge K nicht verlassen kann.

Da die Lösung $y(t)$ auf dem Intervall $(\max\{a, \tau_-\}, \min\{b, \tau_+\})$ beschränkt ist, nach dem Fortsetzungssatz, ist $\tau_- < a$ und $\tau_+ > b$, also $y(t)$ ist auf $[a, b]$ existiert und $(t, y(t)) \in K$, $\forall t \in [a, b]$ erfüllt.

Dann $\forall \varepsilon > 0$ hinreichend klein, wählen wir $\delta > 0$ so klein in (5.22) dass

$$|x(t) - y(t)| < \delta C e^{L(t-t_0)} < \varepsilon$$

gilt. Dann ist die Stetigabhängigkeit bewiesen. ■

Bemerkung 5.3 Sei $t_0 = \tau_0$, $x_0 = y_0$ $f \equiv g$, dann nach der Stetigabhängigkeit ist

$$\forall \varepsilon > 0, \text{ gilt } |x(t) - y(t)| < \varepsilon, \forall t \in J.$$

Da $J \subset (t_-, t_+)$ beliebig ist, ist die Lösung $x(t)$ auf ihrem maximalen Existenzintervall eindeutig.

Korollar 5.4 (Die Stetigabhängigkeit im Grenzwertschreiben) Sei $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen, $(t_0, x_0) \in G$, $f, f_j : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und lokal Lipschitz stetig in x , und es sei $x(t)$ die Lösung auf ihrem maximalen Existenzintervall (t_-, t_+) . Es gelte

$$t_j \rightarrow t_0, \quad x_{j,0} \rightarrow x_0$$

und

$$f_j(t, x) \rightarrow f(t, x) \text{ gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von } G.$$

Sei $[a, b] \subset (t_-, t_+)$. Dann besitzt das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} x'_j &= g_j(t, x_j), \quad \forall t \in [a, b] \\ x_j(t_j) &= x_{j,0} \end{aligned}$$

für hinreichend großes j genau eine Lösung auf $[a, b]$ und es gilt

$$x_j(t) \rightarrow x(t) \text{ gleichmäßig auf } [a, b].$$

Beispiel 5.5 (Lotka-Volterra Modell)

$$\begin{cases} x' = ax - bxy, & a, b, c, d > 0 \\ y' = -dy + cxy \\ x(0) = x_0 > 0, y(0) = y_0 > 0. \end{cases}$$

Gezeigt wird ist die globale Existenz und Eindeutigkeit der Lösung. Nach der Stetigabhängigkeit der Lösung von den Daten (x_0, y_0, f) , ist die Lösung von (x_0, y_0, a, b, c, d) stetig abhängig.

5.2 Anwendungen der Abhängigkeit

5.2.1 Comparison Prinzip

Lemma 5.6 Sei $u : J \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und lokal Lipschitz stetig in x , $J = [t_0, t_1]$, $\rho \in C^1(J; \mathbb{R})$ erfüllt die Differentialungleichung

$$\begin{cases} \rho' \leq u(t, \rho(t)), & t \in J, \\ \rho(t_0) \leq \varphi_0. \end{cases}$$

Sei $\varphi \in C^1(J; \mathbb{R})$ die Lösung von

$$\begin{cases} \varphi' = u(t, \varphi(t)), & t \in J, \\ \varphi(t_0) = \varphi_0. \end{cases}$$

Dann gilt $\rho(t) \leq \varphi(t)$, $\forall t \in J$.

Beweis: Wir setzen $u_n(t, x) = u(t, x) + \frac{1}{n}$. Sei φ_n die Lösung von

$$\begin{cases} \varphi'_n = u_n(t, \varphi_n(t)), & t \in J, \\ \varphi_n(t_0) = \varphi_0 + \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Dann gilt

$$\begin{cases} \rho' \leq u(t, \rho(t)) < u(t, \rho(t)) + \frac{1}{n}, & t \in J, \\ \rho(t_0) \leq \varphi_0 < \varphi_0 + \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Nach dem Lemma 3.19 folgt

$$\rho(t) < \varphi_n(t), \quad \forall t \in J, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Die Stetigabhängigkeit der Lösung φ von den Daten liefert

$$\varphi_n(t) \rightarrow \varphi(t) \quad \text{gleichmäßig auf } J.$$

Dann nachdem Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ gilt

$$\rho(t) \leq \varphi(t), \quad \forall t \in J.$$

■

5.2.2 Positivität von Lösungen

Sei $x \in C^1(J; \mathbb{R}^n)$ eine Lösung von $x' = f(t, x)$. Wenn die Anfangswerte $x_{0,k} \geq 0$ für ein $k \in \{1, \dots, n\}$, unter welchen Bedingungen wird $x_k(t)$, $\forall t \in J$, auch nicht negativ sein?

Definition 5.7 (Positivitätsbedingung für f) Sei $x \in \mathbb{R}^n$ und $x_k \geq 0$ für $k = 1, \dots, n$. Wenn $\forall k = 1, \dots, n$ mit $t \geq t_0$ und $x_k = 0$, gilt $f_k(t, x) \geq 0$, dann heißt f **quasipositiv**.

Beispiel 5.8 (Lotka-Volterra)

$$\begin{cases} x' = ax - bxy, & a, b, c, d > 0 \\ y' = -dy + cxy \\ x(0) = x_0 > 0, y(0) = y_0 > 0. \end{cases}$$

Für $x = 0$ oder $y = 0$, gelten $f_1(0, y) = 0$ oder $f_2(x, 0) = 0$, damit ist die Positivitätsbedingung 5.7 erfüllt.

Beispiel 5.9 (Chemische Kinetik (Gleichgewichtsreaktion))

$$\begin{cases} c'_A = -k_+ c_A c_B + k_- c_P, & c_A(0) = c_A^0 \\ c'_B = -k_+ c_A c_B + k_- c_P, & c_B(0) = c_B^0 \\ c'_P = k_+ c_A c_B - k_- c_P, & c_P(0) = c_P^0 \end{cases}$$

wobei $k_-, k_+ > 0$. Es ist offenbar dass die Positivitätsbedingung erfüllt.

Satz 5.10 Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und lokal Lipschitz stetig in x und es sei f quasipositiv. Ist $x(t)$ die Lösung von (5.17) und gilt $x_{0,j} \geq 0$, $\forall j = 1, 2, \dots, n$, so folgt $x_j(t) \geq 0$, $\forall t \in [t_0, t_+)$ wobei $[t_0, t_+)$ das maximale Existenzintervall der Lösung nach rechts ist.

Beweis: Sei $e = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$ und $x^m(t)$ löst

$$\begin{cases} (x^m)' = f(t, x^m) + \frac{e}{m} =: f^m(t, x^m) \\ x^m(t_0) = x_0 + \frac{e}{m} =: x_0^m, \quad \text{mit } x_{0,j}^m > 0, \forall m \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Nach der Stetigkeit von f gilt für $m \rightarrow \infty$

$$f^m(t, x) \rightarrow f(t, x) \quad \text{gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n.$$

Außerdem ist $x_0^m \rightarrow x_0$. Dann die Stetigabhängigkeit der Lösung von den Daten liefert

$$x^m(t) \rightarrow x(t)$$

gleichmäßig auf kompakten Teilmengen vom ihren Maximalen Existenzintervall. Sei $t_1 > t_0$ die erste Zeit, an der ein Komponent von $x^m(t)$ verschwindet, O.B.d.A., sei $x_k^m(t_1) = 0$ und $x_j^m(t_1) \geq 0$, $\forall j \neq k$. Dann gilt einerseits $(x_k^m)'(t_1) \leq 0$, andererseits

$$(x_k^m)'(t_1) = f_k(t_1, x^m(t_1)) + \frac{1}{m} \geq \frac{1}{m} > 0,$$

wobei die Positivitätsbedingung für f verwendet wird. Das ist ein Widerspruch. Das heißt $x_k^m(t) > 0$ gilt für alle $k \in \{1, \dots, n\}$, $m \in \mathbb{N}$ und $t > t_0$. Daher für $m \rightarrow \infty$ gilt $x_k(t) \geq 0$ für alle $k = 1, \dots, n$ und $t \in [t_0, t_+)$. ■

5.2.3 Periodische Lösungen

Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und lokal Lipschitz stetig in x , τ -periodisch in t , d.h.

$$f(t + \tau, x) = f(t, x), \quad t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n.$$

Frage: Ob es auch τ -periodische Lösungen gibt.

Leider ist es im Allgemeinen nicht der Fall. z.B. Das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} x'' + x = \cos t \\ x(0) = x_0, x'(0) = x_1 \end{cases}$$

hat eine eindeutige Lösung durch

$$x(t) = x_0 \cos t + x_1 \sin t + \frac{t}{2} \sin t$$

gegeben, und die ist nicht 2π -periodisch. Und diese Eigenschaft ist nicht vom Anfangswert abhängt.

Nun suchen wir zusätzliche Bedingung für f , damit eine periodische Lösung existiert. Sei $x(t)$ eine τ -periodische Lösung von $x' = f(t, x)$, also $x(t + \tau) = x(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Dann x soll die Lösung vom Problem mit einer periodischen Randbedingung

$$\begin{cases} x' = f(t, x), & \forall t \in [0, \tau] \\ x(0) = x(\tau). \end{cases} \quad (5.23)$$

Falls f τ -periodisch in t ist, und $x(t)$ eine Lösung von (5.23) ist, dann ist die periodische Fortsetzung $\tilde{x}(t)$ von $x(t)$ auf $\mathbb{R}$ eine periodische Lösung.

Definition 5.11 Sei $y(t, z)$ die Lösung vom Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y' = f(t, y), \\ y(0) = z. \end{cases}$$

Wir definieren eine Abbildung $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch

$$Tz := y(\tau, z).$$

Die nennt man **Poincare Abbildung**.

Bemerkung 5.12 Die Existenz der Lösung $y(t)$ auf dem Intervall $[0, \tau]$ zeigt dass die Abbildung T wohldefiniert ist. Nach der Stetigabhängigkeit ist die Abbildung T auch stetig. Die Existenz einer periodischen Lösung ist äquivalent zu die Existenz einem Fixpunkt der Abbildung T .

Satz 5.13 (Fixpunktsatz von Brouwer) Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen, beschränkt, konvex, und $T : D \rightarrow D$ stetig, dann besitzt T mindestens einen Fixpunkt in D .

Satz 5.14 Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig, lokal Lipschitz stetig in x und τ -periodisch in t . Es existiere $R > 0$ sodass

$$f(t, x) \cdot x \leq 0 \quad \text{gilt } \forall |x| = R, \forall t \in [0, \tau]. \quad (5.24)$$

Dann besitzt die Differentialgleichung $x' = f(t, x)$ mindestens eine τ -periodische Lösung auf $\mathbb{R}$.

Beweis: Zuerst nehmen wir eine stärkere Bedingung für f , also $\exists R > 0$ sodass

$$f(t, x) \cdot x < 0 \quad \text{gilt } \forall |x| = R, \forall t \in [0, \tau]. \quad (5.25)$$

Sei $T : \overline{B_R(0)} \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch $Tz = y(\tau, z)$ definiert, wobei $y(t, z)$ die Lösung mit dem Anfangswert z ist.

Nun behaupten wir dass $T(\overline{B_R(0)}) \subset \overline{B_R(0)}$.

Für $|z| < R$, es gilt $|Tz| = |y(\tau, z)| < R$, $\forall t \in [0, \tau]$. Wenn es nicht der Fall ist, dann existiert $t_* \in [0, \tau]$ sodass

$$y(t_*, z) = R \quad \text{und} \quad |y(t, z)| < R, \forall t \in [0, t_*].$$

Daraus folgt

$$\left. \frac{d}{dt} |y(t, z)|^2 \right|_{t=t_*} \geq 0.$$

Andererseits nach der Annahme (5.25) gilt

$$\left. \frac{d}{dt} |y(t, z)|^2 \right|_{t=t_*} = 2y'(t_*, z) \cdot y(t_*, z) = 2f(t_*, y(t_*, z)) \cdot y(t_*, z) < 0.$$

Das ist ein Widerspruch.

Für $|z| = R$, gilt

$$\left. \frac{d}{dt} |y(t, z)|^2 \right|_{t=0} = 2y'(0, z) \cdot y(0, z) = 2f(0, y(0, z)) \cdot y(0, z) < 0.$$

Dann $\exists t_0 > 0$ sodass

$$|y(t, z)| < R \quad \text{gilt } \forall t \in (0, t_0].$$

Nun ist der Fall $y(t_0, z) < R$. Den können wir als Anfangswert nehmen und wiederholen die Argument für den Fall $|z| < R$ und erhalten dass

$$|y(t, z)| < R, \quad \forall t \in (0, \tau].$$

Also mit der stärkeren Voraussetzung (5.25) haben wir die Aussage $T(\overline{B_R(0)}) \subset \overline{B_R(0)}$ gezeigt.

Wenn die Bedingung (5.24) für f gilt, dann benutzen wir die Approximation

$$f_k(t, x) = f(t, x) - \frac{x}{k}$$

und definieren wir $T_k z = y_k(\tau, z)$, wobei $y_k(t, z)$ die Lösung von

$$\begin{cases} y'_k = f_k(t, y_k), \\ y_k(0) = z. \end{cases}$$

ist. Dann ist die Bedingung (5.25) erfüllt. Dann ist $T_k(\overline{B_R(0)}) \subset \overline{B_R(0)}$. Außerdem nach der Stetigabhängigkeit der Lösung von den Daten, ist die Abbildung t_k stetig. Daher der Fixpunktsatz von Brouwer liefert dass zu jedem $k \in \mathbb{N}$, es existiert einen Fixpunkt $z_k^* \in \overline{B_R(0)}$ von T_k , also

$$T_k(z_k^*) = z_k^* \quad \text{und} \quad y_k(0, z_k^*) = y_k(\tau, z_k^*).$$

Da die Menge $\overline{B_R(0)}$ beschränkt ist, existiert eine konvergente Teilfolge von $(z_k^*)_{k=1}^\infty$

$$z_{k_m}^* \rightarrow x_0 \in \overline{B_R(0)}, \quad m \rightarrow \infty.$$

Nun betrachten wir das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y' = f(t, y), \\ y(0) = x_0. \end{cases}$$

Die Lösung ist stetig von den Daten abhängig, dann aus

$$f_{k_m}(t, x) \rightarrow f(t, x) \quad \text{gleichmäßig auf } [0, \tau] \times \overline{B_R(0)}$$

folgt

$$y_{k_m}(t) \rightarrow y(t) \quad \text{gleichmäßig auf } [0, \tau].$$

Ferner ist $x_0 = y(0) = \lim_{m \rightarrow \infty} y_{k_m}(0) = \lim_{m \rightarrow \infty} z_{k_m}^* = \lim_{m \rightarrow \infty} y_{k_m}(\tau) = y(\tau)$. Das zeigt dass eine periodische Lösung existiert.

■

5.3 Differenzierbarkeit der Lösungen nach Daten

Wir betrachten nur das Autonome System, also den Fall $f(t, x) \equiv f(x)$, die Funktion f ist nicht von t abhängig.

$$\begin{cases} x' = f(x), \\ x(0) = y. \end{cases} \quad (5.26)$$

wobei $f \in C^1(G; \mathbb{R}^n)$ und $G \subset \mathbb{R}^n$ offen. Nach dem Existenz und Eindeutigkeit Satz, es existiert eine eindeutige Lösung $x = x(t, y)$, $x \in C^1([0, t_+(y)); \mathbb{R}^n)$ wobei $[0, t_+(y))$ ihren maximalen Existenzintervall nach rechts ist.

Sei $x(t, y)$ die Lösung, die auch eine Funktion von y ist, die Frage sei ob x nach y differenzierbar ist. Nach dem formalen Differenzieren, also leiten wir die Gleichung $\partial_t x(t, y) = f(x(t, y))$ nach y ab folgt

$$\partial_y(\partial_t x(t, y)) = f'(x(t, y))\partial_y x(t, y).$$

Im Fall dass $x(t, y)$ glatt ist, gilt

$$\partial_t(\partial_y x(t, y)) = f'(x(t, y))\partial_y x(t, y).$$

Außerdem aus $x(0, y) = y$ folgt $\partial_y x(0, y) = I$, die Einheit Matrix.

Also wenn die Funktion $x(t, y)$ nach y differenzierbar ist, muss die Ableitungsmatrix $\partial_y x(t, y)$ das folgenden Anfangswertproblem erfüllen

$$\begin{cases} X' = A(t, y)X, \\ X(0) = I. \end{cases} \quad (5.27)$$

wobei $A(t, x) = f'(x(t, y))$.

Satz 5.15 Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(G; \mathbb{R}^n)$ und $x(t, y)$ sei die Lösung von (5.26) auf einem Intervall $J = [0, a) \subset [0, \tau_+(y))$. Dann ist die Abbildung $(t, y) \rightarrow x(t, y)$ stetig differenzierbar und $X = X(t, y) = \partial_y x(t, y)$ erfüllt das Anfangswertproblem (5.27).

Beweis: Sei $y \in G$ fixiert und eine Umgebung $B_\delta(y) \subset G$ mit Radius $\delta > 0$ klein genug. Sei $h \in \mathbb{R}^n$ mit $|h| < \delta$ klein und $X(t)$ sei die Lösung von (5.27). Wir definieren

$$u_h(t) := x(t, y + h) - x(t, y) - X(t)h, \quad \forall t \in J.$$

Um die Differenzierbarkeit der Lösung $x(t, y)$ nach y zu beweisen, werden wir zeigen dass $\forall \varepsilon > 0$ ein $\eta(\varepsilon) > 0$ existiert dass

$$|u_h(t)| \leq \varepsilon|h| \quad \text{für } |h| \leq \eta(\varepsilon) \text{ gilt.} \quad (5.28)$$

Wir differenzieren $u_h(t)$ in t und erhalten

$$\begin{aligned}\partial_t u_h &= \partial_t x(t, y+h) - \partial_t x(t, y) - \partial_t X(t)h \\ &= f(x(t, y+h)) - f(x(t, y)) - A(t, y)X(t)h \\ &= A(t, y)u_h + r_h(t),\end{aligned}$$

wobei

$$r_h(t) = f(x(t, y+h)) - f(x(t, y)) - A(t, y)[x(t, y+h) - x(t, y)].$$

Das heißt dass u_h erfüllt das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u_h'(t) = A(t, y)u_h(t) + r_h(t) \\ u_h(0) = 0. \end{cases}$$

Da die matrixwertige Funktion $X(t)$ eine Fundamentalmatrix der Gleichung $x'(t) = A(t, y)x(t)$ ist, nach der Variation der Konstanten gilt

$$u_h(t) = X(t) \int_0^t X^{-1}(s)r_h(s)ds.$$

Nun setzen wir

$$M_1 = \max_{t \in J} |X(t)| \quad \text{und} \quad M_2 = \max_{t \in J} |X^{-1}(t)|,$$

dann folgt die Abschätzung

$$|u_h(t)| \leq M_1 M_2 \int_0^t |r_h(s)| ds$$

Aus der Stetigabhängigkeit der Lösung nach den Anfangswert folgt

$$x(t, y+h) \rightarrow x(t, y) \quad \text{gleichmäßig in } J \times \overline{B_\delta(y)}.$$

Der Mittelwertsatz zeigt $\exists \theta \in [0, 1]$ sodass

$$\begin{aligned}r_h(t) &:= f(x(t, y+h)) - f(x(t, y)) - A(t, y)[x(t, y+h) - x(t, y)] \\ &= [f'(\theta x(t, y+h) + (1-\theta)x(t, y)) - f'(x(t, y))][x(t, y+h) - x(t, y)].\end{aligned}$$

Da $f \in C^1(G; \mathbb{R}^n)$ auf kompakten Mengen gleichmäßig stetig ist, dann $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta(\varepsilon) > 0$ sodass $\forall |h| < \eta(\varepsilon)$ gilt

$$|r_h(t)| \leq \varepsilon |x(t, y+h) - x(t, y)| \leq \varepsilon |u_h(t)| + \varepsilon |X(t)||h| \leq \varepsilon |u_h(t)| + \varepsilon M_1 |h|.$$

Somit erhält man

$$|u_h(t)| \leq \varepsilon M_1 M_2 \int_0^t (|u_h(s)| + M_1 |h|) ds.$$

Dann nach der Gronwallschen Ungleichung gilt

$$|u_h(t)| \leq \varepsilon a M_1^2 M_2 |h| e^{\varepsilon M_1 M_2 t} \leq C \varepsilon |h|, \forall t \in J.$$

Dann folgt aus der Definition der Differenzierbarkeit, ist die Lösung $x(t, y)$ nach y differenzierbar und die Ableitungsmatrix $\partial_y x(t, y)$ die Lösung von (5.27). ■

5.4 Dynamische Systeme

Definition 5.16 (Dynamisches System) Sei (M, d) ein metrischer Raum. Eine Abbildung $\phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$, $(t, x) \rightarrow \phi(t, x)$ heißt **dynamisches System (Fluss)** falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind.

$$(D1) \quad \phi(0, x) = x, \quad \forall x \in M.$$

$$(D2) \quad \phi(t + s, x) = \phi(t, \phi(s, x)), \quad \forall t, s \in \mathbb{R}, \quad x \in M. \quad \textbf{Gruppeneigenschaft}$$

$$(D3) \quad \phi \text{ ist stetig in } (t, x) \in \mathbb{R} \times M.$$

Ersetzt man in dieser Definition $\mathbb{R}$ durch $\mathbb{R}^+$, so spricht man von einem **semi-dynamischen System** (oder **Halbfluss**) auf M und (D2) heißt Halbgruppeneigenschaft.

Bemerkung 5.17 Die Abbildung ϕ beschreibt die Dynamik des Systems: Ist das System zum Zeitpunkt $t = 0$ in x , so befindet es sich zur Zeit $t = t^*$ in $\phi(t^*, x)$.

Satz 5.18 Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz stetig und zu jedem Anfangswert $y \in G$ existiere die Lösung des autonomen Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} x' &= f(x) \\ x(0) &= y \end{aligned} \tag{5.29}$$

global, also für alle $t \in \mathbb{R}$. Dann definiert die Funktion

$$\phi(t, y) := x(t, y), \quad \forall y \in G, t \in \mathbb{R}$$

ein dynamisches System. Existieren die Lösungen wenigstens nach rechts global, so erhält man entsprechend einen Halbfluss.

Beweis: Für die Eigenschaft (D1), ist es offensichtlich dass $\phi(0, y) = x(0, y) = y$.

Für (D2), die Definition von ϕ ergibt sich $\phi(t+s, y) = x(t+s, y)$ und $\phi(t, \phi(s, y)) = x(t, x(s, y))$. $x(t, x(s, y))$ ist die Lösung von $x' = f(x)$ mit dem Anfangswert $x(0, x(s, y)) = x(s, y)$. Andererseits ist $x(t+s, y)$ die Lösung von $x' = f(x)$ mit dem Anfangswert $x(0, y) = y$, speziell hat sie an der Zeit s den Wert $x(s, y)$. Das bedeutet dass $x(t, x(s, y))$ und $x(t+s, y)$ sind beide Lösungen von $x' = f(x)$ mit der Bedingung $x(0, x(s, y)) = x(s, y)$. Nach der Eindeutigkeit der Lösungen, erhält man $x(t+s, y) = x(t, x(s, y))$, also $\phi(t+s, x) = \phi(t, \phi(s, x))$.

Die Stetigkeit von ϕ in (D3) kommt aus der Stetigabhängigkeit nach den Anfangswert. ■

Bemerkung 5.19 • Autonome Systeme sind notwendig. z.B. für das System

$\begin{cases} x' = tx \\ x(0) = y \end{cases}$, ist $x(t, y)$ eine Lösung, erfüllt $x(t+s, y)$ die Gleichung $x'(t+x, y) = (t+s)x(t+s, y)$, die nicht die selbe Gleichung ist.

- Sei $\phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ ein dynamisches System. Ersetzt man $\mathbb{R}$ durch $\mathbb{Z}$, so spricht man von diskreten dynamischen Systemen.
- Sei $y \in M$ fixiert. Dann nennt man $\gamma(y) := \{\phi(t, y) : t \in \mathbb{R}\}$ **Orbit** oder **Bahn** oder Trajektorie durch y . Entsprechend heißt $\gamma_+(y) = \phi(\mathbb{R}_+, y)$ positives Halborbit von y .
- Ist $\phi(t, x)$ ein Halbfluss und existiert

$$x_\infty := \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t, x_0),$$

so ist x_∞ ein Fixpunkt des Halbflusses, also $\phi(t, x_\infty) = x_\infty$, $\forall t \geq 0$. Dies zeigt

$$\begin{aligned} \phi(t, x_\infty) &= \phi(t, \lim_{s \rightarrow \infty} \phi(s, x_0)) \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \phi(t+s, x_0) = x_\infty. \end{aligned}$$

Daher sind Grenzwerte von globalen Lösungen einer autonomen Differentialgleichung $x = f(x)$ für $t \rightarrow \infty$ stets stationäre Lösungen der Gleichung.

6 Elementare Stabilitätstheorie

6.1 Definition der Stabilität

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : \mathbb{R} \times G \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und lokal Lipschitz stetig in x . Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0, \quad t_0 \in \mathbb{R}, x_0 \in G. \end{cases} \quad (6.30)$$

Sei $x(t)$ eine globale Lösung nach rechts, und untersuchen wir ob die Lösung $x(t)$ 'stabil' bleibt. Das heißt ob nach eine kleine Änderung von Anfangsdaten bleibt die Lösung auch in einer kleinen Umgebung von $x(t)$. Die genaue Definition der Stabilität wird weiteren gegeben.

Sei $\tilde{x}(t)$ eine Lösung von

$$\begin{cases} \tilde{x}' = f(t, \tilde{x}) \\ \tilde{x}(t_0) = \tilde{x}_0, \quad t_0 \in \mathbb{R}, \tilde{x}_0 \in G. \end{cases}$$

Nun betrachten wir die Differenz der zwei Lösungen. Sei $y(t) = x(t) - \tilde{x}(t)$, diese Funktion beschreibt die Änderung der Lösung. Dann gilt '

$$\begin{aligned} y'(t) = x'(t) - \tilde{x}'(t) &= f(t, x(t)) - f(t, \tilde{x}(t)) \\ &= f(t, y(t) + \tilde{x}(t)) - f(t, \tilde{x}(t)) := g(t, y(t)), \end{aligned}$$

wobei g stetig in t und lokal Lipschitz stetig in y ist.

Es gilt dann offensichtlich $g(t, 0) = 0$, das heißt

$$\begin{cases} y' = g(t, y) \\ y(t_0) = 0 \end{cases}$$

hat eine konstante Lösung $y_*(t) \equiv 0$. Daher genügt es den Fall $f(t, 0) = 0$ zu betrachten.

Definition 6.1 Sei $f : \mathbb{R} \times G \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und lokal Lipschitz stetig in x und $f(t, 0) = 0$.

- Die triviale Lösung $x_* = 0$ heißt **stabil**, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass $\overline{B_\delta(0)} \subset G$, die Lösung $x(t, x_0)$ mit $x_0 \in \overline{B_\delta(0)}$ für $t \geq t_0$ existiert und

$$|x(t, x_0)| < \varepsilon, \quad \forall t > t_0, |x_0| \leq \delta$$

erfüllt ist.

- $x_* = 0$ heißt **instabil**, falls es nicht stabil ist.

- $x_* = 0$ heißt **attraktiv**, falls $\exists \delta_0 > 0$ sodass $\overline{B_{\delta_0}(0)} \subset G$, die Lösung $x(t, x_0)$ für $x_0 \in \overline{B_{\delta_0}(0)}$ und alle $t \geq t_0$ existiert und

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t, x_0)| = 0, \quad x_0 \in \overline{B_{\delta}(0)}$$

gilt.

- $x_* = 0$ heißt **asymptotisch stabil**, falls es stabil und attraktiv ist.

Bemerkung 6.2 • $x_* = 0$ ist stabil ist äquivalent zu $\lim_{x_0 \rightarrow 0} |x(t, x_0)| = 0$ gleichmäßig in $t \geq t_0$, und auch äquivalent zu dass $x(t, x_0)$ ist stetigabhängig von x_0 an der Stelle $x_0 = 0$.

- $x_* = 0$ ist stabil bedeutet nicht dass $x_* = 0$ attraktiv sein muss. Andererseits $x_* = 0$ ist attraktiv impliziert auch nicht dass $x_* = 0$ stabil ist.

Beispiel 6.3 $x' = \alpha x$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$.

$x_* = 0$ ist eine triviale Lösung. Die eindeutige Lösung mit dem Anfangswert x_0 ist $x(t, x_0) = x_0 e^{\alpha t}$. Dann

- $x_* = 0$ ist stabil wenn $\alpha \leq 0$, denn $\forall \varepsilon > 0$ mit $\delta = \varepsilon$, ist für $|x_0| < \delta$ gilt $|x(t, x_0)| \leq |x_0| e^{\alpha t} < |x_0| < \varepsilon$.
- $x_* = 0$ ist stabil wenn $\alpha > 0$, denn $\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t, x_0)| = \infty$ sofern $|x_0| \neq 0$.
- $x_* = 0$ ist attraktiv und asymptotisch stabil wenn $\alpha < 0$, denn $\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t, x_0)| = 0$, $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Beispiel 6.4 $x' = -x^3$ für $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Die Lösungsdarstellung ist durch

$$x(t, x_0) = \frac{\operatorname{sgn} x_0}{\sqrt{2t + \frac{1}{x_0^2}}}, \quad t > -\frac{1}{2x_0^2}$$

gegeben. $\forall \varepsilon > 0$, wir nehmen $\delta = \varepsilon$, dann gilt für $|x_0| < \delta$,

$$|x(t, x_0)| = \frac{1}{\sqrt{2t + \frac{1}{x_0^2}}} \leq |x_0| < \delta = \varepsilon.$$

Da $\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t, x_0)| = 0$, ist die Lösung $x_* = 0$ auch asymptotisch stabil.

Beispiel 6.5 $\begin{cases} x'' + \omega^2 x = 0 \\ x(0) = x_0, x'(0) = 0. \end{cases}$

$x_* = 0$ ist eine triviale Lösung von der Gleichung. Für das mathematische Pendel, ist $x_* = 0$ die untere Ruhelage. Für den Anfangswert x_0 mit $|x_0| < \delta$, also

die eine kleine Abweichung von $x_* = 0$ ist, bleibt die Lösung $x(t, x_0)$ in einer ε -Umgebung von x_* , denn es gilt

$$|x(t, x_0)| = |x_0 \cos \omega t| < \delta = \varepsilon.$$

Die Lösung $x_* = 0$ ist stabil, aber nicht attraktiv, denn

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t, x_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} x_0 \cos \omega t$$

existiert nicht.

Bemerkung 6.6 Für die nicht lineare Gleichung $x'' + \omega^2 \sin x = 0$, gibt es zwei konstante Lösungen, die obere Ruhelage $x_* = \pi$ und die untere Ruhelage $x_* = 0$. Wir werden später zeigen dass 0 stabil ist und π instabil ist.

6.2 Ebene lineare autonome Systeme

In diesem Abschnitt untersuchen wir die Lösungsverhalten der 2-Dimensional homogenen linearen System

$$x' = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad (6.31)$$

Das System hat eine triviale Lösung $x_* = 0$. Das Ziel ist die Stabilität von 0 mittels der Eigenwerte vollständig zu charakterisieren.

Sei $p = a_{11} + a_{22} = \text{Sp}A$, $q = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = \det A$. Dann ist $p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^2 - p\lambda + q$. Die Nullstelle sind

$$\lambda_{1,2} = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Es gibt die folgende 3 Fälle, die später separat behandelt werden.

- (1) $\lambda_{1,2}$ sind Reell und $\lambda_1 \neq \lambda_2$, oder äquivalent $q < \frac{p^2}{4}$
- (2) $\lambda_{1,2}$ sind Reell und $\lambda_1 = \lambda_2$, oder äquivalent $q = \frac{p^2}{4}$
- (3) $\lambda_{1,2}$ sind konjugiert komplex $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$, oder äquivalent $q > \frac{p^2}{4}$

In dem Fall (1). Sei v_1, v_2 die Eigenvektoren zu λ_1, λ_2 , und $C = (v_1, v_2)$, dann gilt

$$C \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = AC = (\lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2).$$

Sei $x = Cy$, dann folgt

$$y' = C^{-1}x' = C^{-1}Ax = C^{-1}ACy = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} y.$$

Damit folgt die Lösungsdarstellung

$$\begin{cases} y_1(t) = k_1 e^{\lambda_1 t}, & \forall k_1 \in \mathbb{R} \\ y_2(t) = k_2 e^{\lambda_2 t}, & \forall k_2 \in \mathbb{R} \end{cases} \implies y_2 = k_2 \left(\frac{y_1}{k_1} \right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}.$$

Es gibt fünf Unterfälle

1. $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ ($q < 0$).

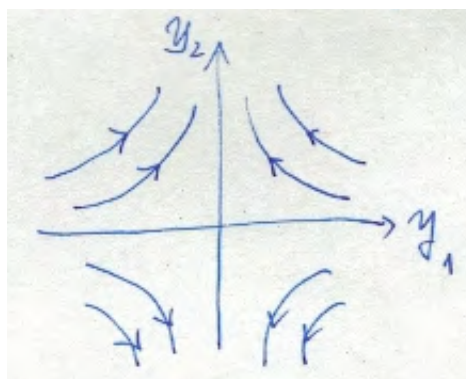


Abbildung 6.3: Sattelpunkt

2. $\lambda < \lambda_2 < 0$ ($0 < q < \frac{p^2}{4}$, $p < 0$).

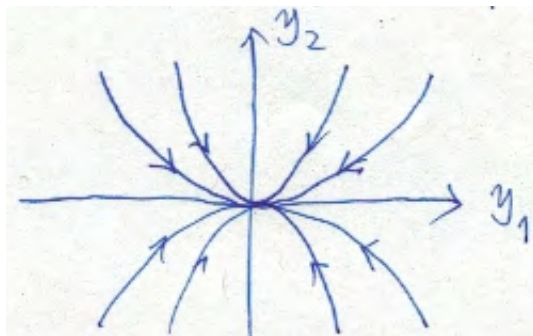


Abbildung 6.4: Stabiler Knoten

3. $0 < \lambda_1, \lambda_2$ ($0 < q < \frac{p^2}{4}$, $p > 0$).

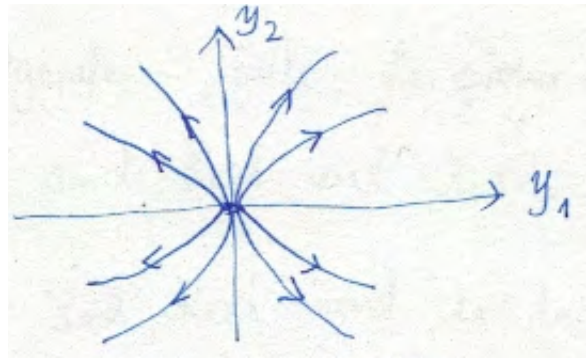


Abbildung 6.5: Instabiler Knoten

4. $\lambda_1 < 0, \lambda_2 = 0$ ($q = 0, p < 0$).

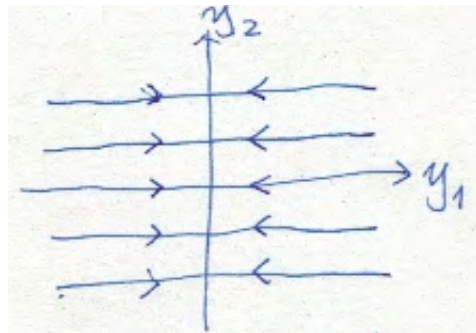


Abbildung 6.6: Stabile Zustände

5. $\lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0$ ($q = 0, p > 0$).

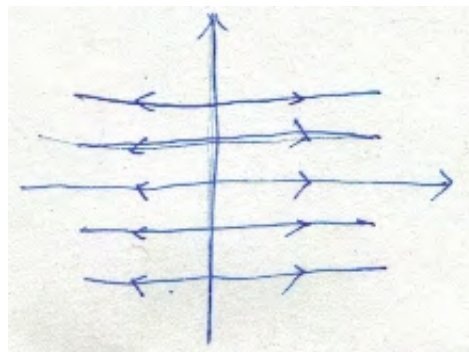


Abbildung 6.7: Instabile Zustände

In dem Fall (2). Es gibt zwei Unterfälle

1. $\lambda = \lambda_{1,2}$ ist halbeinfach, also $m_g(\lambda) = m(\lambda) = 2$. Sei v_1, v_2 die Eigenvektoren und sei $C = (v_1, v_2)$, dann mit $x = Cy$ folgt

$$y' = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} y.$$

Damit folgt die Lösungsdarstellung

$$\begin{cases} y_1(t) = k_1 e^{\lambda t}, & \forall k_1 \in \mathbb{R} \\ y_2(t) = k_2 e^{\lambda t}, & \forall k_2 \in \mathbb{R} \end{cases} \implies y_2 = \frac{k_2}{k_1} y_1.$$

Für $\lambda < 0$ ist

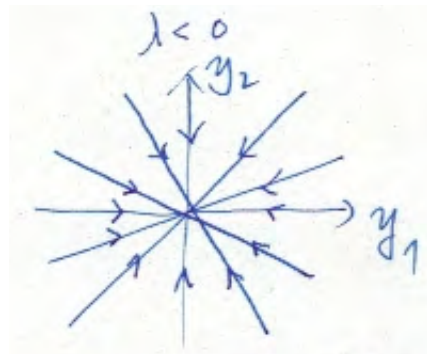


Abbildung 6.8: Stabile echte Knoten

Für $\lambda > 0$ ist

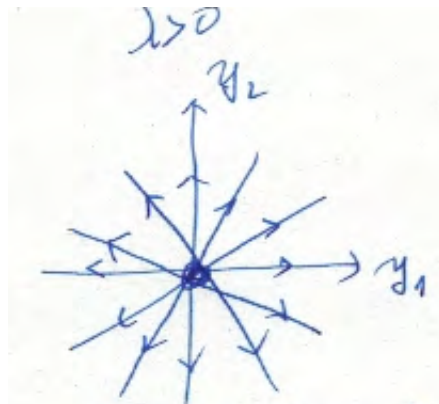


Abbildung 6.9: Instabile echte Knoten

2. $\lambda = \lambda_{1,2}$ ist nicht halbeinfach. Sei v der einzige Eigenvektor zum Eigenwert λ . Sei w die Lösung von der Gleichung $(A - \lambda I)w = 0$, wobei offenbar w linear unabhängig von v ist. Nun setzen wir $C = (v, w)$ und es gibt

$$AC = (\lambda v, \lambda w) = (\lambda v, \lambda w + v) = C \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Dann erfüllt $y = C^{-1}x$ die Gleichung

$$y' = C^{-1}ACy = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} y.$$

Daraus folgt die Lösungen

$$\begin{cases} y_1(t) = (k_1 + k_2 t)e^{\lambda t}, & \forall k_1 \in \mathbb{R} \\ y_2(t) = k_2 e^{\lambda t}, & \forall k_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Für $\lambda < 0$ ist

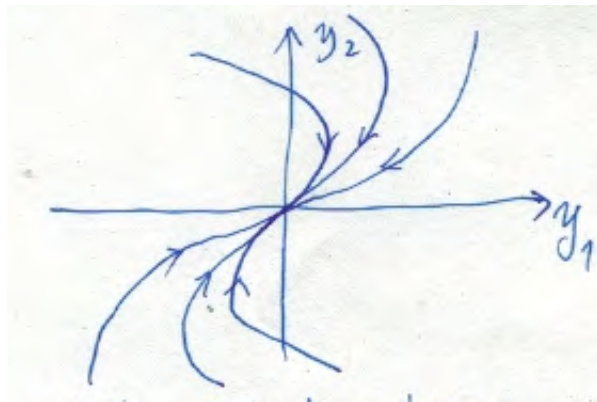


Abbildung 6.10: Stabile falsche Knoten

Für $\lambda > 0$ ist

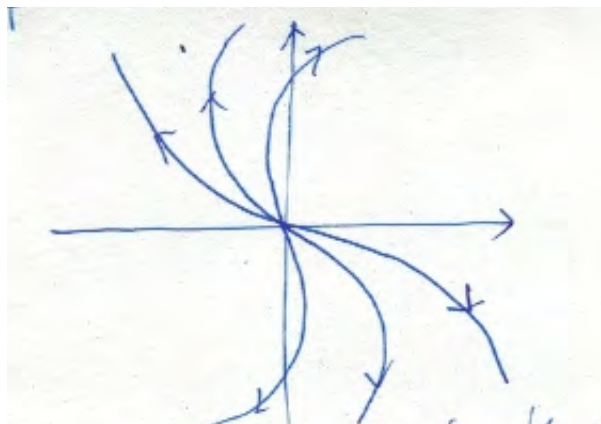


Abbildung 6.11: Instabile falsche Knoten

In dem Fall 3. $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$ ($q > \frac{p^2}{4}$)

Sei v_1, v_2 die Eigenvektoren zu λ_1, λ_2 , und $C = (v_1, v_2)$, dann erfüllt $u = C^{-1}x$ das komplexe System

$$u' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} u.$$

Nun betrachten wir den Reell und Imaginärteil von u . Seien $y_1 = \operatorname{Re} u_1$ und $y_2 = \operatorname{Im} u_1$, $\lambda = \sigma \pm i\rho$ mit $\rho > 0$. Dann

$$\begin{cases} y_1' = \sigma y_1 - \rho y_2 \\ y_2' = \sigma y_2 + \rho y_1. \end{cases}$$

Mit Hilfe von Polarkoordinaten $y_1 = r \cos \varphi$ und $y_2 = r \sin \varphi$ ist das System wie folgt geschrieben

$$\begin{cases} r' \cos \varphi - \varphi' r \sin \varphi = \sigma r \cos \varphi - \rho r \sin \varphi \\ r' \sin \varphi + \varphi' r \cos \varphi = \sigma r \sin \varphi + \rho r \cos \varphi \end{cases} \implies \begin{cases} r' = \sigma r \\ \varphi' = \rho. \end{cases}$$

Die Lösungsdarstellung ist

$$\begin{cases} r(t) = k_1 e^{\sigma t}, & \forall k_1 \in \mathbb{R} \\ \varphi(t) = \rho t + k_2, & \forall k_2 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Dann gibt es 3 Unterfälle

1. $\sigma < 0$ ($\rho > 0$)

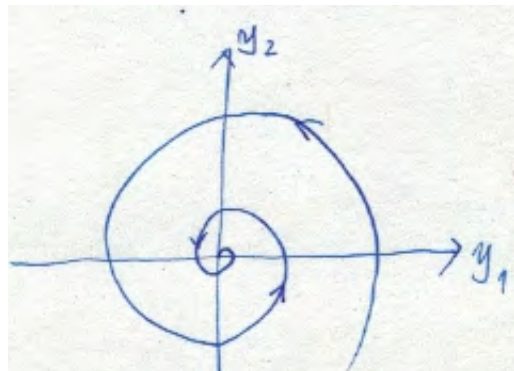


Abbildung 6.12: Stabile Spirale

2. $\sigma > 0$ ($\rho < 0$)

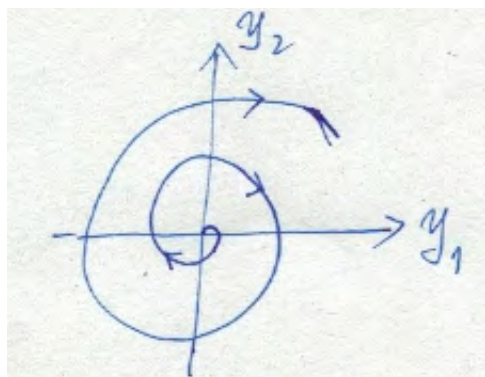


Abbildung 6.13: Instabile Spirale

3. $\sigma = 0$ ($p = 0$)

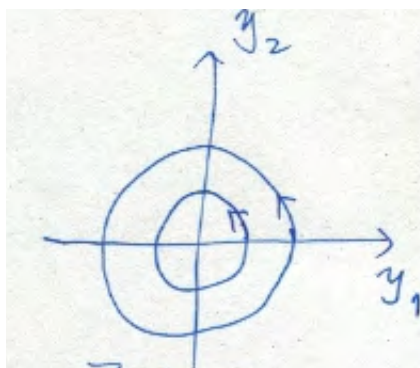


Abbildung 6.14: Zentrum (Periodische Lösung)

6.3 Stabilität linearer Systeme

Das lineare System lautet

$$x' = A(t)x + b(t) \quad (6.32)$$

wobei $A \in C([t_0, \infty); \mathbb{R}^{n \times n})$, $b \in C([t_0, \infty); \mathbb{R}^n)$.

Seien $x_*(t)$ und $x(t)$ Lösungen von (6.32), dann ist $y(t) = x(t) - x_*(t)$ eine Lösung vom homogenen System

$$y' = A(t)y. \quad (6.33)$$

Das heißt eine Lösung von (6.32) ist genau dann stabil (bzw. attraktiv), wenn die triviale Lösung vom homogenen System (6.33) stabil (bzw attraktiv) ist.

Das homogene System mit Anfangswert $y(t_0) = y_0$ hat die Lösung

$$y(t) = Y(t)Y^{-1}(t_0)y_0$$

wobei $Y(t)$ eine Fundamentalmatrix ist.

Satz 6.7 Sei $Y(t)$ eine Fundamentalmatrix, dann gilt

- $y_* = 0$ ist genau dann stabil für (6.33), wenn $\sup_{t \geq t_0} |Y(t)| < \infty$ gilt.
- $y_* = 0$ ist genau dann attraktiv für (6.33), wenn $\lim_{t \rightarrow \infty} |Y(t)| = 0$ gilt.

Insbesondere für lineares System fallen die Begriffe attraktiv und asymptotisch stabil zusammen.

Bemerkung 6.8 In diesem Satz wird die Operator Norm $|A|$ für eine $n \times n$ Matrix A verwendet, die durch $|A| = \sup_{v \in \mathbb{R}^n} \frac{|Av|}{|v|}$ gegeben ist. Da die alle Normen äquivalent sind, gelten die Ergebnisse auch für die andere Nomen von $Y(t)$.

Beweis:

- Sei $y_* = 0$ stabil, dann gilt:
 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ sodass $|y(t)| < \varepsilon$ für alle $|y_0| \leq \delta$ und $t \geq t_0$. Speziell für $\varepsilon = 1$ ist

$$|y(t)| = |Y(t)Y^{-1}(t_0)y_0| \leq 1, \quad \forall |y_0| \leq \delta, \forall t \geq t_0.$$

Um die Beschränkung von $|Y(t)|$ zu zeigen, muss man beweisen dass

$$\forall v \in \mathbb{R}^n, \exists M > 0 \text{ sodass } |Y(t)v| \leq M|v| \text{ gilt.}$$

Nun $\forall v \in \mathbb{R}^n$, für $y_0 = \delta \frac{Y(t_0)v}{|Y(t_0)v|}$ ist $|y_0| \leq \delta$ und dann folgt

$$\begin{aligned} |Y(t)v| &= \delta^{-1} |Y(t_0)v| \cdot |Y(t)Y^{-1}(t_0)y_0| \\ &\leq \delta^{-1} |Y(t_0)v| \leq \frac{|Y(t_0)|}{\delta} |v|. \end{aligned}$$

Daraus folgt $|Y(t)| \leq \frac{1}{\delta} |Y(t_0)|, \forall t \geq t_0$.

Umgekehrt sei $|Y(t)| \leq M$ gilt $\forall t \geq t_0$, dann $\forall \varepsilon > 0$, mit dem Wahl $\delta = \frac{\varepsilon}{M|Y^{-1}(t_0)|}$, ist

$$|y(t)| \leq |Y(t)| \cdot |Y^{-1}(t_0)| \cdot |y_0| \leq M|Y^{-1}(t_0)|\delta < \varepsilon.$$

Also ist $y_* = 0$ stabil.

- Sei $y_* = 0$ asymptotisch stabil. Dann existiert ein $\delta_0 > 0$ sodass $\forall |y_0| \leq \delta_0$ gilt

$$|y(t)| = |Y(t)T^{-1}(t_0)y_0| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

Daher folgt $\forall v \in \mathbb{R}^n$, erhalten wir mit $y_0 = \frac{\delta Y(t_0)v}{|Y(t_0)v|}$ dass

$$|Y(t)v| = \delta^{-1}|Y(t_0)v| \cdot |Y(t)Y^{-1}(t_0)y_0| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

Also ist

$$|Y(t)| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

Umgekehrt gelte $|Y(t)| \rightarrow 0$, für $t \rightarrow \infty$. Dann gilt $\forall |y_0| < \infty$,

$$|y(t)| \leq |Y(t)| \cdot |Y^{-1}(t_0)| \cdot |y_0| \rightarrow 0.$$

Offensichtlich existiert auch eine Konstante $M > 0$ sodass

$$|Y(t)| \leq M.$$

Und dann ist $y_* = 0$ stabil. Also ist 0 auch asymptotisch stabil.

■

Eine Folgerung für konstante Matrix lautet

Satz 6.9 Sei $A(t) \equiv A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dann gelten

1. $y_* = 0$ ist genau dann stabil, wenn $\operatorname{Re} \lambda_j \leq 0$ gilt für alle Eigenwerte λ_j von A , im Fall $\operatorname{Re} \lambda_j = 0$ ist λ_j halbeinfach.
2. $y_* = 0$ ist genau dann asymptotisch stabil, wenn $\operatorname{Re} \lambda_j < 0$ gilt für alle Eigenwerte gilt.

Bemerkung 6.10 Die Spektrumschranke ist durch

$$s(A) = \max\{\operatorname{Re} \lambda : \det(\lambda I - A) = 0\}$$

gegeben. y_* ist genau dann asymptotisch stabil wenn $s(A) < 0$ gilt, und $s(A) > 0$ impliziert Instabilität. Der Fall $s(A) = 0$, wenn es Eigenwerte auf die imaginären Achse gibt, erfordert weitere Informationen über diese, die über Stabilität und Instabilität entscheiden. Dieser Fall wird häufig marginal stabil genannt.

6.4 Das Prinzip der linearisierten Stabilität

Wir untersuchen die nichtlineare autonome Gleichung

$$x' = f(x) \quad \text{wobei} \quad f \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n). \quad (6.34)$$

Sei x_* ein Equilibrium von (6.34), welche äquivalent zu $f(x_*) = 0$ sei.

Unser Ziel ist es, die Stabilität dieser speziellen Lösung zu charakterisieren. Es sei $x = x(t)$ eine Lösung, man setze $u(t) = x(t) - x_*$, und erhalte

$$u'(t) = x'(t) = f(u(t) + x_*) - f(x_*) = f'(x_*)u(t) + r(u(t))$$

wobei

$$r(u) := f(u + x_*) - f(x_*) - f'(x_*)u = o(|u|) \text{ für } |u| \rightarrow 0.$$

Nun betrachten wir das äquivalente semilineare System

$$u' = Au + r(u), \text{ mit } A = f'(x_*), \quad (6.35)$$

und vergleichen dieses mit dem linearen System

$$u' = Au. \quad (6.36)$$

Satz 6.11 *Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, x_* ein Equilibrium von (6.34) und $A = f'(x_*)$. Dann gelten die folgenden Aussagen.*

- *Gilt $\operatorname{Re} \lambda_j < 0$ für alle Eigenwerte λ_j von A , so ist das Equilibrium x_* asymptotisch stabil für (6.34).*
- *Existiert ein Eigenwert λ_j mit $\operatorname{Re} \lambda_j > 0$, so ist x_* instabil für (6.34).*

Damit gilt für ein Equilibrium x_ von (6.34):*

- *Wenn $s(f'(x_*)) < 0$, dann ist x_* asymptotisch stabil.*
- *Wenn $s(f'(x_*)) > 0$, dann ist x_* instabil.*

Daher ist die Spektralschranke von $f'(x_)$ charakteristisch für die Stabilität vom Equilibrium x_* von (6.34).*

Beweis: Sei $u(0) = u_0$, Die Stetigdifferenzierbarkeit von f liefert:

$$\forall \rho > 0, \quad \exists \eta(\rho) > 0 : \quad |r(u)| \leq \rho|u|, \quad \text{falls } |u| \leq \eta.$$

Mit der Formel der Variation der Konstanten, kann man die Gleichung (6.35) im folgenden umschreiben

$$u(t) = e^{At}u_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}r(u(s))ds, \quad t \geq 0.$$

$\forall \varepsilon > 0$ müssen wir zeigen dass ein $\delta(\varepsilon) > 0$ existiert sodass

$$|u(t)| \leq \varepsilon \quad \text{falls } |u_0| \leq \delta, \quad \forall t \geq 0,$$

und $\lim_{t \rightarrow \infty} |u(t)| = 0$.

Da $\operatorname{Re} \lambda_j < 0$ für alle j , existiert eine Konstant $\omega > 0$ sodass $\omega < \min_{1 \leq j \leq n} |\operatorname{Re} \lambda_j|$.
Dann $\exists M \geq 1$ sodass gilt

$$|e^{At}| \leq M e^{-\omega t}.$$

Daraus folgt die Abschätzung

$$\begin{aligned} |u(t)| &\leq |e^{At}| \cdot |u_0| + \int_0^t |e^{A(t-s)}| \cdot |r(u(s))| ds \\ &\leq M e^{-\omega t} |u_0| + M \int_0^t e^{-\omega(t-s)} |r(u(s))| ds, \quad \forall t \geq 0. \end{aligned}$$

Wir fixieren $\rho > 0$ so dass $M\rho - \omega < 0$ gilt. Sei ferner $|u_0| \leq \delta < \eta$, solange $|u(s)| \leq \eta$, für $0 \leq s \leq t$, erhalten wir

$$|u(t)| \leq M e^{-\omega t} |u_0| + M \int_0^t e^{-\omega(t-s)} \rho |u(s)| ds.$$

Nun setzen wir $\phi(t) = e^{\omega t} |u(t)|$, es gilt

$$\phi(t) \leq M |u_0| + M \rho \int_0^t \phi(s) ds.$$

Dann aus dem Lemma von Gronwall erhalten wir

$$|u(t)| \leq e^{(M\rho - \omega)t} M |u_0|.$$

Aufgrund der Wahl von $\rho > 0$ gilt $M\rho - \omega < 0$, also ist

$$|u(t)| \leq |u_0| M \leq \delta M < \eta \quad \text{und} \quad |u(t)| < \varepsilon,$$

wobei $\delta = \frac{1}{2M} \min\{\eta, \varepsilon\}$. Ferner ist

$$|u(t)| \leq M e^{(M\rho - \omega)t} |u_0| \rightarrow 0, \quad \text{für } t \rightarrow \infty$$

Den Beweis für Instabilität von x_* im Fall $s(f'(x_*)) > 0$ lassen wir von diesem Skript weg. [1]. ■

Bemerkung 6.12 Satz 6.11 gibt keine Aussage im Fall $s(f'(x_*)) = 0$.

Beispiel 6.13 (Das mathematische Pendel) $u'' + \omega^2 \sin u = 0$.

Die obere Ruhelage, der Punkt $(\pi, 0)$, ist ein Equilibrium des System

$$\begin{aligned} u' &= v \\ v' &= -\omega^2 \sin u \end{aligned}$$

wobei $f(u, v) = \begin{pmatrix} v \\ -\omega^2 \sin u \end{pmatrix}$ mit $f'(u, v) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 \cos u & 0 \end{pmatrix}$. Dann an der Stelle $(\pi, 0)$ ist

$$A = f'(\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 & 0 \end{pmatrix}, \implies \lambda_{1,2} = \pm \omega \neq 0.$$

Das heißt dass A einen positiven Eigenwert hat. Dann nach dem Satz 6.11 ist die obere Ruhelage des mathematischen Pendels instabil.

Für die untere Ruhelage ergeben sich zwei imaginäre Eigenwerte von $f'(0, 0)$, also ist der Satz 6.11 nicht anwendbar. Die Stabilität der unteren Ruhelage werden wir später zeigen.

Beispiel 6.14 (Das Lotka-Volterra-Modell mit Sättigung)

$$\begin{cases} x' = ax - bxy - gx^2 & a, b, c, d, g > 0. \\ y' = -dy + cxy. \end{cases} \quad (6.37)$$

Die Equilibria von (6.37) sind die Lösungen von

$$\begin{cases} 0 = ax - bxy - gx^2 \\ 0 = -dy + cxy. \end{cases}$$

Es gibt drei Equilibria, $E_1 = (0, 0)$, $E_2 = (\frac{a}{g}, 0)$, und $E_3 = (\frac{d}{c}, \frac{a}{b} - \frac{gd}{ab})$, und mit

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} ax - bxy - gx^2 \\ -dy + cxy \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad f'(x, y) = \begin{pmatrix} a - by - 2gx & -bx \\ cy & -d + cx. \end{pmatrix}$$

Für das Equilibrium E_1 , ist $f'(0, 0) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -d. \end{pmatrix}$. Ihre Eigenwerte sind $\lambda_1 = a > 0$, $\lambda_2 = -d < 0$. Daher ist E_1 instabil.

Für das Equilibrium E_2 , ist $f'(\frac{a}{g}, 0) = \begin{pmatrix} -a & -\frac{ab}{g} \\ 0 & -d + \frac{ca}{g}. \end{pmatrix}$. Ihre Eigenwerte sind $\lambda_1 = -a < 0$, $\lambda_2 = -d + \frac{ca}{g} < 0$ genau dann, wenn $ac < dg$. Daher ist E_2 für $ac < dg$ asymptotisch stabil, um für $ac > dg$ instabil.

Für das Equilibrium E_3 , ist $f'(\frac{d}{c}, \frac{a}{b} - \frac{gd}{cb}) = \begin{pmatrix} -\frac{dg}{c} & -\frac{bd}{c} \\ \frac{ac-dg}{b} & 0 \end{pmatrix}$. Für diese Matrix, gilt $\mathbf{Sp}f'(E_3) = -\frac{dg}{c} < 0$ und $\det f'(E_3) = \frac{d}{c}(ac - dg)$. Dann für $ac > dg$, also sind die reelle Teile der beiden Eigenwerten negativ, ist das Koexistenzequilibrium E_3 biologisch sinnvoll, d. h. ist es asymptotisch stabil.

Bemerkung 6.15 In höheren Dimensionen sind die Nullstellen von $P(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ nicht immer leicht zugänglich, aber sind die Kriterien nützlich, die $\operatorname{Re} \lambda_j < 0$ für alle Nullstellen λ_j sicherstellen. Das bekannteste ist das Kriterium von Routh-Hurwitz, das nicht im diesen Skript weiter erklären wird.

6.5 Ljapunov Funktionen (Lyapunov functionals)

Ein wichtiges Konzept in der Stabilitätstheorie für die Differentialgleichungen ist die Ljapunov Funktion. In diesem Abschnitt betrachten wir das autonome System

$$x' = f(x) \quad (6.38)$$

wobei $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz stetig ist und $G \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge ist.

Definition 6.16 Eine Funktion $V \in C(G; \mathbb{R})$ heißt **Ljapunov Funktion** für (6.38) falls V entlang der Lösungen von (6.38) fallend ist, d.h. die Funktion $\varphi(t) := V(x(t))$ ist für jede beliebige Lösung $x(t)$ fallend in t .

V heißt **stricke Ljapunov Funktion** falls V entlang nichtkonstanter Lösungen von (6.38) streng fallend ist, d. h. die Funktion $\varphi(t) := V(x(t))$ ist für jede beliebige nichtkonstante Lösung $x(t)$ streng fallend in t .

Beispiel 6.17 Sei $V \in C^1(G; \mathbb{R})$, $x = x(t)$ eine Lösung von (6.38). Dann gilt

$$\varphi'(t) = \frac{d}{dt}V(x(t)) = \nabla V(x(t)) \cdot x'(t) = \nabla V(x(t)) \cdot f(x(t)).$$

Daraus folgt dass $V \in C^1(G; \mathbb{R})$ eine Ljapunov Funktion ist, wenn $\nabla V(x) \cdot f(x) < 0$ für alle $x \in G$ gilt. Und V ist eine stricke Ljapunov Funktion, wenn $\nabla V(x) \cdot f(x) < 0$ für alle $x \in G \setminus \mathcal{E}$, wobei $\mathcal{E} = \{x \in G : f(x) = 0\}$.

Beispiel 6.18 Seien $n = 1$ und $V(x)$ die Stammfunktion von $-f(x)$, dann gilt

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) = V'(x(t))x'(t) = -f(x(t))f(x(t)) \leq 0.$$

Dann ist V eine Ljapunov Funktion für die Gleichung.

Seien $n \geq 1$ und $\nabla V(x) = -f(x)$, dann gilt

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) = \nabla V(x(t)) \cdot x'(t) = -f(x(t)) \cdot f(x(t)) \leq 0,$$

und $f(x) = 0$ genau dann, wenn $x \in \mathcal{E}$.

Also für $n \geq 1$ ist V eine stricte Ljapunov Funktion.

Beispiel 6.19 (Das gedämpfte Pendel)

$$\begin{cases} u' = v \\ v' = -\alpha v - \omega^2 \sin u \end{cases} \quad \alpha \geq 0, \omega > 0$$

Wie definieren $V(u, v) = \frac{1}{2}v^2 + \omega^2(1 - \cos u)$, dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(u, v) &= \nabla V \cdot f = \begin{pmatrix} \omega^2 \sin u \\ v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v \\ -\alpha v - \omega^2 \sin u \end{pmatrix} \\ &= v\omega^2 \sin u - \alpha v^2 - v\omega^2 \sin u = -\alpha v^2 \leq 0, \quad \forall v \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

und $\frac{d}{dt}V(u, v) = -\alpha v^2 < 0$, $\forall v \in \mathbb{R} \setminus \{v = 0\}$. Für $v = 0$, erhalten wir $u \equiv \text{Const.}$, dann sind $(\text{Const.}, 0)$ Equilibria. Daraus folgt dass V eine stricte Ljapunov Funktion ist.

Beispiel 6.20 (Das Lotka Volterra System mit Sättigung)

$$\begin{cases} x' = ax - cxy - bx^2 \\ y' = -dy + gxy \end{cases} \quad a, b, c, d, g > 0.$$

Dieses System hat ein Equilibrium $(x_*, y_*) = (\frac{d}{g}, \frac{ag-bd}{cg})$. Wie definieren

$$V(x, y) = \alpha x_* \left(\frac{x}{x_*} - \log \frac{x}{x_*} \right) + \beta y_* \left(\frac{y}{y_*} - \log \frac{y}{y_*} \right), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(x(t), y(t)) &= \nabla V \cdot f = \begin{pmatrix} \alpha(1 - \frac{x_*}{x}) \\ \beta(1 - \frac{y_*}{y}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ax - cxy - bx^2 \\ -dy + gxy \end{pmatrix} \\ &= \alpha(x - x_*)(a - bx - cy) + \beta(y - y_*)(-d + gx) \\ &= -\alpha b(x - x_*)^2 + (\beta g - \alpha c)(y - y_*)(x - x_*), \end{aligned}$$

wobei $-d + gx = g(x - x_*)$ und $a - bx - cy = b(x_* - x) + c(y_* - y)$ verwendet wurden. Jetzt wählen wir $\alpha = g$ und $\beta = c$ und erhalten

$$\nabla V \cdot f = -gb(x - x_*)^2 \begin{cases} \leq 0 & \forall x, y \in \mathbb{R} \\ < 0 & \forall x \neq x_* \end{cases},$$

Für $x = x_*$ ist $y = y_*$ die eindeutige Lösung. Das bedeutet dass V ist eine strikte Ljapunov Funktion.

Proposition 6.21 Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ local Lipschitz stetig. Sei $V \in C(G; \mathbb{R})$ eine Ljapunov Funktion und es gelte

1. $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = \infty$, falls G unbeschränkt ist. (V ist koerziv).
2. $\lim_{|x| \rightarrow \partial G} V(x) = \infty$

Dann existiert jede Lösung von (6.38) global nach rechts. Ferner gelten

$$\sup_{t \geq 0} |x(t)| < \infty, \quad \text{und} \quad \inf_{t \geq 0} \text{dist}_{>0}(x(t), \partial G) > 0.$$

Beweis: Sei $x(t)$ eine Lösung mit maximalen Existenzintervall $[0, t_+)$. Dann ist $\varphi(t) := V(x(t))$ monoton fallend für $t \in [0, t_+)$.

Angenommen $x(t)$ ist nicht beschränkt, dann existiert eine Folge $t_n \rightarrow t_+$ mit $|x(t_n)| \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$. Daher aus der Voraussetzung $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = \infty$ folgt $V(x(t_n)) \rightarrow +\infty$, welche ein Widerspruch gegen der Monotonie von $\varphi(t)$.

Angenommen $\text{dist}(x(t_n), \partial G) \rightarrow 0$ für $t_n \rightarrow t_+$, dann folgt dass $V(x(t_n)) \rightarrow \infty$. Das ist auch ein Widerspruch gegen der Monotonieeigenschaft.

Dann nach dem Fortsetzungssatz ist $t_+ = \infty$. ■

Beispiel 6.22 (Das Lotka Volterra System mit Sättigung) Sei $G = (0, \infty) \times (0, \infty)$.

$$V(x, y) = gx_* \left(\frac{x}{x_*} - \log \frac{x}{x_*} \right) + cy_* \left(\frac{y}{y_*} - \log \frac{y}{y_*} \right)$$

ist eine Ljapunov Funktion. Nach dem Proposition 6.21, existiert die Lösungen global und sind vom Rand weg auch beschränkt.

Beispiel 6.23 (Das gedämpfte Pendel) Sei $G = \mathbb{R}^2$.

$$V(u, v) = \frac{1}{2}v^2 + \omega^2(1 - \cos u)$$

ist eine strikte Ljapunov Funktion, die die Bedingung in Proposition 6.21 nicht. Jedoch gilt $\forall u, \lim_{v \rightarrow \infty} V(u, v) = \infty$. Daraus folgt dass $|v|$ beschränkt sein muss, also $\exists M > 0$ sodass

$$|u'| = |v| \leq M, \quad \forall t \geq 0.$$

Daher nach der Gleichung $u'' + \alpha u' + \omega^2 \sin u = 0$ folgt

$$|u''| = |-\alpha v - \omega^2 \sin u| \leq \alpha M + \omega^2, \quad \forall t \geq 0.$$

Nun multiplizieren wir die Gleichung mit u' und integrieren die bzgl. t von 0 bis ∞ ,

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty u'' u' dt + \int_0^\infty \alpha |u'|^2 dt + \omega^2 \int_0^\infty u' \sin u dt = 0. \\ \implies & \alpha \int_0^\infty |u'|^2 dt \leq \left| \frac{1}{2} |u'|^2 \Big|_0^\infty \right| + \left| \omega^2 \cos u \Big|_0^\infty \right| \leq M + 2\omega^2. \end{aligned}$$

Da $u''(t)$ beschränkt ist und das Integral $\int_0^\infty |u'|^2 dt$ auch beschränkt ist, muss dann $v(t) = u'(t) \rightarrow 0$ als $t \rightarrow +\infty$.

Die Ljapunov Funktion V ist nichtnegativ und $V(u(t), v(t))$ monoton fallend in t , dann hat $V(u(t), v(t)) = \frac{1}{2}v^2(t) + \omega^2(1 - \cos u(t))$ einen Grenzwert $V_\infty \geq 0$ für $t \rightarrow \infty$. Dann aus $v(t) \rightarrow 0$ folgt $\cos u(t) \rightarrow c_\infty = 1 - \frac{V_\infty}{\omega^2} \in [-1, 1]$ für $t \rightarrow \infty$.

Dann $\forall \varepsilon > 0, \exists t_\varepsilon > 0$ sodass

$$|\cos u(t) - c_\infty| \leq \varepsilon, \quad \forall t \geq t_\varepsilon.$$

Da $\cos^{-1}([c_\infty - \varepsilon, c_\infty + \varepsilon])$ ist aus einer Vereinigung beschränkter disjunkter Intervalle, folgt dass $|u(t)| \leq C$ für $t \geq t_\varepsilon$.

Zusammenfassend sind die Lösungen u und v global beschränkt.

Lemma 6.24 *Sei $V \in C(G)$ eine stricte Ljapunov Funktion für $x' = f(x)$. Sei $x(t, x_0)$ eine nach rechts globale Lösung mit $x(t_k, x_0) \rightarrow x_\infty \in G$ für eine Folge $t_k \rightarrow \infty$. Dann gilt $x_\infty \in \mathcal{E}$, also ist x_∞ ein Equilibrium.*

Beweis: Die Funktion $\varphi(t) := V(x(t))$ ist fallend, daher existiert der Grenzwert

$$\varphi(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(t_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} V(x(t_k, x_0)) = V(x_\infty), \quad (6.39)$$

wobei in der letzte Gleichung wird die Stetigkeit von V verwendet.

Eindeutigkeit und stetige Abhängigkeit der Lösung implizieren für jedes $t \in J_\infty$ (J_∞ ist das maximal Existenzintervall von $x(\cdot, x_\infty)$),

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x(t + t_k, x_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} x(t, x(t_k, x_0)) = x(t, \lim_{k \rightarrow \infty} x(t_k, x_0)) = x(t, x_\infty).$$

Daraus folgt

$$\varphi(\infty) = V(x_\infty) = V(x(t, x_\infty)), \quad \forall t \in J_\infty,$$

Wenn die zweite Gleichung nicht gilt, da V strickt und $V(x(t + t_k, x_0)) \rightarrow V(x(t, x_\infty))$, muss gelten dass $V(x(t, x_\infty)) < V(x_\infty)$, $\forall t > t_0$, welche ein Widerspruch gegen (6.39) gibt.

Da V eine stricte Ljapunov Funktion ist, muss x_∞ daher ein Equilibrium sein. ■

Satz 6.25 Sei $V \in C(G; \mathbb{R})$ eine Ljapunov Funktion und x_* sei ein Equilibrium, dann gelten

1. Ist x_* ein striktes Minimum von V , so ist x_* stabil.
2. Ist x_* isoliert in $\mathcal{E} = f^{-1}(0)$ ein striktes Minimum von V und ist V eine strikte Ljapunov Funktion, so ist x_* asymptotisch stabil.

Beweis: Zu 1. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben, sodass $\overline{B_\varepsilon(x_*)} \subset G$ und $V(x) > V(x_*)$, $\forall x \in \overline{B_\varepsilon(x_*)} \setminus \{x_*\}$ gilt. Sei ferner

$$\eta := \min_{x \in \partial B_\varepsilon(x_*)} V(x).$$

Es ist offenbar dass $V(x_*) < \eta$ und $\exists \delta \in (0, \varepsilon)$ sodass $V(x) < \eta$ gilt für $x \in B_\delta(x_*)$.

Für $x(0) = x_0 \in B_\delta(x_*)$ gilt $V(x(t)) \leq V(x_0) < \eta$ solange die Lösung existiert, denn die Komposition $V \circ x$ ist eine monoton fallende Funktion in t .

Angenommen $\exists t_* > 0$ mit $x(t_*) \in \partial B_\varepsilon(x_*)$. Dann gilt $V(x(t_*)) \geq \eta$. Das ist ein Widerspruch von $V(x(t_*)) < \eta$. Das heißt dass die Lösung niemals den Rand der Kugel $\overline{B_\varepsilon(x_*)}$ erreichen kann. Daher existiert die Lösung global und es gilt $x(t) \in B_\varepsilon(x_*)$, $\forall t \geq 0$.

Zu 2. Seien $\delta > 0$ und $\varepsilon > 0$ wie im ersten Teil vom Beweis, mit zusätzlicher Bedingung, dass $\varepsilon > 0$ so klein ist dass x_* das einzige Equilibrium in $\overline{B_\varepsilon(x_*)}$ ist, denn x_* ist isoliert in $\mathcal{E}$.

Angenommen die Lösung $x = x(t; x_0)$ für $x_0 \in B_\delta(x_*)$, konvergiert nicht gegen das Equilibrium x_* . Dann $\exists \rho > 0$ und eine Folge t_n , die monoton wachsend gegen ∞ , so dass

$$|x(t_n; x_0) - x_*| < \rho, \quad \forall n.$$

Aus dem ersten Teil vom Beweis folgt, dass die Lösung $x(t; x_0)$, $\forall t \geq 0$ gleichmäßig beschränkt ist. Daraus folgt eine Teilfolge $t_{n_k} \rightarrow \infty$ existiert sodass der Grenzwert

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x(t_{n_k}; x_0) =: x_\infty \in \overline{B_\varepsilon(x_*)} \subset G$$

existiert. Nach dem Lemma 6.24 ist $x_\infty \in \mathcal{E}$ ein Equilibrium. Das ist ein Widerspruch, denn x_* ist das einzige Equilibrium in $\overline{B_\varepsilon(x_*)}$ ist. ■

Bemerkung 6.26 Die Methode heißt **direkt**, da keine Information der Matrix $f(x_*)$ gebracht wird.

Beispiel 6.27 [Bewegung eines Teilchens im Potentialfeld]

$$mx'' = -\nabla\phi(x), \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

wobei $x(t)$ die Position des Teilchens zur Zeit t ist und m dessen Masse ist. Man setze $q = x$ und $p = mx'$, so erhält man die Hamiltonische Formulierung

$$\begin{cases} q' = x' = \frac{p}{m} = \partial_p V(q, p) \\ p' = mx'' = -\nabla\phi(x) = -\nabla\phi(q) = -\partial_q V(q, p) \end{cases} \quad (6.40)$$

wobei

$$V(q, p) := m \frac{|x'|^2}{2} + \phi(x) = \frac{|p|^2}{m} + \phi(q)$$

die Gesamtenergie des Systems ist, und $\frac{|p|^2}{2m}$, $\phi(q)$ die kinetische Energie und potentielle Energie sind.

Sind $q = q(t)$ und $p = p(t)$ Lösungen von (6.40), so gilt

$$\frac{d}{dt} V(q(t), p(t)) = \nabla\phi(q) \cdot q' + \frac{1}{m} p \cdot p' = \frac{1}{m} \nabla\phi(q) \cdot p + \frac{1}{m} p \cdot (-\nabla\phi(q)) = 0,$$

welche als Energieerhaltung genannt wird. Somit ist V eine Ljapunov Funktion (das ist ein erstes Integral für (6.40)).

Die Equilibria (q_*, p_*) sind durch $p_* = 0$ und $\nabla\phi(q_*) = 0$ gegeben.

Da $\nabla\phi(q_*) = 0$ ist, ist $(q_*, 0)$ genau einen kritischen Punkt von V .

Wenn q_* ein striktes Minimum von ϕ ist, ist $(q_*, 0)$ ein striktes Minimum von V , denn es gilt

$$\det D^2 V = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & D^2\phi \end{pmatrix} = \frac{1}{m} \det D^2\phi.$$

Dann der Satz 6.25 liefert dass $(q_*, 0)$, die Ruhelage eines Teilchens, stabil ist. Aber die Ruhelage ist aufgrund der Energieerhaltung nicht asymptotisch stabil sein können.

Wenn q_* ein Sattelpunkt oder ein lokales Maximum von ϕ ist. Das heißt die Matrix $D^2\phi(q_*)$ mindestens einen negativen Eigenwert μ besitzt, dann hat die Matrix $\begin{pmatrix} \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & -D^2\phi(q_*) \end{pmatrix}$ einen positiven Eigenwert $\sqrt{-\frac{\mu}{m}}$. Nach dem Satz 6.11 ist $(q_*, 0)$ instabil.

Beispiel 6.28 (Das mathematische Pendel) (das ist ein spezial Fall von Beispiel 6.27)

$$x'' + \omega^2 \sin x = 0.$$

$V(x', x) = \frac{1}{2}|x'|^2 + \omega^2(1 - \cos x)$ ist eine Ljapunov Funktion. Ihre Gradient und Hesse-Matrix an der Stelle $(0, 0)$ sind

$$\nabla V(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D^2V(0, 0) = \begin{pmatrix} \omega^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} > 0. (\text{positiv definite}).$$

Dann nach dem Satz 6.25 ist die untere Ruhelage stabil. Die ist aber nicht asymptotisch stabil.

Für gedämpften Pendel,

$$x'' + \alpha x' + \omega^2 \sin x = 0,$$

ist $V(q, p) = \frac{1}{2}|p|^2 + \omega^2(1 - \cos q)$ eine strikte Ljapunov Funktion, weil

$$\frac{d}{dt}V(q(t), p(t)) = \nabla_q V \cdot q' + \nabla_p V \cdot p' = \omega^2 \sin q \cdot p + p \cdot (-\alpha p - \omega^2 \sin q) = -\alpha |p|^2 < 0.$$

Dann zeigt der Satz 6.25 dass $(0, 0)$ asymptotisch stabil ist.

Beispiel 6.29 (Das Lotka Volterra System with Sättigung) Übung.

Satz 6.30 Sei V eine strikte Ljapunov Funktion, $K \subset G$ kompakt, $x(t) = x(t, x_0)$ sei eine Lösung mit $\{x(t, x_0) : t \geq 0\} \subset K$ und es sei $\mathcal{E} := f^{-1}(0) \subset G$ die Equilibriumsmenge. Dann gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(x(t), \mathcal{E}) = 0.$$

Ist $\mathcal{E} \cap V^{-1}(\{\alpha\})$ diskret für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$, so existiert der Grenzwert

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) =: x_\infty \in \mathcal{E}.$$

Beweis: Die erste Aussage folgt aus Lemma 6.24.

Nun sei $\mathcal{E} \cap V^{-1}(\alpha)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, diskret. Angenommen der Grenzwert $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$ existiert nicht. Da die Lösungskurve in einer kompakten Menge K liegt, wählen wir die Folge $t_k \rightarrow \infty$ und $s_k \rightarrow \infty$ mit $t_k < s_k < t_{k+1}$, $\forall k \geq 1$ so dass

$$x(t_k) \rightarrow x_\infty \text{ und } x_{s_k} \rightarrow y_\infty \neq x_\infty, \text{ für } k \rightarrow \infty$$

Für $\alpha_\infty := V(x_\infty)$, sei $\varepsilon > 0$ so klein dass

$$\overline{B_\varepsilon(x_\infty)} \cap \mathcal{E} \cap V^{-1}(\alpha_\infty) = \{x_\infty\}, \quad (6.41)$$

denn $\mathcal{E} \cap V^{-1}(\alpha_\infty)$ ist diskret. Also $y_\infty \notin \overline{B_\varepsilon(x_\infty)}$, daher $\exists k_0$ sodass für $k \geq k_0$, $r_k \in (t_k, s_k)$ existiert mit $|x(r_k) - x_\infty| = \varepsilon$. Die Menge $\partial B_\varepsilon(x_\infty)$ ist kompakt, dann existiert eine konvergente Teilfolge von $x(r_k)$, die als $x(r_{k_l})$ bezeichnet, mit

$$x(r_{k_l}) \rightarrow z_\infty \text{ und } |z_\infty - x_\infty| = \varepsilon.$$

Dann nach dem Lemma 6.24 folgt $z_\infty \in \mathcal{E} \cap V^{-1}(\alpha_\infty)$. Das ist ein Widerspruch zu (6.41). ■

Beispiel 6.31 (Das gedämpfte Pendel) $V(q, p) = \frac{1}{2}|p|^2 + \omega^2(1 - \cos q)$ ist eine strikte Ljapunov Funktion.

Die Equilibriumsmenge $\mathcal{E}$ ist durch $\mathcal{E} = \{(k\pi, 0); k \in \mathbb{Z}\}$ gegeben, die offenbar diskret ist. Damit konvergiert jede Lösung dieses Systems gegen eine der Gleichgewichtslagen.

Beispiel 6.32 (Das Lotka Volterra System mit Sättigung) Die Menge der Equilibria $\mathcal{E}$ ist diskret. $V(x, y) = g(x - x_* \log \frac{x}{x_*}) + c(y - y_* \log \frac{y}{y_*})$ ist eine strikte Ljapunov Funktion für $(x, y) \in G \setminus \mathcal{E}$, wobei $G = (0, \infty) \times (0, \infty)$. Für Anfangswerte $x_0, y_0 > 0$ existieren die Lösungen global und sind vom Rand weg beschränkt. Dann es gilt

$$(x(t), y(t)) \rightarrow (x_*, y_*), \quad t \rightarrow \infty.$$

Die anderen Equilibria Liegen auf dem Rand von G , sie sind instabil.

Beispiel 6.33 (Teilchen im Potentialfeld mit Dämpfung)

$$x'' + g(x') + \nabla\phi(x) = 0,$$

wobei $g \in Lip_{loc}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ die Dämpfung beschreibt. $V(x, x') = \frac{1}{2}|x'|^2 + \phi(x)$ ist die Ljapunov Funktion, dann

$$\frac{d}{dt}V(x(t), x'(t)) = -g(x') \cdot x'.$$

Wenn g die Bedingung

$$g(y) \cdot y > 0, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

erfüllt, ist V eine strikte Ljapunov Funktion. Dann zeigt der Satz 6.25 die Konvergenz beschränkter Lösungen, sofern die kritischen Punkte von ϕ in jeder Niveaumenge $\phi^{-1}(\alpha)$ diskret sind. Man beachte auch dass mit Proposition 6.21 jede Lösung beschränkt ist, sofern ϕ koerziv ist.

6.6 Anwendung der Stabilitätstheorie zur Dynamik von Viren

Eine anfache Modellierung für Virale Infektion einer Zellkultur ist das folgende System

$$\begin{cases} V' = kI - \nu V, \\ Z' = \lambda - mZ + bV - rVZ \\ I' = rVZ - \mu I. \end{cases}$$

Hiermit sind $V(t)$ die Anzahl der freien Viren zur Zeit t , $Z(t)$ die der nicht infizierten Zellen und $I(t)$ die der infizierten Zellen. Im diesem Modell werden die folgenden Faktoren beschrieben.

- Nicht infizierte Zellen $Z(t)$ werden mit einer festen Rate $\lambda > 0$ bereitgestellt.
- Die freien Viren $V(t)$ infizieren die gesunden Zellen $Z(t)$ mit der Rate $rV(t)Z(t)$.
- Die Sterberaten der drei Klassen sind $-\nu V(t)$, $-mZ(t)$, $-\mu I(t)$.
- Die infizierte Zellen $I(t)$ produzieren neuen Viren mit Rate $kI(t) > 0$.
- Die Anwesenheit der Viren wird die Zellproduktion mit der Rate $bV(t)$ anregen.

Nach einer Skalierung können wir dieses System reduzieren nach

$$\begin{cases} x' = z - \xi x, \\ y' = \sigma - \rho y + \delta x - xy \\ z' = xy - z. \end{cases} \quad (6.42)$$

mit Anfangswerten $x(0) = x_0 \geq 0$, $y(0) = y_0 \geq 0$, und $z(0) = z_0 \geq 0$. $\xi, \sigma, \rho > 0$ und $\delta \geq 0$ sind gegeben.

Proposition 6.34 $\delta \in [0, \xi)$, dann hat das Problem (6.42) eine eindeutige, beschränkte, positive, globale Lösung nach rechts. Ferner gibt es nur die Equilibria

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (0, \frac{\sigma}{\rho}, 0) \quad \text{und} \quad (x_*, y_*, z_*) = (\frac{\sigma - \rho\xi}{\xi - \delta}, \xi, \xi \frac{\sigma - \rho\xi}{\xi - \delta}).$$

- Sei $\sigma < \xi\rho$, dann ist $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ das einzige positive Equilibrium und es ist asymptotisch stabil und die Lösung mit aller Anfangswerten konvergiert gegen $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$.
- Sei $\sigma > \xi\rho$, dann ist $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in \mathbb{R}_+^3$ instabil, und das strikte positive Equilibrium (x_*, y_*, z_*) asymptotisch stabil.

Bemerkung 6.35 Im Fall $\sigma > \xi\rho$, kann man auch zeigen dass die Lösungen mit Anfangswerten $x_0 + z_0 > 0$ gegen (x_*, y_*, z_*) konvergiert. Den Beweis lassen später zu machen.

Beweis: Nach dem Satz von Picard-Lindelöf, existiert eine eindeutige lokale Lösung. Ferner ist die Positivitätsbedingung in Definition 5.7 erfüllt, dann bleibt die Lösung positiv. Nun zeigen wir die Lösungen beschränkt sind. Dann ist die Lösung auch global nach dem Fortsetzungssatz.

Sei $u = \alpha x + y + z$ für ein $\alpha \in (0, 1)$. Dann erfüllt u die Gleichung,

$$u' = \sigma - (\alpha\xi - \delta)x - \rho y - (1 - \alpha)z.$$

Für $\kappa = \min\{\rho, 1 - \alpha, \xi - \frac{\delta}{\alpha}\} > 0$, erhalten wir die Ungleichung für u

$$u' \leq \sigma - \kappa u.$$

Daraus folgt $u(t) \leq e^{-\kappa t} u(0) + \int_0^t e^{-\kappa(t-s)} \sigma ds \leq u(0) + \frac{\sigma}{\kappa}$.

Es ist offenbar dass $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ und (x_*, y_*, z_*) sind Equilibra. Nun werden wir mit Hilfe vom Prinzip der linearisierten Stabilität die Stbilität der Equilibra zu zeigen. Sei

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} z - \xi x \\ \sigma - \rho y + \delta x - xy \\ xy - z \end{pmatrix}$$

mit der Jabobianmatrix

$$f'(x, y, z) = \begin{pmatrix} -\xi & 0 & 1 \\ \delta - y & -\rho - x & 0 \\ y & x & -1 \end{pmatrix}$$

Dann sind

$$f'(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \begin{pmatrix} -\xi & 0 & 1 \\ \delta - \frac{\sigma}{\rho} & -\rho & 0 \\ \frac{\sigma}{\rho} & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad f'(x_*, y_*, z_*) = \begin{pmatrix} -\xi & 0 & 1 \\ \delta - \xi & -\rho - \frac{\sigma - \rho\xi}{\xi - \delta} & 0 \\ \xi & \frac{\sigma - \rho\xi}{\xi - \delta} & -1 \end{pmatrix}$$

Die Matrix $f'(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ hat Eigenwerte

$$\lambda_1 = -\rho, \quad \lambda_{2,3} = -\frac{1+\xi}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(1+\xi)^2 - 4(\xi - \frac{\sigma}{\rho})}$$

Dann ist im Fall $\sigma < \xi\rho$, $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, das einzige Equilibrium in $\mathbb{R}_+^3$, asymptotisch stabil.

Für $\sigma > \xi\rho$ ist die Darstellung der Eigenwerten von $f'(x_*, y_*, z_*)$ nicht leicht zu rechnen. Wir werden die Stabilität mittels Ljapunov Funktion beweisen. Wir versuchen die Entropie Funktion $\phi_c(u) = u - c \ln u$ mit der Ableitung $\phi'_c(u) = u'(1 - \frac{c}{u})$ zu verwenden.

$$\begin{aligned} \phi'_{x_*}(x) &= (z - \xi x)(1 - \frac{x_*}{x}) = z - \frac{zx_*}{x} - \xi x + \xi x_* \\ \phi'_{y_*}(y) &= (\rho y_* - \delta x_* + x_* y_* - \rho y + \delta x - xy)(1 - \frac{y_*}{y}) \\ &= -\frac{\rho}{y}(y - y_*)^2 + \frac{\delta}{y}(x - x_*)(y - y_*) - xy + \xi x + \xi x_* - \frac{\xi^2 x_*}{y} \\ &= -(y - y_*)^2 \frac{\rho + x}{y} - (x - x_*)(y - y_*) \frac{\xi - \delta}{y} \\ \phi'_{z_*}(z) &= (xy - z)(1 - \frac{\xi x_*}{z}) = xy - z - \frac{\xi xy x_*}{z} + \xi x_*. \end{aligned}$$

Nun mit der Definition $\Psi(x, y, z) = \phi_{x_*}(x) + \phi_{y_*}(y) + \phi_{z_*}(z)$ erhalten wir

$$\Psi'(x, y, z) = -\frac{\rho}{y}(y - y_*)^2 + \frac{\delta}{y}(x - x_*)(y - y_*) - x_*\left(\frac{z}{x} + \frac{\xi^2}{y} + \frac{\xi xy}{z} - 3\xi\right).$$

Der erste Term ist negativ, der zweite Term kann man mit Hilfe vom $\phi'_{y_*}(y)$ korrigieren, und der dritte Term ist negativ, denn die Funktion $\varphi(a, b) = a + b + \frac{\xi^3}{ab} - 3\xi \geq 0$ für $(a, b) \in \mathbb{R}_+^2$, und $a = b = \xi$ ist ihre lokales Minimum. Also ist

$$\frac{z}{x} + \frac{\xi^2}{y} + \frac{\xi xy}{z} - 3\xi \geq 0, \text{ und } = 0 \Leftrightarrow z = x\xi, y = \xi.$$

Wir korrigieren die Funktion Ψ mit $\phi'_{y_*}(y)$

$$\Phi_*(x, y, z) = \Psi(x, y, z) + \frac{\delta}{\xi - \delta}\phi_{y_*}(y)$$

so dass

$$\Phi'_*(x(t), y(t), z(t)) = -\frac{\delta x + \xi \rho}{y(\xi - \delta)}(y - y_*)^2 - x_*\left(\frac{z}{x} + \frac{\xi^2}{y} + \frac{\xi xy}{z} - 3\xi\right) \leq 0.$$

Dann ist Φ_* eine Ljapunov Funktion auf $\mathbb{R}_+^3$. Und wenn $\Phi'_*(x(t), y(t), z(t)) = 0$, gilt $y = y_* = \xi$ und $z(t) = \xi x(t)$. Dann nach der Gleichung $y' = \sigma - \rho y + \delta x - xy$ erhalten wir dass $x(t) \equiv x_*$ und aus $x' = z - \xi x$ folgt $z(t) = \xi x_* = z_*$. Das zeigt dass Φ_* eine strikte Ljapunov Funktion ist.

Nach dem Satz ist (x_*, y_*, z_*) asymptotisch stabil. ■

7 Existenz von Peano

Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (7.43)$$

7.1 Existenzsatz von Peano

Satz 7.1 (Existenzsatz von Peano) Sei $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen, $f \in C(G; \mathbb{R}^n)$, $(t_0, x_0) \in G$. Dann $\exists \delta > 0$ und eine Funktion $x \in C^1(J_\delta; \mathbb{R}^n)$ mit $J_\delta := [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, sodass $(t, x(t)) \in G$, $\forall t \in J_\delta$ gilt, und $x(t)$ löst das Anfangswertproblem (7.43) im Intervall J_δ .

Beweis: Seien $\delta_0 > 0$ und $r > 0$ so fixiert, dass $J_{\delta_0} \times \overline{B_r(x_0)} \subset G$ gilt, und setze $M := \max\{|f(t, x)| : (t, x) \in J_{\delta_0} \times \overline{B_r(x_0)}\}$. Seien $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset C^1(G; \mathbb{R}^n)$ sodass

$$f_k \rightarrow f \quad \text{gleichmäßig in } (t, x) \in J_{\delta_0} \times \overline{B_r(x_0)},$$

und $|f_k(t, x)| \leq M + 1$, $\forall (t, x) \in J_{\delta_0} \times \overline{B_r(x_0)}$ und $\forall k \geq 1$. Dann nach dem Satz von Picard-Lindelöf besitzt das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} x' = f_k(t, x) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

für jedes k eine eindeutige Lösung $x_k \in C^1(J_\delta; \mathbb{R}^n)$ auf einem gemeinsamen Existenzintervall $J_\delta = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ und $|x_k(t) - x_0| \leq r$, wobei $\delta = \min\{\delta_0, \frac{r}{M+1}\}$. Daraus folgt

$$|x_k(t)| \leq r + |x_0|, \quad \forall (t, x) \in J_\delta \times \overline{B_r(x_0)}$$

und

$$|x'_k(t)| = |f_k(t, x_k)| \leq M + 1.$$

Der Satz von Ascoli-Arzelà liefert eine auf J_δ gleichmäßig konvergente Teilfolge $x_{k_m} \rightarrow x$. Die x_k erfüllt die Integralgleichungen

$$x_k(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f_k(s, x_k(s)) ds, \quad \forall t \in J_\delta,$$

dann nach dem Grenzübergang erhält man dass der Grenzwert x die folgende Gleichung erfüllt

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds, \quad \forall t \in J_\delta.$$

Daher ist $x(t)$ eine Lösung auf J_δ des Anfangswertproblems. ■

Satz 7.2 (Satz von Ascoli-Arzelà) Sei K ein kompakter metrischer Raum und V ein endlich dimensionaler Banachraum. Eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $C(K; V)$ besitzt eine konvergente Teilfolge, wenn

- $\forall x \in K$, die Folge $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt ist
- $\forall x \in K$, die Folge $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ gleichgradig stetig ist in x , d.h. $\forall x \in K$ und $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ (nicht von n abhängt) sodass für alle $x' \in B_\delta(x) \subset K$ und $n \in \mathbb{N}$ folgt $f_n(x') \in B_\varepsilon(f_n(x)) \subset V$.

7.2 Nichtfortsetzbare Lösungen

Lemma 7.3 (Zornsches Lemma (Auswahlaxiom)) Jede *halbgeordnete* Menge, in der jede Kette (d.h. jede total geordnete Teilmenge) eine obere Schranke hat, erhält mindestens ein **maximales Element**.

Die Halbordnungsrelation muss transitiv ($x \leq y, y \leq z \Rightarrow x \leq z$), reflexiv ($x \leq x$), und antisymmetrisch ($x \leq y, y \leq x \Rightarrow x = y$) sein.

Das Existenzintervall einer Lösung hängt aufgrund der Nichteindeutigkeit nicht nur von (t_0, x_0) ab, sondern auch von der Lösung selbst. Sei x_a die Lösung auf J_a mit $t_0 \in J_a$ gegeben. Wir betrachten die Menge

$$\mathcal{L} = \{(J, x) : x \in C^1(J; \mathbb{R}^n) \text{ Lösung von (7.43) auf } J \supset J_a, t_0 \in J_a, x|_{J_a} = x_a\}.$$

Wir führen eine Ordnungsrelation ein:

$$(J_1, x_1) \leq (J_2, x_2) \iff J_1 \subset J_2, x_2|_{J_1} = x_1.$$

Diese Relation ist eine halbe Ordnung (teilweise Ordnung) auf $\mathcal{L}$.

Ist nun $V \subset \mathcal{L}$ eine vollständig geordnete Teilmenge von $\mathcal{L}$, so ist das Supremum $\sup V := (J_*, x_*) \in \mathcal{L}$ durch

$$J_* = \cup_{(J_\nu, x_\nu) \in V} J_\nu, \quad x_* = x_\nu \text{ auf } J_\nu$$

gegeben. Das Zornsche Lemma lautet dann, ein maximales Element in $\mathcal{L}$ existiert. Sei (J_*, x_*) das maximale Element mit der Eigenschaft

$$x_* \text{ löst das (7.43) auf } J_*.$$

Solche Elemente (J_*, x_*) von $\mathcal{L}$ nennt man **nichtfortsetzbare** Lösungen.

Satz 7.4 (Fortsetzungssatz) Sei $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen, $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und $(t_0, x_0) \in G$. Dann existiert zu jeder auf einem Intervall J definierten Lösung $x(t)$ eine nichtfortsetzbare Lösung x_m mit $x_m|_J = x$. x_m ist auf einem Intervall (t_-, t_+) definiert, dessen rechter Endpunkt t_+ durch die folgende Alternativen charakterisiert ist

- $t_+ = \infty$, $x_m(t)$ ist eine globale Lösung nach rechts.
- $t_+ < \infty$ und $\liminf_{t \rightarrow t_+} \text{dist}((t, x_m(t)), \partial G) = 0$.
- $t_+ < \infty$, $\liminf_{t \rightarrow t_+} \text{dist}((t, x_m(t)), \partial G) > 0$, und $\lim_{t \rightarrow t_+} |x_m(t)| = \infty$.

Entsprechendes gilt für den linken Endpunkt t_- .

7.3 Stetige Abhängigkeit

Gegeben sei eine Lösung $x(t)$ auf ihrem maximalen Existenzintervall (t_-, t_+) . Sei

$$\text{graph}_J(x) := \{(t, x(t)) : t \in J\} \subset G, \text{ mit } J = [a, b] \subset (t_-, t_+), t_0 \in (a, b).$$

Definition 7.5 Die gegebene Lösung $x(t)$ heißt **stetig abhängig** von (t_0, x_0, f) falls es zu jedem Intervall $J = [a, b] \subset (t_-, t_+)$ mit $t_0 \in (a, b)$ eine kompakte Umgebung $K \subset G$ von $\text{graph}_J(x)$ gibt, so dass gilt: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ dass jede Lösung $y(t)$ von

$$\begin{cases} y' = g(t, y) \\ y(\tau_0) = y_0 \end{cases} \quad (\tau_0, y_0) \in K, \forall t \in [a, b] \quad (7.44)$$

existiert und der Ungleichung

$$|x(t) - y(t)| \leq \varepsilon, \quad \forall t \in [a, b]$$

genügt, sofern $g \in C(K; \mathbb{R}^n)$ und

$$|\tau_0 - t_0| \leq \delta, \quad |x_0 - y_0| \leq \delta, \quad \sup_{(s, z) \in K} |f(s, z) - g(s, z)| \leq \delta$$

erfüllt ist.

Satz 7.6 Sei $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen, $f \in C(G; \mathbb{R}^n)$ und $(t_0, x_0) \in G$. Die nichtfortsetzbare Lösung $x(t)$ von

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

sei **eindeutig** bestimmt. Dann hängt $x(t)$ stetig von den Daten (t_0, x_0, f) ab.

Beweis: Seien $y(t)$ eine Lösung von (7.44) und $x(t)$ die eindeutig bestimmte nichtfortsetzbare Lösung von (7.43). Dann folgt

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds, \\ y(t) &= y_0 + \int_{\tau_0}^t g(s, y(s)) ds. \end{aligned}$$

Nun definieren wir

$$K := \{(t, y) : t \in [a - \eta, b + \eta], |x(t) - y| \leq \alpha\},$$

wobei η klein ist sodass $[a - \eta, b + \eta] \subset (t_-, t_+)$ gilt. Offensichtlich ist K kompakt. Sei $|t_0 - \tau_0| \leq \delta$, $|x_0 - y_0| \leq \delta$, und $\max_{(t,x) \in K} |f(t, x) - g(t, x)| \leq \delta$ mit $\delta \leq \delta_0 := \min\{1, \frac{\eta}{2}, \frac{\alpha}{2}\}$. Dann ist $(\tau_0, y_0) \in K$ und

$$\max_{(t,x) \in K} |g(t, x)| \leq M + 1 := \max_{(t,x) \in K} |f(t, x)| + 1.$$

Für $\delta > 0$ klein genug, zeigen wir dass jede Lösung $y(t)$ auf $J = [a, b]$ hat ihren Graph in K , also $\text{graph}_J(y) \subset K$.

Angenommen existiere Folgen $\tau_{0,k} \rightarrow t_0$, $y_{0,k} \rightarrow x_0$, und $g_k \rightarrow f$ gleichmäßig auf K , und Lösungen $y_k(t)$ von

$$\begin{cases} y'_k = g_k(t, y_k) \\ y_k(\tau_{0,k}) = y_{0,k} \end{cases} \quad \text{auf } J_k = [a_k, b_k] \subset J,$$

sodass $(t, y_k(t)) \in K$, $\forall t \in J_k$ gilt und

$$|y_k(b_k) - x(b_k)| = \alpha \quad \text{oder} \quad |y_k(a_k) - x(a_k)| = \alpha$$

ist. O.B.d.A. nehmen wir den ersten Fall an, also $|y_k(b_k) - x(b_k)| = \alpha$. Sei

$$a_\infty = \limsup a_k, \quad b_\infty = \limsup b_k.$$

Wir können durch Übergang zu einer Teilfolge $b_k \rightarrow b_\infty$ annehmen. Die Lösungen y_k existieren auf den Intervallen $[\tau_{0,k} - \delta_1, \tau_{0,k} + \delta_1]$ mit $\delta_1 > 0$. Daher ist $a_\infty \leq t_0 - \delta_1 < t_0 + \delta_1 \leq b_\infty$.

$\forall \rho \in (0, \frac{b_\infty - a_\infty}{2})$ fixiert, gilt $J_\rho := [a_\infty + \rho, b_\infty - \rho] \subset J_k$. Die Funktionen y_k sind auf dem Intervall J_ρ beschränkt, und sind die Ableitungen auch beschränkt mit der Schranke $|y'_k| = |g_k(t, y)| \leq M + 1$. Nach dem Satz von Ascoli-Arzelà, gibt eine gleichmäßig konvergente Teilfolge $y_{k_m} \rightarrow y$. Dann die Grenzübergang in den Gleichungen zeigt

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0,$$

Dann ist $y \equiv x$ auf J_ρ , denn x ist die einzige Lösung.

Nun gilt mit $|x'|, |y'_{k_m}| \leq M + 1$ dass $\forall \varepsilon \ll 1$

$$\begin{aligned} \alpha &= |y_{k_m}(b_{k_m}) - x(b_{k_m})| \\ &\leq |y_{k_m}(b_{k_m}) - y_{k_m}(b_\infty - \rho)| + |y_{k_m}(b_\infty - \rho) - x(b_\infty - \rho)| + |x(b_\infty - \rho) - x(b_{k_m})| \\ &\leq 2(M + 1)(b_{k_m} - b_\infty + \rho) + \varepsilon, \quad \text{sofern } m \geq m(\varepsilon) \text{ hinreichend groß.} \end{aligned}$$

Wir wählen $\varepsilon < \frac{\alpha}{3}$, $\rho < \frac{\alpha}{6(M+1)}$ und $|b_{k_m} - b_\infty| < \frac{\alpha}{6(M+1)}$ für große m . Dann hat man ein Widerspruch.

Daraus folgt wenn $\delta \leq \delta_0$ hinreichend klein ist, existiert jede Lösung $y(t)$ von

$$y' = g(t, y), \quad y(\tau_0) = y_0$$

auf $J = [a, b]$ und erfüllt $\text{graph}_J(y) \subset K$.

Sei nun $\tau_{0,k} \rightarrow t_0$, $y_{0,k} \rightarrow x_0$, und $g_k \rightarrow f$ gleichmäßig auf K und seien $y_k(t)$ Lösungen von

$$y' = g_k(t, y), \quad y(\tau_{0,k}) = y_{0,k}, \quad \text{auf } [a, b].$$

Da sowohl die y_k als auch $y'_k = g_k(t, y_k)$ auf $[a, b]$ gleichmäßig beschränkt sind, also sie gleichgradig stetig, dann gibt es nach dem Satz von Ascoli Arzela eine gleichmäßig konvergente Teilfolge $y_{k_m} \rightarrow y$. Durch Grenzübergang in der Integralgleichung für y_{k_m} sieht man dass y das Problem (7.43) löst, also $y \equiv x$. Das heißt dass alle konvergente Teilfolge von y_k gegen das selben x konvergiert, dann folgt die gleichmäßige Konvergenz der ganzen Folge gegen die Lösung x . ■

Korollar 7.7 (Grenzwertformulierung der Stetigabhängigkeit) Sei $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen, $(t_0, x_0) \in G$, $f, f_k \in C(G; \mathbb{R}^n)$ und es sei $x(t)$ die eindeutige Lösung auf dem maximalen Existenzintervall (t_-, t_+) . Es gelte

$$t_{0,k} \rightarrow t_0, \quad x_{0,k} \rightarrow x_0,$$

und

$$f_k(t, x) \rightarrow f(t, x) \text{ gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von } G.$$

Sei $[a, b] \subset (t_-, t_+)$. Dann besitzt das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} x'_k = f_k(t, x_k) \\ x_k(t_{0,k}) = x_{0,k} \end{cases} \quad \forall t \in [a, b]$$

für hinreichend großes k mindestens eine Lösung auf $[a, b]$, und es gilt

$$x_k(t) \rightarrow x(t)$$

gleichmäßig auf $[a, b]$ für $k \rightarrow \infty$.