Sei beides nicht der Fall, dann $\exists M>0$ und eine Folge $t_n \nearrow t_+$ sodass (3)

$$|x(t_n)| \leq M \quad \text{und} \quad dist\left((t_n, x(t_n)), \partial G\right) \geq \frac{1}{M}, \quad \forall n,$$

Daher folgt nach dem Satz von Bolzano-Weierstrass eine konvergente Teilfolge

$$x(t_{n_k}) \longrightarrow x_* \quad \text{für } k \to \infty$$

daraus folgt
$$(t_{n_k}, x(t_{n_k})) \longrightarrow (t_+, x_*) \in G.$$

Sei δ ~~de~~ aus dem Satz von Picard-Lindellöf, die nur von ~~...~~ $\max|f|$ und M abhängt, Aus $t_k \to t_+$ folgt dass ~~Dann~~ $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ sodass $\forall k \geq k_0$, es gilt

$$t_{n_k} \geq t_+ - \frac{\delta}{2}.$$

Dann zu jedem $k \geq k_0$, das (AWP) ~~mit Anfangswert~~ $\begin{cases} x_k' = f(t, x_k) \\ x_k(t_{n_k}) = x(t_{n_k}) \end{cases}$

hat eine eindeutig bestimmte Lösung $x_k(t)$ auf $[t_{n_k}, t_{n_k}+\delta]$.

Da $x(t)$ die Lösung auf $[t_0, t_+)$ ist, wegen der Eindeutigkeit der Lösung, gilt dann $x(t) = x_k(t) \quad \forall\, t \in [t_{n_k}, t_+)$.

Weil $t_{n_k} + \delta \geq t_+ + \frac{\delta}{2}$ ist, ~~gilt~~ erhalten wir dass die Lösung ~~existiert auf~~ nach der Zeit t_+ auch existiert.

~~al~~ $x(t_+) = x_*$ und

<u>Satz</u> (Fortsetzungssatz). Sei $f: G \to \mathbb{R}^n$ stetig und lokal Lipschitz in x. Dann existiert die Lösung von (AWP) auf dem maximalen Intervall (t_-, t_+) mit $t_- < t_0 < t_+$, wobei t_+ (bzw t_-) ist durch die folgenden Alternaten charakterisiert.

- $t_+ = \infty$, $x(t)$ ist eine globale Lösung nach rechts
- $t_+ < \infty$ und $\liminf_{t \to t_+} dist((t, x(t)), \partial G) = 0$. d.h. die Lösung $x(t)$ kommt dem Rand von G beliebig nahe.
- $t_+ < \infty$ und $\lim_{t \to t^+} dist((t, x(t)), \partial G) > 0$ und $\lim_{t \to t_+} |x(t)| = \infty$.

Entsprechendes gilt für den linken Endpunkt t_-.

Differential und Integralungleichungen

Lemma (Gronwalls Inequality). Seien die Funktionen $\alpha, \beta, \varphi \in C[a,b]$ mit $\beta(t) \geq 0$, $\forall t \in [a,b]$, gegeben und es sei

$$0 \leq \varphi(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s)\varphi(s)\,ds, \quad \forall t \in [a,b]$$

Dann gilt $$\varphi(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s)\, e^{\int_s^t \beta(\tau)d\tau} \alpha(s)\,ds, \quad \forall t \in [a,b]$$

Speziell gilt für $\alpha(t) \equiv M$.

$$\varphi(t) \leq M\, e^{\int_a^t \beta(\tau)d\tau}, \quad t \in [a,b].$$

Beweis Wir setzen $\psi(t) = \int_a^t \beta(\tau)\varphi(\tau)d\tau$, $\forall t \in [a,b]$. Wegen der Stetigkeit von β and φ, ist ψ stetig differenzierbar auf $[a,b]$, und

$$\psi'(t) = \beta(t)\cdot\varphi(t)$$

Aus $\beta(t) \geq 0$ folgt $\psi'(t) = \beta(t)\varphi(t) \leq \beta(t)(\alpha(t) + \psi(t))$, $\forall t \in [a,b]$

Das ist eine lineare Ungleichung.

$$\psi'(t) - \beta(t)\psi(t) \leq \beta(t)\alpha(t).$$

Nun multiplizieren wir sie mit $e^{-\int_a^t \beta(\tau)d\tau}$ und erhalten

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-\int_a^t \beta(\tau)d\tau}\psi(t)\right) \leq \beta(t)\alpha(t)\, e^{-\int_a^t \beta(\tau)d\tau},$$

Integrieren dieser Ungleichung von a bis t ergibt.

$$e^{-\int_a^t \beta(\tau)d\tau}\psi(t) - \underbrace{e^{-\int_a^a \beta(\tau)d\tau}\psi(a)}_{=0} \leq \int_a^t \beta(s)\alpha(s)\, e^{-\int_a^s \beta(\tau)d\tau} ds.$$

Daraus folgt

$$\psi(t) \leq \int_a^t \beta(s)\,\alpha(s)\, e^{\int_s^t \beta(\tau)d\tau} ds.$$

und $$\varphi(t) \leq \alpha(t) + \psi(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s)\alpha(s)\, e^{\int_s^t \beta(\tau)d\tau} ds.$$

Für $\alpha(t) \equiv M$, nach dem Hauptsatz der I and D rechnenung erhält man

$$\varphi(t) \leq M \left(1 + \int_a^t (\beta(s) e^{\int_s^t \beta(\tau) d\tau}) ds\right)$$

$$= M \left(1 - e^{\int_s^t \beta(\tau) d\tau} \Big|_a^t\right) = M \cdot e^{\int_a^t \beta(\tau) d\tau}$$

∎

Lemma. (Comparison prinzip)

Sei $J = [t_0, t_1]$, $u: J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, und $\rho \in C^1(J; \mathbb{R})$ erfülle die Strikte Differential ungleichung

$$\begin{cases} \rho'(t) < u(t, \rho(t)) \\ \rho(t_0) < \varphi_0 . \end{cases}$$

Weiter sei $\varphi \in C^1(J; \mathbb{R})$ eine Lösung von

$$\begin{cases} \varphi' = u(t, \varphi) \\ \varphi(t_0) = \varphi_0 \end{cases}$$

Dann gilt $\rho(t) < \varphi(t)$, $\forall t \in J$.

Beweis. Angenommen es existiert ein $t_* \in [t_0, t_1]$ mit

$\rho(t) < \varphi(t) \quad \forall\, t \in [t_0, t_*)$ und

$\rho(t_*) = \varphi(t_*)$, (also t_* ist die erste Zeit ~~die~~ an der ρ und φ sich treffen)

Dann für hinreichend kleine $h > 0$, es gilt

$$\frac{\rho(t_*) - \rho(t_* - h)}{h} > \frac{\varphi(t_*) - \varphi(t_* - h)}{h}$$

Nun lassen ~~wir~~ $h \to 0+$ konvergiert, nach der Differenzierbarkeit gilt

$$\rho'(t_*) \geq \varphi'(t_*) = u(t_*, \varphi(t_*)) = u(t_*, \rho(t_*)).$$

Das ist ein Widerspruch. gegen der Annahme $\rho'(t_*) < u(t_*, \rho(t_*))$.

Bemerkung. Die Aussage gilt auch für ">". ∎

Beispiel.
$$\begin{cases} x' = t^2 + x^2 \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

Wir wollen die Lösung abschätzen.

Für $t < 1$, es gilt $t^2 + x^2 < 1 + x^2$. Daher nehemen wir das Vergleichspro

$$\begin{cases} y' = 1 + y^2 \\ y(0) = \tan \varepsilon \quad \text{mit } \varepsilon \ll 1. \end{cases}$$

Aus dem Lemma folgt

$$x(t) < y(t) = \tan(t + \varepsilon), \quad \forall\, 0 \le t < 1.$$

Ferner ist $t^2 + x^2 > t^2$, $\forall\, t \in (0,1]$. Mit dem Vergleichsproblem

$$\begin{cases} y' = t^2 \\ y(0) = \varepsilon \end{cases}$$

erhält man $x(t) > \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{3}\varepsilon^3 \quad \forall\, t \in [0,1]$, $\boxed{x(1) > \frac{1}{3}(1 - \varepsilon^3)}$

Für $t \ge 1$, ist $t^2 + x^2 \ge 1 + x^2$. Mit dem Vergleichsproblem

$$\begin{cases} y' = 1 + y^2 \\ y(1) = \frac{1}{3}(1 - \varepsilon^3) \end{cases}$$

erhält man $x(t) > \tan\left(t + \arctan\left(\frac{1}{3}(1-\varepsilon^3)\right) - 1\right)$

$$\forall\, 1 \le t \le \frac{\pi}{2} + 1 - \arctan\frac{1}{3}$$

Zusamenfassung

~~$0 \le t < 1$~~