Da K kompakt ist. es existieren Teilfolgen (t_{n_k}, x_{n_k}) von (t_n, x_n) bzw $(t_{n_k}, \bar{x}_{n_k})$ von $(t_n, \bar{x}_n)$ sodass.

$$(t_{n_k}, x_{n_k}) \xrightarrow{k\to\infty} (t_*, x_*) \in K$$

$$(t_{n_k}, \bar{x}_{n_k}) \xrightarrow{k\to\infty} (t_*, \bar{x}_*) \in K .$$

Da $f|_K \in C(K)$ ist, hat er ein Maximum $M = \max\limits_K |f(t,x)| < \infty$

Daraus folgt
$$|x_{n_k} - \bar{x}_{n_k}| < \frac{1}{n_k} \, | f(t_{n_k}, x_{n_k}) - f(t_{n_k}, \bar{x}_{n_k}) | \leq \frac{1}{n_k} 2M \xrightarrow{k\to\infty} 0 .$$

welche zeigt $x_* = \bar{x}_*$.

Nach der Voraussetzung dass f lokal Lipschitz in x ist, für $x = x_*$, $t = t_*$ es existiert $\alpha^* > 0$, $r^* > 0$ und $L(t^*, x^*) > 0$ sodass

$$| f(t,x) - f(t,\bar{x}) | \leq L(t^*, x^*) \, |x - \bar{x}| ,$$

gilt $\forall \; t \in [t^* - \alpha^*, t^* + \alpha^*]$, $x, \bar{x} \in \overline{B_{r^*}}(x^*)$

Da $\lim\limits_{k\to\infty} t_{n_k} = t^*$ und $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \lim\limits_{k\to\infty} \bar{x}_{n_k} = x^*$, es existiert $k_0 \in \mathbb{N}$ sodass $\forall k > k_0$ gilt

$$|t_{n_k} - t^*| \leq \frac{\alpha^*}{2} \;, \; |x_{n_k} - x^*| + |\bar{x}_{n_k} - x^*| \leq \frac{r^*}{2}$$

Daher erhalten wir die folgende Abschätzung

$$n_k \, |x_{n_k} - \bar{x}_{n_k}| < | f(t_{n_k}, x_{n_k}) - f(t_{n_k}, \bar{x}_{n_k}) | \leq L(t^*, x^*) \, |x_{n_k} - \bar{x}_{n_k}|$$

$$\Longrightarrow \; n_k < L(t^*, x^*) < \infty$$

Das ist ein Widerspruch. $\blacksquare$

<u>Satz</u> (Eindeutigkeit) Sei $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen und $f \in C(G; \mathbb{R}^n)$ lokal Lipschitz in x. Dann existiert höchstens eine Lösung von (AWP).

<u>Beweis</u> Seien $x, \bar{x} \in C^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ zwei Lösungen mit $(t, x(t)), (t, \bar{x}(t)) \in G$. Dann ist die Menge

$K = \{ (t, x(t)), (t, \bar{x}(t)) \in G, \ t \in [t_0, t_1] \} \subset G$ kompakt.

dann is $f|_K$ auf K global Lipschitz stetig. Sei L ihre Lip Konstante, also es gilt

$$|f(t,x) - f(t,\bar{x})| \leq L\,|x - \bar{x}|, \quad \forall (t,x), (t,\bar{x}) \in K$$

Nun schreiben wir (AWP) auf seine integrale Form um

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,ds$$

$$\bar{x}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \bar{x}(s))\,ds, \qquad \forall t \in [t_0, t_1]$$

Dann folgt die Abschätzung

$$\rho(t) \triangleq |x(t) - \bar{x}(t)| = \left| \int_{t_0}^{t} f(s, x(s)) - f(s, \bar{x}(s))\,ds \right|$$

$$\leq \int_{t_0}^{t} |f(s, x(s)) - f(s, \bar{x}(s))|\,ds \leq L \int_{t_0}^{t} |x(s) - \bar{x}(s)|\,ds$$

$$= L \cdot \int_{t_0}^{t} \rho(s)\,ds = L \int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(s-t_0)} \rho(s) \cdot e^{\alpha(s-t_0)}\,ds$$

$$\leq L \cdot \sup_{s \in [t_0, t_1]} \left(e^{-\alpha(s-t_0)} \rho(s) \right) \cdot \int_{t_0}^{t} e^{\alpha(s-t_0)}\,ds$$

$$= \frac{L}{\alpha} e^{\alpha(t-t_0)} \cdot \sup_{s \in [t_0, t_1]} \left(e^{-\alpha(s-t_0)} \rho(s) \right)$$

$$\Rightarrow \quad e^{-\alpha(t-t_0)} \rho(t) \leq \frac{L}{\alpha} \cdot \sup_{s \in [t_0, t_1]} \left(e^{-\alpha(s-t_0)} \rho(s) \right).$$

Nun wählen wir $\alpha = 2L$. es gilt,

$$\sup_{t \in [t_0, t_1]} \left(e^{-\alpha(t-t_0)} \rho(t) \right) \leq 0.$$

Daher folgt. $\rho(t) \equiv 0, \ \forall t \in [t_0, t_1]$. also $x(t) \equiv \bar{x}(t), \ \forall t \in [t_0, t_1]$.

Bemerkungen

Für Beispiel $\begin{cases} x' = \sqrt{|x|} \\ x(t) = 0 \end{cases}$, es hat keine eindeutige Lösung.

Die Funktion $\sqrt{x}$ in keiner Umgebung von $x=0$ Lipschitz stetig, deswegen erfüllt sich die Voraussetzung des eindeutigkeit Satzs nicht.

Erklärung für "$\sqrt{x}$ in der Nahe von $x=0$ nicht Lip stetig."

Nach dem Mittelwertsatz der Differenzen Rechnung, $\forall\ 0 < x < \bar{x}$, $\exists\ \xi \in (x, \bar{x})$ sodass

$$|\sqrt{x} - \sqrt{\bar{x}}| = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\xi}}|x - \bar{x}|.$$

Wenn x und $\bar{x}$ Nahe beim 0 legen, ~~geht~~ ist $\frac{1}{\sqrt{\xi}}$ nach oben unbeschränkt.

Satz (Banach Fixpunkt satz).

Es sei (M, d) ein vollständiger metrischer Raum und $T: M \to M$ eine Kontraktion, d.h. es existiert eine Konstante $q \in (0,1)$ sodass

$$d(Tx, Ty) \leq q\, d(x, y), \quad \forall x, y \in M$$

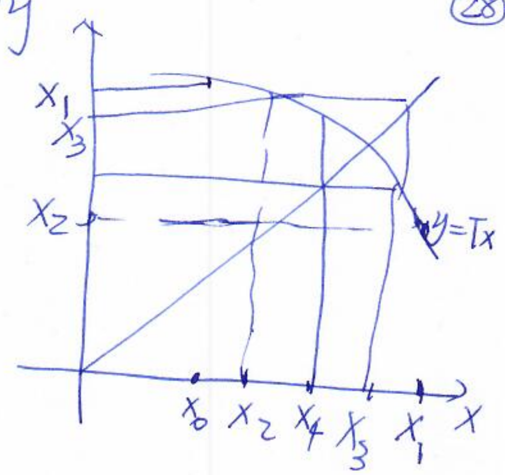
gilt. Dann besitzt T genau einen Fixpunkt $x_* \in M$, also $T(x_*) = x_*$.

Bemerkung. Viele Existenzsätze der Differentialgleichungen lassen sich in einem geeigneten Banachraum $\mathcal{B}$ in Form eine Gleichung $x = Tx$ schreiben. Eine Lösung von $x = Tx$ nennt man einen Fixpunkt von T.

Beweis Man benutzt ein Iterationsverfahren, der das Problem sukzessive approximiert. $\forall x_0 \in M$, man setzt

$$x_1 = Tx_0, \quad x_2 = Tx_1, \quad \cdots, \quad x_{n+1} = Tx_n, \quad \cdots$$

Dann $\overset{n<p}{\forall\, n, p \in \mathbb{N}}$, es gilt



$$d(x_{n+p}, x_n) \leq \sum_{j=1}^{p} d(x_{n+j}, x_{n+j-1})$$

$$\leq \sum_{j=2}^{p} q\, d(x_{n+j-1}, x_{n+j-2}) + d(x_{n+1}, x_n)$$

$$\leq \sum_{j=0}^{p} q^j\, d(x_{n+1}, x_n) \leq \sum_{j=0}^{p} q^{j+n} d(x_1, x_0)$$

$$= \frac{q^n(1-q^p)}{1-q} d(x_1, x_0) \leq \frac{q^n}{1-q} d(x_1, x_0) \xrightarrow{n\to\infty} 0, \quad 0<q<1.$$

Daher folgt dass die Folge $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ eine Cauchy Folge ist. Nach der Vollständigkeit, besitzt $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ ein Grenzwert, $\bar{x}$. d.h.

$$d(x_n - \bar{x}) \longrightarrow 0.$$

Nun lassen wir $n \to \infty$ auf dem Iterationsverfahren $T x_n = x_{n+1}$, erhalten wir dann

$$T\bar{x} = \bar{x}$$

$\boxed{\text{Frage: Warum is } T \text{ stetig}}$

~~Seien~~ Sind $\bar{x}$ und $\bar{y}$ zwei Fixpunkten, also $T\bar{x} = \bar{x}$, $T\bar{y} = \bar{y}$, dann es folgt nach der Kontraktion,

$$d(\bar{x}, \bar{y}) = d(T\bar{x}, T\bar{y}) \leq q\, d(\bar{x}, \bar{y})$$

$$\Rightarrow \quad (1-q)\, d(\bar{x}, \bar{y}) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \bar{x} = \bar{y}.$$

$\blacksquare$

Satz (Existenzsatz von Picard-Lindelöf).

Sei $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen, $f: G \to \mathbb{R}^n$ stetig und lokal Lipschitz in x. Dann existiert ein $\delta > 0$ und eine eindeutige diffbar Funktion. $x \in C^1(J_\delta; \mathbb{R}^n)$ mit $J_\delta = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, sodass $(t, x(t)) \in G$ für alle $t \in J_\delta$ gilt, und $x(t)$ löst des (AWP) im Interval J_δ.

Beweis. Wir zeigen die Existenz nach rechts, $[t_0, t_0+\delta]$, $\delta>0$.

(AWP) ist äquivalent zur Integralgleichung

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds.$$

Seien $\delta_0>0$ und $r>0$ so fixiert dass $J_{\delta_0} \times \overline{B_r(x_0)} \subset G$ ist,
wobei $\overline{B_r(x_0)} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x-x_0| \le r\}$ ist.

Um Banach Fixpunktsatz zu verwenden, konstruieren wir einen metrischen Raum (M, d) und eine Abbildung $T: M \to M$, die Kontraktion ist.

Schritt 1. Definition von M und T.

$$M = \{x \in C(J_\delta, \mathbb{R}^n) : x(t) \in \overline{B_r(x_0)},\ x(t_0) = x_0,\ t \in \underbrace{J_\delta}_{= [t_0, t_0+\delta]}\}$$

wobei $\delta \le \delta_0$ im weiteren festgelegt wird:

$\forall\, x \in M$, definieren wir.

$$T(x(t)) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds.$$

Schritt 2. Zeigen $TM \subset M$, (also T ist eine Abbildung nach M).

Aus der Stetigkeit von f und x, ist $T(x(t))$ auch stetig und

$\forall\, t \in J_\delta$, $$|T(x(t)) - x_0| = \left| \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds \right|$$
$$\le \int_{t_0}^{t} |f(s, x(s))|\, ds \le \max_{(t,x) \in J_\delta \times \overline{B_r(x_0)}} |f(t,x)| \cdot \delta$$

Dann für $\delta \le \min\{\delta_0, \frac{r}{m}\}$, erhalten wir dass $|T(x(t)) - x_0| \le r$, $\forall t \in J_\delta$

das heißt $T(x(t)) \in \overline{B_r(x_0)}$, $\forall\, t \in J_\delta$. also

$$TM \subset M.$$

Schritt 3. Kontraktionseigenschaft für T.

Auf M kann man verschiedene Metrik definieren. d_1, d_2 als Beispiele.