

$$\begin{aligned}
 x(t) - y(t) &= x_0 - y_0 + \int_{t_0}^t (f(s, x(s)) - g(s, y(s))) ds - \int_{t_0}^t g(s, y(s)) ds \quad (61) \\
 &= x_0 - y_0 - \int_{t_0}^t g(s, y(s)) ds + \int_{t_0}^t (f(s, x(s)) - f(s, y(s))) ds \\
 &\quad + \int_{t_0}^t (f(s, y(s)) - g(s, y(s))) ds.
 \end{aligned}$$

Sei kompakte Menge durch

$K := \{(t, y) : t \in [a-\eta, b+\eta], |x(t) - y| \leq \alpha\} \subset G$   
 gegeben, wobei  $\eta$  so klein dass  $[a-\eta, b+\eta] \subset (t_-, t_+)$  gilt.

Dann ist  $f|_K$  global Lip in  $x$  mit Lip konstant  $L > 0$ .

Für  $(t_0, y_0)$ , mit  $|t_0 - t_0|, |y_0 - x_0| \leq \delta < \min\{\alpha, \eta\}$ , ist es  
 offenbar dass  $(t_0, y_0) \in K$ .

Wir setzen  $M = \max_{(t,x) \in K} |f(t,x)|$ , dann für beliebige

Funktion  $g \in C(G; \mathbb{R}^n)$ , lip in  $x$ , sofern

$$\max_{(t,x) \in K} |f(t,x) - g(t,x)| \leq \delta$$

es gilt  $\max_{(t,x) \in K} |g(t,x)| \leq M + \delta$ .

Dann aus der Dreiecksungleichung folgt,  $\forall t \in [t_0, \min\{b, t_+\})$

mit  $(s, y(s)) \in K, \forall s \in [t_0, t]$ ,

$$\begin{aligned}
 |x(t) - y(t)| &\leq |x_0 - y_0| + (M + \delta) |t_0 - t_0| + L \int_{t_0}^t |x(s) - y(s)| ds \\
 &\quad + \delta (b - a + \eta)
 \end{aligned}$$

$$\leq C\delta + L \int_{t_0}^t |x(s) - y(s)| ds$$

wobei  $C = 1 + M + \delta + (b - a + \eta)$ .

Das Lemma von Gronwall liefert die Abschätzung



$$|x(t) - y(t)| \leq \delta C e^{L(t-t_0)}$$

(62)

so lange  $(t, y(t)) \in K$  gilt. Nun wählen wir  $\delta > 0$  hinreichend klein, sodass die rechte Seite kleiner als  $\alpha$  ist.

Angenommen es existiert ein erstes  $t_* \in [t_0, \min\{b, z_+\})$  mit

$$|x(t_*) - y(t_*)| = \alpha$$

Da  $(t_*, y(t_*)) \in K$  ist, nach der obigen Diskussion folgt  $|x(t_*) - y(t_*)| < \alpha$ . Das ist ein Widerspruch. Ebenso argumentiert man nach links.

Das heißt dass der Graph der Lösung  $y(t)$  die Menge  $K$  nicht verlassen kann.

Da die Lösung  $y(t)$  auf  $(\max\{a, z_-\}, \min\{b, z_+\})$  beschränkt ist, nach dem Fortsetzungssatz, ist  $z_- \leq a$  und  $z_+ \geq b$ , also  $y(t)$  ist auf  $[a, b]$  existiert und  $(t, y(t)) \in K$  erfüllt  $\forall t \in [a, b]$ .

Dann  $\forall \varepsilon > 0$ , hinreichend klein, wählen wir  $\delta > 0$  so klein dass die Abschätzung  $|x(t) - y(t)| \leq \delta C e^{L(t-t_0)} < \varepsilon$  gilt. Also ist die Stetigabhängigkeit bewiesen.  $\square$

### Bemerkung

Sei  $t_0 = \tau_0$ ,  $x_0 = y_0$ ,  $f \equiv g$ , dann nach der Stetigabhängigkeit ist  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $|x(t) - y(t)| \leq \varepsilon$  für  $\forall t \in J$ . Das heißt also die Lösung eindeutig ist.

### Korollar (Die Stetigabhängigkeit mit Grenzwert umschreiben)

Sei  $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$  offen,  $(t_0, x_0) \in G$ ,  $f, f_j : G \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig und lokal Lip in  $x$  und es sei  $x(t)$  die Lösung auf dem maximalen Existenzintervall  $(t_-, t_+)$ . Es gelte



$$t_j \rightarrow t_0, \quad x_{j,0} \rightarrow x_0 \quad \text{und}$$

$$f_j(t, x) \rightarrow f(t, x) \quad \text{gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von } G.$$

Sei  $[a, b] \subset (t_-, t_+)$ . Dann besitzt das AWP

$$\begin{cases} x_j' = f_j(t, x_j) & , \quad \forall t \in [a, b] \\ x_j(t_j) = x_{j,0} \end{cases}$$

für hinreichend großes  $j$  genau eine Lösung auf  $[a, b]$  und es gilt

$$x_j(t) \rightarrow x(t) \quad \text{gleichmäßig auf } [a, b].$$

Beispiel Lotka-Volterra Modell

$$\begin{cases} x' = ax - bxy \\ y' = -dy + cxy \\ x(0) = x_0 > 0, \quad y(0) = y_0 > 0 \end{cases} \quad a, b, c, d > 0$$

Gezeigt wird ist dass die globale Existenz und Eindeutigkeit der Lösung, Nach der Stetigabhängigkeit der Lösung ~~von~~ von den Daten  $(x_0, y_0, f)$ , ist die Lösung von  $(x_0, y_0, a, b, c, d)$  stetig abhängig.

### Anwendungen der Abhängigkeit

#### 1. Comparison Principle

Lemma Sei  $u: J \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und lokal Lip in  $x$ ,  $J = [t_0, t_1]$

$p \in C^1(J, \mathbb{R})$  erfüllt die Differentialungleichung

$$\begin{cases} p'(t) \leq u(t, p(t)) & \forall t \in J \\ p(t_0) \leq \varphi_0 \end{cases}$$

Sei  $\varphi \in C^1(J, \mathbb{R})$  die Lösung von

$$\begin{cases} \varphi' = u(t, \varphi) \\ \varphi(t_0) = \varphi_0 \end{cases}$$

Dann gilt  $p(t) \leq \varphi(t)$ ,  $\forall t \in J$ .



Beweis Wir setzen  $u_n(t, x) := u(t, x) + \frac{1}{n}$ .

Sei  $\varphi_n$  die Lösung von

$$\begin{cases} \varphi_n' = u_n(t, \varphi_n) \\ \varphi_n(t_0) = \varphi_0 + \frac{1}{n} \end{cases}$$

Dann gilt  $\begin{cases} p'(t) \leq u(t, p(t)) < u(t, p(t)) + \frac{1}{n} \\ p_0(t_0) \leq \varphi_0 < \varphi_0 + \frac{1}{n} \end{cases}$

Aus dem Lemm 2.4.2 folgt

$$p(t) < \varphi_n(t), \quad \forall t \in J \text{ und } \forall n \in \mathbb{N}.$$

Die Stetigabhängigkeit der Lösung  $\varphi$  von den Daten liefert

$$\varphi_n(t) \rightarrow \varphi(t) \quad \text{gleichmäßig auf } J$$

Dann nachdem Grenzübergang  $n \rightarrow \infty$  es gilt

$$p(t) \leq \varphi(t), \quad \forall t \in J. \quad \blacksquare$$

## 2. Positivität von Lösungen

Sei  $x \in C^1(J; \mathbb{R}^n)$  eine Lösung von  $x' = f(t, x)$ .

Wenn die Anfangswerte  $x_{k,0} \geq 0$ , unter welchen Bedingungen

~~wird~~ wird  $x_k(t) \stackrel{\forall t \in J}{\text{auch}}$  nicht negativ sein.

Positivitätsbedingung für  $f(t, x)$

$$(P) \quad \begin{cases} \text{Sei } x \in \mathbb{R}^n \text{ und } x_k \geq 0, \quad k=1, 2, \dots, n \\ \forall k=1, 2, \dots, n, \text{ mit } t \geq t_0 \text{ und } x_k=0 \text{ gilt } f_k(t, x) \geq 0 \end{cases}$$

(denn sonst wäre  $x_k(t) < 0$ , für  $t \in (t_0, t_0 + \delta)$  für  $0 < \delta < 1$ )

Def Funktionen  $f$ , die (P) erfüllen, heißen quasipositiv.