Impliziete DGL erster Ordnung

$$F(t, x, x') = 0 \quad \text{wobei } F \in C(\mathbb{R}^3)$$

Sei $(\bar{t}, \bar{x}, \bar{p}) \in D \subset \mathbb{R}^3$ so dass $F(\bar{t}, \bar{x}, \bar{p}) = 0$.

Wenn es eine Umgebung $U \subset D$ von Punkt $(\bar{t}, \bar{x}, \bar{p})$ gibt so dass ~~F(t,x)~~ $F(t, x, p) = 0$ eine eindeutige Lösung in der Form

$$p = f(t, x) \quad \text{mit eine stetigen } f \text{ in } U$$

hat, dann nennen wir $(\bar{t}, \bar{x}, \bar{p})$ einen regulären Linienelement.

Die nichtreguläre Linienelemente nennen wir singuläre, und ~~da~~ (t, x) ein singulärer Punkt, wenn es ein singuläres Linienelement (t, x, p) gibt.

Beispiel. $(x')^2 = 4t^2$, $\quad p = \pm 2t$

Linienelemente sind die Tripel $(t, x, \pm 2t)$

Lösungen sind die Parabeln $\quad x = c + t^2$

$$x = c - t^2$$

Nur für $t = 0$ ist eine Auflösung von $p^2 = 4t^2$ in explizierter Form unmöglich, d.h. singulär sind die Linienelemente $(0, x, 0)$ und Punkt, $(0, x)$, also die x-Achse.

Satz. Sind in einer Umgebung von $(\bar{t}, \bar{x}, \bar{p}) \in D$ die Funktionen $F(t, x, p)$ und $F_p(t, x, p)$ stetig und ist $F(\bar{t}, \bar{x}, \bar{p}) = 0$, $F_p(\bar{t}, \bar{x}, \bar{p}) \neq 0$, so ist $(\bar{t}, \bar{x}, \bar{p})$ ein reguläres Linienelement.

Den Beweis kann man mit Hilfe von dem Satz der implizieten Funktion durch geben.

Parameterdarstellung mit x' als Parameter

Beispiele.

- $t = g(x')$, $g \in C^1$. sei $x' = p$.

Hier ist $t(p) = g(p)$ gegeben, und die Lösungskurven sind

$$\begin{cases} t(p) = g(p) \\ x(p) = \int p \cdot g'(p)\, dp + C \end{cases}$$

wobei $p = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dp} \Big/ \frac{dt}{dp} \Rightarrow \frac{dx}{dp} = p \cdot \frac{dt}{dp}$ verwendet wird.

- $x = g(x')$, $g \in C^1$, sei $x' = p$

Lösungskurven
$$\begin{cases} x(p) = g(p) \\ t(p) = \int \frac{g'(p)}{p} dp + C \end{cases}$$

wobei $p = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dp} \Big/ \frac{dt}{dp} \overset{p \neq 0}{\Longrightarrow} \frac{dt}{dp} = \frac{\frac{dx}{dp}}{p}$ verwendet wird.

Ferner ist die Konstante Funktion $x = g(0)$ eine Lösung falls $0 \in J$.

- $x = t x' + g(x')$ $g \in C^1$ Clairaut - Differentilgleichung

Aus $x(p) = t(p) p + g(p)$ folgt

$$\frac{dx}{dp} = \frac{dt}{dp} \cdot p + t(p) + g'(p)$$

Dann mit $\frac{dx}{dp} = p \cdot \frac{dt}{dp}$ erhalten wir

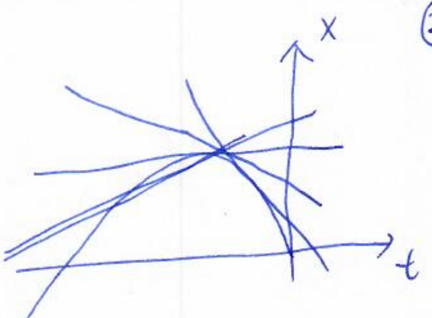
$$\begin{cases} t(p) = -g'(p) \\ x(p) = -p g'(p) + g(p) \end{cases}$$

Dies ist eine Lösung. Es ist offensichtlich dass alle Geraden $x = ct + g(c)$, $\forall c \in J$ auch Lösungen sind.

- $x = t x' + e^{x'}$

Lösungskurven sind die Geraden

$$x = ct + e^{c} \quad (c \in \mathbb{R})$$



und ihre Enveloppe

$$\begin{cases} t = -e^{p} \\ x = (1-p)e^{p}, \quad p \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow x = t(\ln(-t)-1), \quad t<0$$

- $x = t f(x') + g(x')$ <u>d'Alembert-DGL.</u>

$$\overset{x'=p}{\Rightarrow} \quad x(p) = t f(p) + g(p)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{dp} = \frac{dt}{dp} f(p) + t(p) f'(p) + g'(p).$$

$$\xrightarrow{\frac{dx}{dp} = p \cdot \frac{dt}{dp}} \quad \frac{dt}{dp} = \frac{t(p) f'(p) + g'(p)}{p - f(p)}$$

Es ist eine lineare GL für $t(p)$, die lösbar ist,

Daher wird $x(p)$ durch $x(p) = t(p) f(p) + g(p)$ ausgegeben.

<u>Zusamenfassung</u>. Für die implizierte erste Ordnung DGL.

$$F(t, x, x') = 0$$

kann man $x' = p$ als Parameter nennen, also $F(t(p), x(p), p) = 0$.

Nach der partiellen Ableitungen

$$F_t \cdot \frac{dt}{dp} + F_x \cdot \frac{dx}{dp} + F_p = 0$$

mit hilfe von $\frac{dx}{dp} = p \cdot \frac{dt}{dp}$ erhält man

$$\frac{dt}{dp} = -\frac{F_p}{F_t + pF_x} \quad \text{und} \quad \frac{dx}{dp} = -\frac{p \cdot F_p}{F_t + pF_x}$$

In viellen Fällen, kann man nur einer der obeigen Formen benutzen.

z.B. $x = G(t, x') \Rightarrow \frac{dt}{dp} = \frac{G_p(t,p)}{p - G_t(t,p)}$, $x(p) = G(t(p), p)$

$t = H(x, x') \Rightarrow \frac{dx}{dp} = \frac{pH_p(x,p)}{1 - pH_x(x,p)}$, $t(p) = H(x(p), p)$

Hilfsmittel aus der Funktionalanalysis

- Linearer Raum L (muss kennen) oder linearer Vektorraum oder Vektorraum.

  Unterraum von L.
  - Addition
  - Multiplikation

- Normierter Raum

Es sei L ein reeller oder komplexer Raum.

Eine für $a \in L$ erklärte, reellwertige Funktion $\|a\|$ wird „Norm" genannt, wenn sie die Eigenschaften

- $\|a\| \geq 0$ und $\|a\| = 0$ genau dann, wenn $a = 0$ ist
- $\|\lambda a\| = |\lambda| \cdot \|a\|$ Homogenität.
- $\|a+b\| \leq \|a\| + \|b\|$ Dreiecksungleichung

besitzt. Man sagt auch, der Raum L werde durch $\|\cdot\|$ „normiert".

- Metrischer Raum. (muss kennen). Abstand (oder eine Metrik $\rho(\cdot,\cdot)$).
  - $\rho(x,y) = \rho(y,x) > 0, \ \forall x \neq y$
  - $\rho(x,y) = 0$ genau dann, wenn $x = y$.
  - $\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y)$.

Bemerkung. Ein normierter Raum ist ein metrischer Raum. der Abstand $\rho(x,y)$ ist durch $\|x-y\|$ gegeben

- Konvergenz und Vollständigkeit (completeness)

$\|x_n - x\| \to 0$ als $n \to \infty$. schreiben auch $x_n \to x$

Ein linearer normierter Raum L heißt vollständig, wenn jede Cauchy-Folge von Elementen aus L einen Grenzwert in L besitzt.

Beispiele

- $\mathbb{R}^n$ — Der n dimensionale Euklidische Raum.

$a = (a_1, \cdots, a_n) = (a_i)$

lineare Raum: $a+b = (a_i + b_i)$, $\lambda a = (\lambda a_i)$

Normen.
- $\|a\|_e = \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}$ Eukid-Norm ($|a|_e$)
- $\|a\| = |a_1| + \cdots + |a_n|$ Summern-Norm ($|a|$)
- $\|a\| = \max_i |a_i|$ Maximum-Norm

- Es sei $K \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Menge und $C(K)$ die Menge aller auf K stetigen reellwertigen Funktionen $f(x) = f(x_1, \cdots, x_n)$.

Addition: $f + g \in C(K)$, $\forall f, g \in C(K)$

skalare Multiplikation $k = \lambda f$, $\forall f \in C(K)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

- Norm. $\|f\|_0 = \max\{|f(x)| : x \in K\}$, maximum Norm

~~oder~~ ~~$\|f\|_1 =$~~

der Gültigkeit der Normgesetze zu überzeugen.

oder eine gewichtete Maximum-Norm

$\|f\|_1 = \sup\{|f(x)| \cdot p(x) : x \in K\}$

wobei $p(x)$ eine fest vorgegebene Funktion mit $0 < \alpha \le p(x) \le \beta < +$ ist.

- <u>Banach Raum</u>

Ein Banachraum ist ein vollständiger linearer normierter Rau[m]

Äquivalente Normen. $\|\cdot\| \approx \|\cdot\|_1$

$$\Leftrightarrow \exists\, C > 0 \qquad C\|\cdot\| \le \|\cdot\|_1 \le \tfrac{1}{C}\|\cdot\|$$

- <u>Operatoren und Funktionale.</u> <u>Stetigkeit und Lipschitzbedingung.</u>

Es seien E, F zwei reelle (komplexe) normierte Räume.

$T: D \longrightarrow F \qquad (D \subset E)$ Funktionen (Operatoren)

im Fall $F = \mathbb{R}$ bzw. ($\mathbb{C}$), nennt man T Funktionale.

Ein operator $T: D \to F$ heißt <u>linear</u>, wenn D ein linearer Unterraum von E und

$$T(\lambda x + \mu y) = \lambda T(x) + \mu T(y) \quad \text{für } x, y \in D,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ oder } \mathbb{C}$$

Falls T linear ist, ~~Statt~~ $T(x)$ wird häufig einfach Tx geschrieben.

<u>Stetigkeit</u>. Man sagt, der Operator $T: D \to F$ sei stetig im Punkt $x_0 \in D$, wenn aus $x_n \in D$, $x_n \to x_0$ folgt $Tx_n \to Tx_0$.

Äquivalent ist die δ-ε-Formulierung:

Zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß aus $x \in D$,

$\|x - x_0\| < \delta$ folgt $\|Tx - Tx_0\| < \varepsilon$.

先不讲 <u>Lipschitz-Eigenschaft</u> (mit Lipschitzkonstante q). ~~Falls~~

$$\|T(x) - T(y)\| \le q\,\|x - y\| \qquad \forall\, x, y \in D.$$

Kapitel 2 Existenz und Eindeutigkeit

$$(AWP) \quad \begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 . \end{cases}$$

wobei $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen, $f: G \to \mathbb{R}^n$ stetig und $(t_0, x_0) \in G$.

Def. (Lipschitz-Eigenschaft).

- Eine stetige Funktion $f: G \to \mathbb{R}^n$ heißt lokal Lipschitz bzgl. x falls zu jedem Punkt $(t_1, x_1) \in G$ eine Kugel $\overline{B_r}(x_1)$ und ein $\alpha > 0$ mit $[t_1 - \alpha, t_1 + \alpha] \times \overline{B_r}(x_1) \subset G$, sowie eine Konstante $L = L(t_1, x_1) > 0$ existieren sodass gilt:

$$|f(t,x) - f(t,\bar{x})| \le L(t_1, x_1)\,|x - \bar{x}|, \quad \forall\, t \in [t_1-\alpha, t_1+\alpha] \text{ und } \forall\, x, \bar{x} \in \overline{B_r}(x_1).$$

- f heißt global Lipschitz bzgl. x, falls die Konstante $L > 0$ unabhängig von $(t_1, x_1) \in G$ ist, also

$$|f(t,x) - f(t,\bar{x})| \le L\,|x - \bar{x}|, \quad \forall\, (t,x), (t,\bar{x}) \in G.$$

Proposition Sei $f: G \to \mathbb{R}^n$ stetig und bzgl x stetig differenzierbar. Dann ist f lokal Lipschitz in x.

Beweis (Übung).

Proposition. Sei $f: G \to \mathbb{R}^n$ stetig, lokal Lipschitz in x und es sei $K \subset G$ kompakt, dann ist die Einschränkung $f|_K$ von f auf K global Lipschitz in x.

Beweis. Angenommen $f|_K$ ist nicht global Lipschitz, also $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists\, (t_n, x_n), (t_n, \bar{x}_n) \in K$ sodass es gilt

$$|f(t_n, x_n) - f(t_n, \bar{x}_n)| > n\,|x_n - \bar{x}_n|.$$