

$$\sum_{j=0}^l \binom{l}{j} P^{(j)}(\lambda_k) t^{l-j} e^{\lambda_k t} = 0, \quad \forall l \in \{0, \dots, \nu_k - 1\} \quad (57)$$

wobei  $\lambda_k$  eine  $\nu_k$  Vielfache Lösung von  $P(\lambda_k)$  benutzt wird.

Satz. Seien  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  die paarweise verschiedenen Nullstellen von  $P(\lambda)$ .  
Dann bildet

$$\textcircled{*} \{ e^{\lambda_j t}, t e^{\lambda_j t}, \dots, t^{\nu_j-1} e^{\lambda_j t}, \quad j=1, \dots, m \}$$

ein komplexes Fundamentalsystem, wobei  $\nu_j$  die Vielfachheit von  $\lambda_j$  sind.  
Sind alle Koeffizienten  $a_j$  reell, so ignoriere man alle Eigenwerte mit negativem Imaginärteil, und bilde Real und Imaginärteile der verbleibenden Lösungen. Diese bilden dann ein reelles FS.

Beweis. Sei  $z(t) = \sum_{j=1}^m g_j(t) e^{\lambda_j t}$   
eine Linearkombination der  $n$  Lösungen von  $\textcircled{*}$ , wobei  $g_j(t)$  Polynome der Ordnung kleiner als  $\nu_j - 1$  mit Koeffizienten aus  $\mathbb{C}$  sind.

Nun zeigen wir per vollständiger Induktion, dass  $z(t) \equiv 0$  genau dann gilt, wenn alle  $g_j(t) \equiv 0$  sind.

Offenbar ist  $m=1$  der Fall, Angenommen die Behauptung sei für ein  $m > 1$  bewiesen. Dann multiplizieren wir

$$0 \equiv \sum_{j=1}^m g_j(t) e^{\lambda_j t} + g_{\lambda_{m+1}}(t) e^{\lambda_{m+1} t} \quad \text{wobei } \lambda_{m+1} \neq \lambda_j$$

mit  $e^{-\lambda_{m+1} t}$  und erhalten

$$0 \equiv \sum_{j=1}^m g_j(t) e^{\mu_j t} + g_{\lambda_{m+1}}(t), \quad \text{mit } \mu_j = \lambda_j - \lambda_{m+1} \neq 0$$

Dann differenziert man diese GL so oft bis  $g_{\lambda_{m+1}}(t)$  verschwindet,

so ergibt sich

$$0 \equiv \sum_{j=1}^m r_j(t) e^{\mu_j t} \quad \text{mit gewissen Polynom } r_j(t).$$



Aus der Induktionsvoraussetzung folgt  $f_j(t) \equiv 0$ ,  $\forall j=1, \dots, m$ .

Dann müssen auch alle  $g_j(t) \equiv 0$  sein, denn nach der Produktregel gilt für ein Polynom  $p(t)$

$$\frac{d}{dt} (p(t) e^{\mu t}) = (p'(t) + \mu p(t)) e^{\mu t} = r(t) e^{\mu t}$$

wobei  $r(t)$  wieder ein Polynom ist mit der gleichen Ordnung wie  $p(t)$ .

Dann ist auch  $g(t) \equiv 0$  und das heißt dass wir die lineare Unabhängigkeit der  $n$  Lösungen.  $\blacksquare$

Beispiel a) Bernoulli - Balken.

$$x^{(4)} + x = f(t), \quad t \in J$$

Die Gleichung für Eigenwerten ist  $\lambda^4 + 1 = 0$ , und die Lösungen

sind  $\lambda = \pm \sqrt{\pm i} = \pm \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{i}{\sqrt{2}} \right)$

Dann ist ein reelles FS gegeben durch

$$\left\{ e^{\frac{t}{\sqrt{2}}} \cos\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right), e^{\frac{t}{\sqrt{2}}} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right), e^{-\frac{t}{\sqrt{2}}} \cos\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right), e^{-\frac{t}{\sqrt{2}}} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) \right\}$$

b) Das gefederte Doppelpendel

$$\begin{cases} x'' = -gx + k(y-x) \\ y'' = -gy + k(x-y) \end{cases}, \quad g, k > 0.$$

Bei dem Ansatz  $x(t) = a \cdot e^{\lambda t}$ ,  $y(t) = b e^{\lambda t}$ , erhalten wir.

$$((\lambda^2 + g + k)a - kb) e^{\lambda t} = 0$$

$$((\lambda^2 + g + k)b - ka) e^{\lambda t} = 0.$$

Dann lautet die Eigenwertgleichung

$$(\lambda^2 + g + k)^2 - k^2 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = -g - k \pm k = \begin{cases} -g \\ -g - 2k \end{cases}$$



Deswegen haben wir 4 imaginäre Eigenwerte,

$$\lambda_{1,3} = \pm i\sqrt{g}, \quad \lambda_{2,4} = \pm i\sqrt{g+2k}.$$

Um zugehörige Eigenvektoren  $[a, b]^T$  zu erhalten, wählen wir z.B.  $a=k$  und  $b = \lambda_j^2 + g + k$ , für  $j=1,2$ . Dann die beiden Lösungen sind

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\sqrt{g}t} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{i\sqrt{g+2k}t}$$

$\uparrow$  mit  $\begin{cases} a=k \\ b = \lambda_1^2 + g + k = k \end{cases}$ 
 $\uparrow$  mit  $\begin{cases} a=k \\ b = \lambda_2^2 + g - k = -k \end{cases}$

Daraus folgt das folgenden reellen Fundamentalsystem

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\sqrt{g}t), \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \sin(\sqrt{g}t), \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cos(\sqrt{g+2k}t), \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \sin(\sqrt{g+2k}t) \right\}$$

## Kapital 4. Stetige und differenzierbare Abhängigkeit

Es sei  $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$  offen,  $f \in C(G; \mathbb{R}^n)$  stetig und lokal Lip in  $x$ .

Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$(AWP) \quad \begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}, \quad (t_0, x_0) \in G$$

~~und~~ <sup>untersuchen</sup> die Abhängigkeit der Lösungen von den Daten, also von  $t_0, x_0$  und  $f$ . Die Abhängigkeit enthält Stetigkeit und Differenzierbarkeit.

### Stetige Abhängigkeit

Gegeben sei die Lösung  $x(t)$  auf ihrem maximalen Existenzintervall

~~(t\_-, t\_+)~~  $(t_-, t_+)$  und sei die Menge, für  $t_0 \in (a, b)$ ,

$$\text{graph}_J(x) = \left\{ (t, x(t)) \in G \mid t \in J = [a, b] \subset (t_-, t_+) \right\}.$$



Def. Die gegebene Lösung  $x(t)$  heißt stetig abhängig von  $(t_0, x_0, f)$ , falls es zu jedem kompakten Intervall  $J \subset (t_-, t_+)$  eine Umgebung  $K \subset G$  von  $\text{graph}_J(x)$  gibt sodass gilt:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ , dass die Lösung  $y(t)$  ~~des~~ von

$$\begin{cases} y' = g(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

$\forall t \in J$  existiert und die Ungleichung

$$|x(t) - y(t)| \leq \varepsilon, \quad \forall t \in J$$

genügt, sofern  $g: G \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig, lokal Lip in  $x$  und

$$|t_0 - t_0| \leq \delta, |x_0 - y_0| \leq \delta, \sup_{(s, z) \in K} |f(s, z) - g(s, z)| \leq \delta$$

erfüllt ist.

Satz. Sei  $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$  offen mit  $(t_0, x_0) \in G$ ,  $f \in C(G, \mathbb{R}^n)$  und lokal Lip in  $x$ , Dann hängt die Lösung  $x(t)$  stetig von den Daten  $(t_0, x_0, f)$  ab.

Beweis. Sei  $y(t)$  die Lösung des (AWP)s

$$\begin{cases} y' = g(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

auf ihrem maximalen Existenzintervall  $(t_-, t_+) \ni t_0$ .

Nun schreiben wir die AWP für  $x$  und  $y$  als <sup>die Integralformel</sup>

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds$$

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t g(s, y(s)) ds$$

Daraus folgt