alle Lösungen der homogenen DGL durchläuft.

Beispiel. $x' + x \sin t = \sin^3 t$

Es ist $\int_0^t \sin s \, ds = -\cos t + \tilde{C}$

und $z(t; c) = c \cdot e^{\cos t}$ die allgemeine Lösung der homogenen DGL.

$$\tilde{x}(t) = \int_0^t \sin^3 s \cdot e^{\cos t - \cos s} ds$$

$$\overset{\sigma = \cos s}{=} e^{\cos t} \int_1^{\cos t} (\sigma^2 - 1) e^{-\sigma} d\sigma$$

$$= -e^{\cos t} \left((\sigma^2 - 1) + 2\sigma + 2 \right) e^{-\sigma} \Big|_1^{\cos t}$$

$$= \sin^2 t - 2\cos t - 2 + 4 e^{\cos t - 1}.$$

eine Lösung der inhomogenen DGL. Dann ist die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL.

$$x(t, C) = \sin^2 t - 2\cos t - 2 + \boxed{4e^{\cos t - 1} + c \cdot e^{\cos t}}$$

$$C \cdot e^{\cos t}$$

Beispiel. Bernoulli-DGL. (kann in eine lineare DGL umgeformt werden)

$$x' + g(t) x + h(t) x^{\alpha} = 0$$

Wir multiplizieren $(1-\alpha) x^{-\alpha}$, so erhalten wir

$$(x^{1-\alpha})' + (1-\alpha) g(t) x^{1-\alpha} + (1-\alpha) h(t) = 0$$

Für das AWP.
$$\begin{cases} x' + \dfrac{x}{1+t} + (1+t) x^4 = 0 \\ x(0) = -1 \end{cases}$$

sei $z = \frac{1}{x^3}$, dann ~~gilt~~ erfüllt z die DGL

$$z' - \frac{3}{1+t} z - 3(1+t) = 0, \quad \text{mit } z(0) = -1.$$

Die Lösung ist $z(t) = (1+t)^2 (2t - 1)$

Zurück zu x gilt $x(t) = \dfrac{1}{(1+t)^{\frac{2}{3}} (2t-1)}$ $\quad -1 < t < \frac{1}{2}$

Beispiel. Riccati DGL.

$$x' + g(t)\,x + h(t)\,x^2 = k(t).$$

Seien g, h, k stetig. Im Falle $k(t)\equiv 0$, ist sie eine Bernoullische Gleichung. . . .

Falls $k(t)\not\equiv 0$. gibt es keine geschlossene Form.

~~Kennt~~ Aber wenn wir eine Lösung kennen, können wir sie lösen.

Seien x und ϕ zwei Lösungen, dann erfüllt $u = x - \phi$

die DGL $\quad u' + g(t)\,u + h(t)\,(x^2 - \phi^2) = 0$

$$\Rightarrow \quad u' + [\,g(t) + 2\phi(t)\,h(t)\,]\,u(t) + h(t)\,u^2 = 0$$

Das heißt dass u die Riccati DGL erfüllt, sei $z = \frac{1}{u}$

$$z' - [\,g(t) + 2\phi(t)\,h(t)\,]\,z - h(t) = 0.$$

Also kennt man eine Lösung ϕ, erhält man alle Lösungen in der

Form $\quad x(t) = \phi(t) + \frac{1}{z(t)}$,

z.B. Für die DGL. $\quad x' - x^2 - 2t\,x = 2$.

Eine spezielle Lösung ist $\phi(t) = -\frac{1}{t}$. dann erfüllt z die DGL

$$z' + z\left(2t - \frac{2}{t}\right) + 1 = 0$$

eine Lösung ist. $\quad \bar z(t) = -t^2 e^{-t^2}\int_0^t \frac{e^{s^2}}{s^2}\,ds$

$$= t - 2t^2 e^{-t^2}\int_0^t e^{s^2}\,ds$$

allgemeine Lösung für $z' + z\left(2t - \frac{2}{t}\right) = 0$ ist

$$z(t;c) = c\cdot t^2 e^{-t^2}$$

dann ist die allgemeine Lösung der Riccati DGL

$$x(t;C) = \phi(t) + \frac{1}{z(t;C) + \bar z} = \frac{-e^{-t^2}\left(C - 2\int_0^t e^{s^2}ds\right)}{1 + t\,e^{-t^2}\left(C - 2\int_0^t e^{s^2}ds\right)}$$

Exakte DGL

Eine DGL $x' = \varphi(t, x)$ sei in der Form geschrieben. $f(t,x)\,dt + g(t,x)\,dx = 0$. Falls eine Funktion $z(t, x)$ existiert so dass

$$f(t,x) = \frac{\partial z}{\partial t} \quad \text{und} \quad g(t,x) = \frac{\partial z}{\partial x} \text{ ist,}$$

dann nennt man die DGL eine vollständige oder exakte DGL.

$z(t, x) \equiv \text{const}$ ist die allgemeine Lösung in impliziter Form.

Eine Aussage aus Analysis: Für die gemischte zweite Ableitungen einer Funktion, $\frac{\partial^2 z}{\partial t \partial x}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial t}$, wenn die stetig sind, dann gilt

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial t}$$

Daher erhalten wir ein notwendiges Kriterium für exakt DGL.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial t}$$

z.B. $t\,dt + x\,dx = 0$

$$\Rightarrow z(t,x) = \int t\,dt = \frac{1}{2}t^2 + C(x)$$

andererseits

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}t^2\right) + C'(x) = 0 + C'(x) = x$$

$$\Rightarrow C(x) = \frac{1}{2}x^2 + c$$

also die Lösung ist durch die folgende Form (impliziert) gegeben

$$\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}x^2 = C$$

$$\Rightarrow t^2 + x^2 = C$$

Bemerkung. Normalerweise ist $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial t}$ nicht erfüllt. Man muss einen integrierenden Faktor finden.

Der integrierende Faktor

$$f(t,x)\,dt + g(t,x)\,dx = 0$$

mit $\frac{\partial f}{\partial x} \neq \frac{\partial g}{\partial t}$.

Wenn eine geeignete Funktion $\mu(t,x)$ existiert, so dass

$$\frac{\partial (f\mu)}{\partial x} = \frac{\partial (g\mu)}{\partial t}$$

dann nennen wir $\mu(t,x)$ einen integrierenden Faktor.

~~Dann~~ Es ist äquivalent dass

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} f - \frac{\partial \mu}{\partial t} g + \mu\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial t}\right) = 0$$

Die Hauptsache ist um eine μ zu finden.

das heißt man muss diese PDE lösen, hart!

Bemerkung. Eine μ ist genug. (Muss nicht ~~die~~ alle Lösungen von diesem PDE haben).

Beispiel. $$x' = -\frac{t x^3}{1+2t^2x^2}$$

äquivalant $$t x^3\,dt + (1+2t^2x^2)\,dx = 0$$

Die Gleichung für μ lautet

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} t x^3 - \frac{\partial \mu}{\partial t}\cdot(1+2t^2x^2) + \mu\underbrace{(3tx^2 - 4tx^2)}_{-tx^2} = 0$$

Wir versuchen, für $\frac{\partial \mu}{\partial t}=0$, eine Lösung zu finden, d.h. μ ist nur von x abhängt. Dann reduziert die Gleichung für μ auf

$$x\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu \Rightarrow \mu = C\cdot x$$

Da nur eine Lösung benötigt wird, nehmen wir einfach $C\equiv 1$. daher gilt

$$t x^4\,dt + (x + 2t^2x^3)\,dx = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = t x^4 \Rightarrow z = x^4\cdot\tfrac{1}{2}t^2 + C_1(x) = \tfrac{1}{2}t^2x^4 + C_1(x)$$

Entsprechend ergibt

$$\frac{\partial z}{\partial x} = x + 2t^2x^3 \Rightarrow z = \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}t^2x^4 + C_2(t)$$

~~Ver~~ Nun vergleichen wir die beide Lösungen für z, erhalten wir

$$C_2(t) = 0 \quad \text{und} \quad C_1(x) = \tfrac{1}{2}x^2 + C.$$

Damit lautet die allgemeine Lösung

$$x^2 + t^2x^4 = C. \qquad \blacksquare$$