Die Berechnung der Lösungen ist ~~gl~~ geleistet, wenn man die Jordan Form $B = C^{-1}AC$ und C gefunden hat.

Mann kann auch schrittweise vorgehen.

① Eigenwerte $\det(A - \lambda I) = 0$

② zu jedem Eigenwert λ die Eigenvektoren c_λ bestimmt, die zu den Lösung $y = c_\lambda e^{\lambda t}$ führen.

③ Dann werden nacheinander die Ansätze $(a, b \in \mathbb{C}^n)$

$$y = (a + ct)\, e^{\lambda t}, \quad y = (a + bt + ct^2)\, e^{\lambda t}, \ \dots$$

durchgerechnet, bis die Anzahl $m(\lambda)$ von Lösungen errecht ist. Beim Koeffizientenvergleich stellt sich heraus, daß der Koeffizient c der höchsten t-Potenz immer ein Eigenvektor ist.

Beispiel. $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = 4x - 3y \end{cases}$, $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$

Aus $\det(A - \lambda I) = \lambda^2 + 2\lambda + 1$. folgt $\lambda = -1$, mit algebraischen Vielfachheit $m(\lambda) = 2$ und

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Die hat nur eine linear unabhängige Eigenvektor

$$c_\lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \text{also } m_g(\lambda) = 1.$$

Die zugehörige Lösung lautet $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t}$.

Eine zweite, unabhängige von $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t}$ Lösung ergibt sich dann aus den Ansatz

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + bt \\ c + dt \end{pmatrix} e^{-t}.$$

Es ist
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b-a-bt \\ d-c-dt \end{pmatrix} e^{-t} = A \begin{pmatrix} a+bt \\ c+dt \end{pmatrix} e^{-t}$$

Beim Vergleich der Koeffizienten
$$A\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b-a \\ d-c \end{pmatrix}$$

also
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}. \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b-a \\ d-c \end{pmatrix}$$

Dann ~~ist~~ folgt $b=1$, $d=2$, $a=0$, $c=-1$.

Daraus ergibt es sich dass
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -1+2t \end{pmatrix} e^{-t}$$
die linear unabhängig von der ersten Löcung ist.

Lineare Gleichungen höcher Ordnung

Wir betrachten die Gleichung
$$x^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-1} a_j(t)\, x^{(j)} = b(t), \qquad a_j, b \in C(J),\ J=[t_0,t_1].$$
mit den Anfangswerten
$$x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = x_1, \quad \dots, \quad x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}.$$
Mittels der Transformation
$$u_k = x^{(k-1)}, \quad u_{k,0} = u_k(t_0) = x^{(k-1)}(t_0) = x_{k-1},$$
erhalten wir das äquivalente System erster Ordnung
$$u' = A(t)u + f(t)$$
wobei
$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad f(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b(t) \end{pmatrix}.$$

Dieses Anfangwertproblem besitzt genau eine globale Lösung auf J.
Deshalb ist das originale Problem für höhere Ordnung eindeutig lösbar.
Der Lösungsraum von höherer Ordung Gleichung $x^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-1} a_j(t) x^{(j)} = 0$
hat auch n Dimention.

Also sind $\{x_1(t), \cdots, x_n(t)\}$ Lösungen der homogenen Gleichung, ist die Wronski-Determinante durch die folgende Formel gegeben.

$$\varphi(t) = \det Y(t) = \det\{u^1(t), \cdots, u^n(t)\} = \det \begin{pmatrix} x_1(t) & \cdots & x_n(t) \\ x_1'(t) & \cdot & x_n'(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(n-1)}(t) & \cdot & x_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

wobei $u^j \in C^1(J)$, und $x_j \in C^n(J)$. weiterhin ist

$$\varphi(t) = \det Y(t) = \varphi(t_0)\, e^{\int_{t_0}^t Sp\, A(s)\, ds} = \varphi(t_0) \cdot e^{-\int_{t_0}^t a_{n-1}(s) ds}$$

Variation der Konstanten höherer Ordnunggleichung

$$x^{(n)} = \sum_{j=0}^{n-1} a_j(t)\ x^{(j)} = b(t) \qquad a_j, b \in C(J),\ J=[t_0, t_1].$$

Nach dem Superpositionsprinzip ist die allgemeine Lösung die Summe der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung und einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung.

Sei $\{x_1(t), \cdots, x_n(t)\}$ ein Fundamentalsystem für die homogene Gleichung, dann ist

$$Y(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) & \cdots & x_n(t) \\ x_1'(t) & \cdots & x_n'(t) \\ - & & - \\ x_1^{(n-1)}(t) & \cdots & x_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

ein FS für das äquivalente System erster Ordnung. Daher ist

$$u_*(t) = Y(t) \int_{t_0}^t Y^{-1}(s)\, f(s) ds$$

eine spezielle Lösung von $u' = A(t) u + f(t)$, wobei

$\forall\ 1 \le i \le n$, ist $\left(Y^{-1}(s) f(s)\right)_i = \dfrac{\det Y_i(s)}{\det Y(s)}$ (Cramer's rule)

$$\text{mit} \quad Y_i(s) = \begin{pmatrix} x_1(s) & \vdots & x_{i-1}(s) & 0 & x_{i+1}(s) & \vdots & x_n(s) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & 0 & & & \\ x_1^{(n-1)}(s) & \vdots & x_{i-1}^{(n-1)}(s) & b(s) & x_{i+1}^{(n-1)}(s) & \vdots & x_n^{(n-1)}(s) \end{pmatrix}$$

mit $\det Y(s) = \varphi(s)$

und $\det Y_i(s) = b(s) \cdot (-1)^{n+i} \det \begin{bmatrix} x_1(s) & \vdots & x_{i-1}(s) & x_{i+1}(s) & & x_n(s) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{(n-2)}(s) & \vdots & x_{i-1}^{(n-2)}(s) & x_{i+1}^{(n-2)}(s) & \vdots & x_n^{(n-2)}(s) \end{bmatrix}$

$$= b(s) \cdot \varphi_i(s).$$

Daher ist die spezielle Lösung

$$u_*(t) = Y(t) \cdot \int_{t_0}^{t} b(s) \begin{pmatrix} \frac{\varphi_1(s)}{\varphi(s)} \\ \vdots \\ \frac{\varphi_n(s)}{\varphi(s)} \end{pmatrix} ds$$

$$\text{und} \quad x_*(t) = \sum_{i=1}^{n} x_i(t) \int_{t_0}^{t} b(s) \frac{\varphi_i(s)}{\varphi(s)}\, ds.$$

Z.B. Im Fall $n=2$, ist die Wronski-Determinante

$$\varphi(t) = x_1(t)\, x_2'(t) - x_2(t)\, x_1'(t),$$

$$\varphi_1(t) = -x_2(t)$$

$$\varphi_2(t) = x_1(t).$$

$$\text{und} \quad x_*(t) = -x_1(t) \int_{t_0}^{t} \frac{x_2(s)\, b(s)}{\varphi(s)} ds + x_2(t) \int_{t_0}^{t} \frac{x_1(s)\, b(s)}{\varphi(s)} ds.$$

<u>Beispiel</u>. $x'' + x = \sin t \qquad t_0 = 0.$

$x_1(t) = \cos t$, $x_2(t) = \sin t$ sind offenbar Lösungen der homogenen DGL. Dann ist $Y(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$ eine FM und $\det Y(t) = 1$.

$\varphi_1(t) = -\sin t$, $\varphi_2(t) = \cos t$.

Dann erhalten wir eine spezielle Lösung

$$x_*(t) = -\cos t \int_0^t \sin^2 s\, ds + \sin t \int_0^t \sin s \cdot \cos s\, ds = \frac{1}{2}\left(\sin t - t\cos t\right).$$

DGL höherer Ordnung mit den konstanten Koeffizienten

Sei $a_j(t) \equiv a_j \in \mathbb{R}$ und $a_n = 1$.

Exponentialansatz $\quad x(t) = e^{\lambda t}, \quad \lambda \in \mathbb{C}$

Dann löst $x(t) = e^{\lambda t}$ die DGL genau dann, wenn λ eine Nullstelle des Charakteristischen Polynoms

$$P(\lambda) = \sum_{j=0}^{n} a_j \lambda^j \quad \text{ist}.$$

Prop. Ist λ_k eine Nullstelle des Polynoms $P(\lambda) = \sum_{j=0}^{n} a_j \lambda^j$ von der Vielfachheit ν_k, so bilden $\{e^{\lambda_k t}, t e^{\lambda_k t}, \dots, t^{\nu_k - 1} e^{\lambda_k t}\}$ linear unabhängige Lösungen von $x^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-1} a_j x^{(j)} = 0$.

Beweis die Monone t^j sind linear unabhängig, deswegen sind $\{e^{\lambda_k t}, t e^{\lambda_k t}, \dots, t^{\nu_k - 1} e^{\lambda_k t}\}$ auch linear unabhängig.

Dann bleibt zu zeigen, dass eine Funktion der Form

$$y(t) = t^l e^{\lambda_k t}, \qquad l \in \{0, \dots, \nu_k - 1\}$$

eine Lösung ist. Nach ~~derekter~~ Rechnung ist

$$\partial_t^j \left(t^l e^{\lambda t}\right) = \partial_t^j \partial_\lambda^l (e^{\lambda t}) = \partial_\lambda^l \partial_t^j (e^{\lambda t}) = \partial_\lambda^l (\lambda^j e^{\lambda t})$$

Dann ist $\quad y^{(j)}(t) = \partial_\lambda^l (\lambda^j e^{\lambda t}) \Big|_{\lambda = \lambda_k}$.

Nun setzen wir dies in die GL ein, es gilt

$$\sum_{j=0}^{n} a_j y^{(j)}(t) = \sum_{j=0}^{n} a_j \, \partial_\lambda^l (\lambda^j e^{\lambda t}) \Big|_{\lambda=\lambda_k}$$

$$= \partial_\lambda^l \left(\left(\sum_{j=0}^{n} a_j \lambda^j \right) e^{\lambda t} \right) \Big|_{\lambda=\lambda_k} = \partial_\lambda^l \left(P(\lambda) e^{\lambda t} \right) \Big|_{\lambda=\lambda_k}$$

Nach der Formel von Leibniz, ergibt es sich