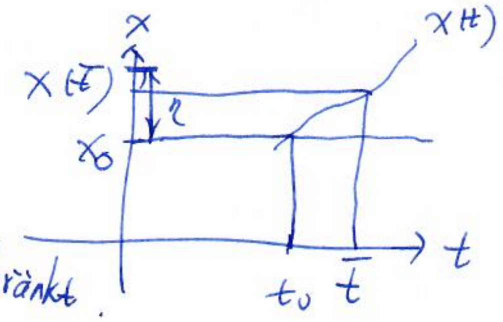
Beweis. Wir nehman an, es existiere eine Lösung $x(t)$, die nicht identisch gleich x_0 ist. OBdA. $\exists\ t_0 < \bar{t}$ und $x_0 < x(\bar{t}) < x_0 + \eta$ so dass $\forall\ t \leq \bar{t}$, $x_0 < x(t) < x_0 + \eta$, es gilt

$$\int_{x(\bar{t})}^{x(t)} \frac{ds}{g(s)} = \int_{\bar{t}}^{t} h(\tau)\,d\tau$$



Für $t \to t_0$, $\int_{\bar{t}}^{t} h(\tau)\,d\tau$ bleibt beschränkt.

während $\lim\limits_{t \to t_0} \int_{x(\bar{t})}^{x(t)} \frac{ds}{g(s)}$ divergent ist.

Das ist ein Widerspruch. ∎

Zwei weitere Beispiele in Übungen.

Beispiele für Trennung der Variablen

$$f \in C$$

① $x' = f(at + bx + c)$ $b \neq 0$.

Sei $u(t) = at + bx(t) + c$, so gilt für u

$$u' = a + bx' = a + b \cdot f(u)$$

② $x' = f\left(\frac{x}{t}\right)$.

Sei $u(t) = \frac{x(t)}{t}$, dann für u gilt die Gleichung

$$u' = \frac{x'(t)}{t} - \frac{x(t)}{t^2} = \frac{f(u)}{t} - \frac{u}{t}$$

$$\Rightarrow \quad u' = \frac{f(u) - u}{t}$$

③ $x' = f\left(\frac{at + bx + c}{\alpha t + \beta x + \gamma}\right)$ mit $\begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} \neq 0$.

die Gleichungen ~~hab~~ $\begin{cases} at + bx + c = 0 \\ \alpha t + \beta x + \gamma = 0 \end{cases}$ haben genau

Lösung t_0, x_0. Dann setzen $\begin{cases} \bar{x} = x - x_0 = x(t) - x_0 \\ \bar{t} = t - t_0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} = x'(t) = \bar{x}'(\bar{t} + t_0) = f\left(\frac{a\bar{t} + b\bar{x}}{\alpha\bar{t} + \beta\bar{x}}\right) = f\left(\frac{a + b\frac{\bar{x}}{\bar{t}}}{\alpha + \beta\frac{\bar{x}}{\bar{t}}}\right)$$

Die lineare Differentialgleichung

$$x' + g(t)\, x = h(t). \qquad g(t),\ h(t) \in C(J)$$

Ist $h \equiv 0$, so nennt man die eine homogene Gleichung, anderenfalls eine inhomogene lineare GL.

Prop. Das Anfangswertproblem $\begin{cases} x' + g(t)\, x = 0 \\ x(t_0) = x_0, \quad t_0 \in J \end{cases}$ hat eine eindeutige Lösung.

$$x(t) = x_0\, e^{-\int_{t_0}^{t} g(s)\,ds}.$$

Die Lösungsdarstellung kann man durch der Trennung der Var. rechnen.

$$\cancel{\frac{dx}{x} = -g(t)\,dt}$$

$$\cancel{\Rightarrow \ln x - \ln x_0 = \int_0^t}$$

Oder direkt Rechnen. Wir multiplizieren die GL mit $e^{\int_{t_0}^{t} g(s)ds}$

$$e^{+\int_{t_0}^{t} g(s)ds}\, x'(t) + g(t)\, e^{+\int_{t_0}^{t} g(s)ds}\, x(t) = 0$$

$$\Rightarrow \left(e^{\int_{t_0}^{t} g(s)ds}\, x(t)\right)' = 0$$

integration $\int_{t_0}^{t}$ $\Rightarrow$

$$e^{\int_{t_0}^{t} g(s)ds}\, x(t) - e^{0}\, x(t_0) = 0$$

$$\Rightarrow x(t) = e^{-\int_{t_0}^{t} g(s)ds}\, x_0$$

Für die inhomogene GL.

$$\begin{cases} x' + g(t)\,x = h(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

„Methode der Variation der Konstanten"

Ansatz. $x(t) = C(t)\cdot e^{-G(t)}$ wobei $G(t) = \int_{t_0}^{t} g(s)\,ds$

Durch passende Wahl von $C(t)$ eine Lösung der inhomogenen DGL zu gewinnen.

$$x' + g(t)\,x = \left(C'(t) - g(t)\,C(t) + g(t)\,C(t)\right) e^{-G(t)} = C'\cdot e^{-G(t)}.$$

Dann gilt $C' = h(t)\cdot e^{G(t)} \Rightarrow C(t) = \int_{t_0}^{t} h(s)\,e^{G(s)}\,ds + C_0$

eine allgemeine Lösung ist.

Nun setzen wir den Anfangswert ein, gilt

$$x_0 = x(t_0) = C(t_0)\cdot e^{-G(t_0)} = C_0\cdot e^{0} = C_0$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = e^{-G(t)}\cdot\left(\int_{t_0}^{t} h(s)\,e^{G(s)}\,ds + x_0\right)$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = x_0\cdot e^{-\int_{t_0}^{t} g(s)\,ds} + \int_{t_0}^{t} h(s)\,e^{-\int_{t_0}^{t} g(s)\,ds + \int_{t_0}^{s} g(\sigma)\,d\sigma}\,ds$$

$$= x_0\cdot e^{-\int_{t_0}^{t} g(s)\,ds} + \int_{t_0}^{t} h(s)\cdot e^{-\int_{s}^{t} g(\sigma)\,d\sigma}\,ds.$$

Satz. Das Anfanswertproblem

$$\begin{cases} x' + g(t)\,x = h(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

hat, wenn die Funktionen $g(t)$, $h(t)$ in J stetig sind und $t_0 \in J$ ist, genau eine Lösung

$$x(t) = x_0\cdot e^{-\int_{t_0}^{t} g(s)\,ds} + \int_{t_0}^{t} h(s)\,e^{-\int_{s}^{t} g(\sigma)\,d\sigma}\,ds,$$

die in ganz J existiert.

Alternativ kann man wie folgendes direkt rechnen.

$$x' + g(t)x = h(t). \qquad x(t_0) = x_0$$

Wir multiplizieren die GL mit $e^{\int_{t_0}^{t} g(s)ds}$. dann gilt es.

$$\Rightarrow \quad \left(e^{\int_{t_0}^{t} g(s)ds} x\right)' = h(t) \cdot e^{\int_{t_0}^{t} g(s)ds}.$$

Nach dem Hauptsatz erhalten wir.

$$e^{\int_{t_0}^{t} g(s)ds} x(t) - e^{\int_{t_0}^{t_0} g(s)ds} x_0 = \int_{t_0}^{t} h(s)\, e^{\int_{t_0}^{s} g(\sigma)d\sigma} ds$$

$$\Longrightarrow \quad x(t) = x_0 \cdot e^{-\int_{t_0}^{t} g(s)ds} + \int_{t_0}^{t} h(s)\, e^{-\int_{s}^{t} g(\sigma)d\sigma} ds$$

#

<u>Superposition von Lösungen</u> (für alle Lineare Operatoren L).

Einer Operator L ist linear, wenn $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$, gilt

$$L(a\phi + b\psi) = a\,L(\phi) + b\,L(\psi).$$

- Sei $Lx = x' + g(t)x$, dann es folgt.

$$Lx_i = h_i \Longrightarrow Lx = h \quad \text{mit } x = \sum \lambda_i y_i, \quad h = \sum \lambda_i h_i$$

hierbei ist λ_i reell, und i durch läuft eine endliche Indexmenge.

- Eindeutigkeit der Lösung.

Sind x, $\bar{x}$ zwei Lösungen, d.h. $Lx = h$, $L\bar{x} = h$.

so ist $z(t) = x(t) - \bar{x}(t)$ eine Lösung der homogenen DGL.

$$Lz = Lx - L\bar{x} = 0$$

Mit anderen Worten, alle Lösungen x der inhomogenen DGL sind durch ~~$y(x) = y$~~ $x = \tilde{x} + z$ gegeben, wobei $\tilde{x}$ eine fest gewählte Lösung der inhomogenen DGL ist und $z(t)$