Dann nach dem Majorantenkriterium von Weierstrass, für jede kompakten Teilmenge $K \subset \mathbb{C}$, konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k z^k}{k!} \quad \text{absolut und gleichmäßig in } z \in K.$$

und die Konvergenz von

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dz}\left(\frac{A^k z^k}{k!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} A \cdot \frac{A^k z^k}{k!} \quad \text{auch absolut und gleichmäßig in } K.$$

Daraus folgt das e^{Az} ist wohl definiert und auch differenzierbar,

also
$$\frac{d}{dz} e^{Az} = A \cdot e^{Az}$$

Das auch zeigt $x(t) = e^{At}$ eine Lösung von $x' = Ax$ ist.

Speziell ist $x(t) = e^{A(t-t_0)} x_0$ die eindeutige Lösung von

$$\begin{cases} x' = Ax \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

und $e^{A(t-t_0)} = X(t)$ ist die HFM in t_0, denn es ist $X(t_0) = I$.

wobei $\lim\limits_{t \to 0} e^{At} = \lim\limits_{t \to 0} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} = I$ ist.

Mit der Exponential Funktionen wird die Lösungsdarstellung von

$$\begin{cases} x'(t) = Ax + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

durch $$x(t) = e^{A(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)} b(s)\, ds, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

gegeben.

<u>Bemerkung</u> General ist der Wert der Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{A^k z^k}{k!}$ schwierig zu rechnen.

Sei c_λ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ, also

$$A c_\lambda = \lambda c_\lambda$$

Dann ist

$$e^{At} c_\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} \cdot c_\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k \lambda^k c_\lambda}{k!} = e^{\lambda t} \cdot c_\lambda .$$

Daraus folgt dass $x(t) = e^{\lambda t} c_\lambda$ eine Lösung von $x' = Ax$ ist.

Nun wichtig ist die Eigenräume $E(\lambda) = \mathcal{N}(\lambda - A)$ von A zu diskutieren.

<u>1. Fall</u>. Die Matrix A besitzt n linear unabhängige Eigenvektoren $\{c_1, \cdots, c_n\}$. d.h. $AC = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} C$
diagonalisierbar ~~diagonalizable~~

<u>Lemm</u>. Sei $\lambda_1 \cdots, \lambda_n$ die nicht notwendigerweise verschiedenen Eigenwerte von A und existiere zugehörige Eigenvektoren $\{c_1, \cdots, c_n\}$, die linear unabhängig sind, dann ist

$$Y(t) = \left(e^{\lambda_1 t} c_1 , \cdots , e^{\lambda_n t} c_n \right)$$

eine FM für $x' = Ax$. Insbesondere ist dies der Fall, falls alle Eigenwerte $\{\lambda_j\}_{j=1}^{n}$ paarweise verschieden sind.

<u>Beweise</u> Übung.

<u>Bemerkung</u>. Sei A reellwertig, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ einer komplexen Eigenwert von A mit complexem Eigenvektor $c_\lambda \in \mathbb{C}^n$. Dann ist $\bar{\lambda}$, die konjugierte komplexe Zahl von λ, einer Eigenwert von A und der zugehörige Eigenvektor ist $\bar{c}_\lambda$, denn

$$A \bar{c}_\lambda = \overline{A c_\lambda} = \overline{\lambda c_\lambda} = \bar{\lambda} \, \bar{c}_\lambda .$$

Nun sei $x = u + iv$ eine komplexe Lösung von $x' = Ax$, dann sind $\operatorname{Re} x = u$ und $\operatorname{Im} x = v$ Lösungen von $x' = Ax$.

Mit $\lambda = \mu + i\nu$ und $c_\lambda = c_1 + i c_2$ erhält man

$$x(t) = e^{(\mu + i\nu)t}(c_1 + i c_2)$$

$$= e^{\mu t}(c_1 \cos \nu t - c_2 \sin \nu t) + i e^{\mu t}(c_2 \cos \nu t + c_1 \sin \nu t)$$

Dann sind ~~die~~.

$$x_1(t) = \operatorname{Re} x(t) = e^{\mu t}(c_1 \cos \nu t - c_2 \sin \nu t)$$

$$x_2(t) = \operatorname{Im} x(t) = e^{\mu t}(c_2 \cos \nu t + c_1 \sin \nu t)$$

die linear unabhängige reelle Lösungen. Die konjugiert komplexe Eigenwert $\bar{\lambda} = \mu - i\nu$ liefert gleiche Lösungen.

<u>Beispiel</u>. $x' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix} x$.

Die Eigenwerte sind die Lösungen von $P_3(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2 + \lambda + 2) = 0$, also

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2}, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2}, \quad \lambda_3 = 1.$$

Die zugehörigen Eigenvektoren sind.

$$c_1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2} \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad c_2 = \bar{c}_1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2} \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad c_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

aus der Lösung $y(t) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2} \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot e^{\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2}\right)t}$ erhält man die reellen Lösungen

$$x_1(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\left(\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \cos\frac{\sqrt{7}}{2}t - \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{7}}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sin\frac{\sqrt{7}}{2}t\right)$$

$$x_2(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\left(\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \cos\frac{\sqrt{7}}{2}t + \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{7}}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sin\frac{\sqrt{7}}{2}t\right)$$

und $x_3(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} e^t$, die bilden ein FS.

<u>Zusammenfassung</u> A diagonalisierbar.

$$x' = Ax$$

Nach linearer Transformation $x = Cy$ wobei $C^{-1}AC = B$ eine Diagonalmatrix, erhält man

$$Cy' = ACy \Rightarrow y' = C^{-1}ACy = By = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} y$$

Dann ist das HFM für $y' = By$ wie folgendes gegeben

$$\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \cdots & 0 \\ 0 & \cdot & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$ und das HFM für $x' = Ax$ lautet

$$Y(t) = C \cdot \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \\ \vdots & & \ddots \\ 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} = \left(c_1 e^{\lambda_1 t} \cdots c_n e^{\lambda_n t}\right) \text{ mit } Y(0) = C$$

Ferner ist das HFM für $x' = Ax$

$$X(t) = Y(t)\, Y^{-1}(0) = C \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} C^{-1}.$$

<u>2. Fall</u>. Jordansche Normalform einer Matrix

<u>Satz</u>. (Aus Matrizentheorie). Zu jeder (reellen oder komplexen) Matrix A eine (im allgemeinen komplexe) nicht-singuläre Matrix C existiert, sodass $B = C^{-1}AC$ die sogenannte Jordansche Normalform.

$$B = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_k \end{pmatrix}$$

besitzt, wobei der Jordan-kasten J_i eine quadratische Matrix der Form

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i \end{pmatrix}_{r_i \times r_i}$$ und $r_1 + r_2 + \cdots + r_k = n$

$$P_n(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{r_1} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{r_k}.$$

Ein System mit Jordan-Kasten $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}_{r\times r}$ $x' = Jx$

hat Hauptfundamentalmatrix

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{1}{2}t^2 e^{\lambda t} & \cdots & \frac{1}{(r-1)!} t^{r-1} e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \cdots & \frac{1}{(r-2)!} t^{r-2} e^{\lambda t} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda t} \end{pmatrix}$$

z.B. Für Matrix $B = \left(\begin{array}{ccc|c|cc} \lambda & 1 & 0 & & & \\ 0 & \lambda & 1 & & \mathbf{0} & \\ 0 & 0 & \lambda & & & \\ \hline & & & \mu & & \\ \hline & \mathbf{0} & & & \nu & 1 \\ & & & & 0 & \nu \end{array}\right)$ hat $X' = BX$.

HFM
$$X(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{1}{2}t^2 e^{\lambda t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\mu t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\nu t} & te^{\nu t} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\nu t} \end{pmatrix}$$

<u>Algebraische und geometrische Vielfachheit</u>

Ist λ eine k-fache Nullstelle von $P_n(\lambda) = \det|\lambda I - A|$, wird $m(\lambda) := k$ die <u>algebraische Vielfachheit</u> von λ genannt.

Die Dimension $m_g(\lambda)$ des zugehörigen Eigenraums heißt die <u>geometrische Vielfachheit</u> von λ.

$$1 \le m_g(\lambda) \le m(\lambda) \le n.$$

Ist $m(\lambda) = m_g(\lambda)$, so heißt der Eigenwert halbeinfach.
In diesem Fall, wird A <u>diagonalisierbar</u> genannt.