Linienelement und Richtungsfeld

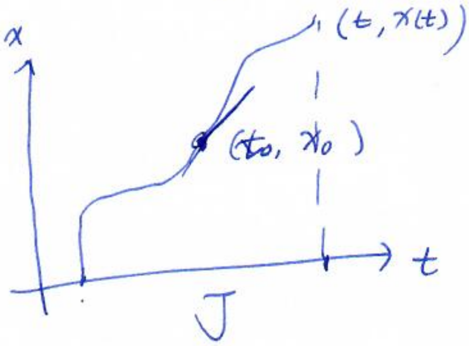
$$(AWP)\ \begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

1-Ordnung scalar DGL.

$f : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Das Graph von x, $(t, x(t))$ heißt eine Lösungskurve (durch (t_0, x_0))

Der Anstieg der Kurve ist durch $f(t, x(t))$ gegeben.



Ein Zahlentripel (t, x, m) wird geometrisch so bedeutet dass m die Steigung einer durch den Punkt (t, x) gehenden Geraden angibt.

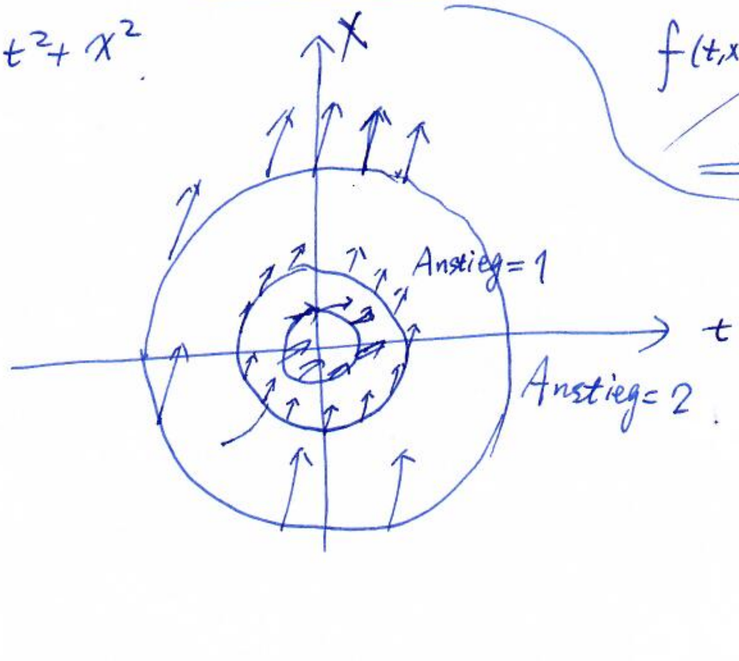
(t, x, m) nennt man ein Linienelement.

Die Gesamtheit aller Linienelemente zu ausgewählen Punkten $(t, x) \in J \times \mathbb{R}$ nennt man Richtungsfeld der $x' = f(t, x)$

z.B. $x' = t^2 + x^2$.

Set $x' =$ constant.

$f(t,x) = c$ heißt Isokline



Trennung der Variablen $\quad x' = h(t)\cdot g(x)$, $x(t_0)=x_0$ ⑦

DGL mit getrennten Variablen

Idee. $\frac{dx}{g(x)} = h(t)\,dt$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{g(x)} = \int_{t_0}^{t} h(t)\,dt$$

$$G(x) = H(t) \Rightarrow x = G^{-1}(H(t)).$$

Satz. Seien $h:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ und $g:(a,b)\to\mathbb{R}$ stetig, $t_0\in(\alpha,\beta)$, $x_0\in(a,b)$. $G(x) = \int_{x_0}^{x}\frac{1}{g(s)}\,ds$, sofern $g(x_0)\neq 0$.

und $H(t) := \int_{t_0}^{t} h(\tau)\,d\tau$. Dann

① Ist $g(x_0)=0$, so ist $x(t)\equiv x_0$ eine Lösung auf (α,β)

Es kann jedoch weitere Lösungen geben (Nicht-Eindeutigkeit).

②. Ist $g(x_0)\neq 0$, so gibt es ein $\delta>0$, sodass die eindeutig bestimmte Lösung $x(t)$ auf $J_\delta=(t_0-\delta, t_0+\delta)$ mit $x(t_0)=x_0$ durch $x(t) = G^{-1}(H(t))$, $t\in J_\delta$ gegeben ist.

Beweis. ① Ist $g(x_0)=0$, so ist $x'|_{t_0} = h(t_0)\,g(x_0)=0$

Dann ist es offenbar $x\equiv x_0$ eine Lösung.

Beispiel für Nicht Eindeutigkeit geben wir später.

②. Angenommen $x=x(t)$ eine Lösung ist.

Nach der Voraussetzung, die g stetig ist, so ist $g(x(t))$ ~~auch~~.

Da $g(x_0)\neq 0$; $\exists\,\delta>0$ sodass $g(x(t))\neq 0 \quad \forall t\in J_\delta=(t_0-\delta, t_0+\delta)$

Dann gilt $$\frac{x'(t)}{g(x(t))} = h(t), \quad \forall t\in J_\delta.$$

Mit der Kettenregel erhalten wir

$$\frac{d}{dt}G(x(t)) = \frac{dG(x(t))}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = \frac{x'}{g(x(t))} = h(t)$$

Der Hauptsatz der Differential und Integralrechnung liefert

$$G(x(t)) - G(x_0) = H(t), \qquad \forall\, t \in J_\delta.$$

Aufgrund von $G'(x(t)) = \frac{dG}{dx}(x(t)) = \frac{1}{g(x(t))} \neq 0 \quad \forall t \in J_\delta$,

ist die Funktion G streng monoton nahr bei x_0. Dies stellt die Existenz der Umkehrfunktion G^{-1} und gibt

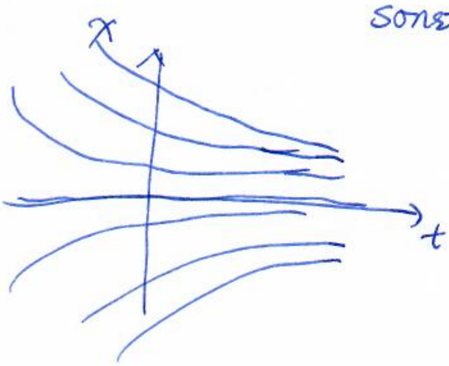
$$x(t) = G^{-1}(H(t)) \quad . \quad \forall t \in J_\delta$$

Daher ist die Lösung $x(t)$ durch diese Darstellung eindeutig bestimmt. ∎

Beispiel 1. $\quad x' = -2x$

wenn $x_0 = 0$ then ist $x = 0$ eine Lösung.

sonst kann man direkt rechnen.



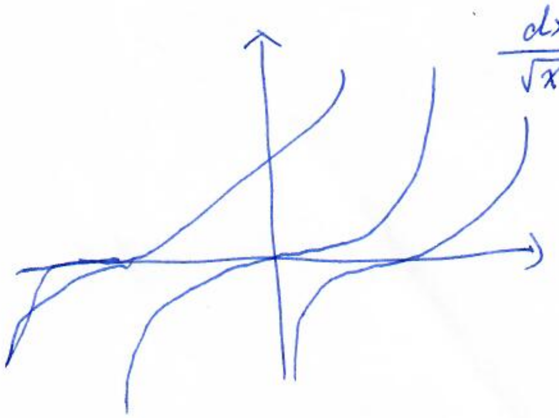
$$\frac{dx}{x} = -2\,dt \implies \ln|x| = -2t + c$$

$$\implies x = c \cdot e^{-2t}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Beispiel 2 $\quad x' = \sqrt{|x|}$. Aufgrund der Symmtrie des Richtungsfelds. wenn $x(t)$ eine Lösung ist, ist $-x(-t)$ auch eine Lösung.

$x \equiv 0$ ist eine Lösung.

Daher ist es genug, positive Lösungen zu zeigen.



$$\frac{dx}{\sqrt{x}} = dt \implies \int_0^x \frac{1}{\sqrt{z}}\,dz = t + c \implies 2\sqrt{x} = t + c$$

$$\implies x = \left(\frac{t+c}{2}\right)^2, \quad t \geq -c.$$

Sei $x(2) = 1$.

dann Lösungen sind. $x(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{4} & t > 0 \\ 0 & -c \leq t \leq 0 \\ -\frac{(t+c)^2}{4} & t < -c \end{cases}$

$$\tilde{x}(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{4} & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$

Bemerkung

Das Beispiel 2 mit jedem Anfangswert has unendlich viele Lösungen.

Wenn $(x_0, t_0) = (0,0)$, $c=0$, dann verzweigen die Lösungen sich direkt an $(0,0)$

Wenn $(x_0, t_0) \neq (0,0)$, $c \neq 0$, dann hat man zunächst eine Lösung, die sich erst in einiger Entfernung von (x_0, t_0) verzweigt.

wenn $x=0$, gibt es viele Möglichkeiten: Die Lösung kann an $x=0$ bleiben, oder mit $x(t) = -\frac{(t+c)^2}{4}$ weiter gehen.

$\to$ lokal eindeutig lösbar.

Satz (Weiteres Ergebnis wenn $g(x_0)=0$). ~~$g(x_0)=0$~~

Seien $h: (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ und $g: (a,b) \to \mathbb{R}$ stetig.

$g(x_0)=0$ und $g(x) \neq 0$, $\forall x_0 < x < \eta + x_0$ für $\eta > 0$ (b.z.w, $x_0 - \eta < x < x_0$).

und is das uneigentliche Integral

$$\int_{x_0}^{x_0+\eta} \frac{ds}{g(s)} \quad \left(\text{bzw} \int_{x_0-\eta}^{x_0} \frac{ds}{g(s)} \right)$$

divergent, so gibt es keine Lösung, die von oben (bzw unten) in die Gerade $x = x_0$ einmündet (hineinführen).

Bemerkung. Die Resultat zeigt nur eine Lösung $x(t) \equiv x_0$ gibt. und die Lösungen $x(t)$, die an einer Stelle $> x_0$ ist, bleibt in ihrem ganzen Verlauf $> x_0$ (bzw $<$)