Kapitel 3. Lineare Systeme

$$\begin{cases} x' = A(t)\,x + b(t), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \qquad t \in J := [t_0, t_1].$$

wobei $A \in C(J; \mathbb{R}^{n\times n})$, $b \in C(J, \mathbb{R}^n)$ sind gegebene Funktionen.

Das system heißt homogen falls $b \equiv 0$ ist, anderenfalls nemt man es inhomogen.

• Homogene Systeme

$$x' = A(t)\,x.$$

Die Menge aller Lösungen ist ein Vektorraum, genauer ein Teilraum

$\mathcal{L} \subset C^1(J; \mathbb{R}^n)$. ($n$ dimention), (wegen des Superpositions Prinzipes ist $\mathcal{L}$ ein Vektorraum)

Erklärung

Sei $x = x(\cdot, x_0)$ eine Lösung von $\begin{cases} x' = A(t)\,x \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$, dann

definiert die Abbildung $Tx_0 := x(\cdot, x_0)$ einen linearen Isomorphismus

von $\mathbb{R}^n$ auf $\mathcal{L}$. also

$$T: \; x_0 \in \mathbb{R}^n \longrightarrow x(\cdot, x_0) \in \mathcal{L}.$$

Die Abbildung T is injektiv, $T(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{L}$, und die ist auch surjektiv

weil jede Lösung einen Anfangswert besitzt.

T ist linear, ~~dann~~ es gilt $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$T(\alpha x_0 + \beta x_1) = x(\cdot, \alpha x_0 + \beta x_1)$$

$$\overset{\text{Superposition}}{=} \alpha x(\cdot, x_0) + \beta x(\cdot, x_1) = \alpha \cdot T x_0 + \beta\, T x_1$$

Dann ~~ist T einen~~ gilt auch $\dim \mathcal{L} = \dim \mathbb{R}^n = n$.

Def. Eine Basis von $\mathcal{L}$ heißt Fundamentalsystem (FS).

Mit n Lösungen $y^i \in C^1(J; \mathbb{R}^n)$ kann man eine Lösungsmatrix $Y(t) = (y^1, y^2, \cdots, y^n)$ zusammenfassen, wobei y^i die Spalten von $Y(t)$ darstellen. Ist $\{y^1, \cdots, y^n\}$ ein FS, so nemt man $Y(t)$ eine

Fundamentalmatrix (FM). Gilt außerdem $Y(t_0) = I$, so heißt $Y(t)$ Hauptfundamentalmatrix (HFM) in t_0 und deren Spalten nennt man Hauptfundamentalsystem (HFS).

Folgerungen. ① Für jede Lösungsmatrix $Y(t)$, gilt es $Y'(t) = A(t)Y(t)$

② Ist $Y(t)$ eine FM, so kann jede Lösung durch

$$y(t) = Y(t)c, \qquad \forall t \in J$$

mit einem eindeutig bestimmten Vektor $c \in \mathbb{R}^n$ dargestellt werden.

③. Für jede Lösungsmatrix $Z(t)$ und jede Konstante Matrix $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist auch $Y(t) = Z(t)\,C$ eine Lösungsmatrix ~~und~~ weil $Y'(t) = Z'(t)\,C = A(t)\,Z(t)\,C = A(t)\,Y(t)$.

Def. Sei $Y(t)$, $t\in J$, eine Lösungsmatrix, dann heißt $\varphi(t) := \det Y(t)$ die Wronski Determinante von $Y(t)$.

Lem. Sei $Y(t)$ eine Lösungsmatrix für $x' = A(t)\,x$ und $\varphi(t) := \det Y(t)$. Dann gilt $\varphi'(t) = (\mathrm{Sp}\,A(t))\cdot\varphi(t)$, $\forall t\in J$. also

$$\varphi(t) = \varphi(\tau)\exp\left(\int_\tau^t \mathrm{Sp}(A(s))\,ds\right), \qquad \forall t,\tau\in J.$$

wobei $\mathrm{Sp}\,A = \sum_{i=1}^n a_{ii}$, die Spur von der Matrix A bezeichnet.

Insbesondere ist $\varphi(t) \neq 0$, $\forall t\in J$, wenn $Y(t)$ eine FM ist.

Beweis. Zu jedem fixierten $\tau\in J$. Sei $Z(t)$ die HFM mit $Z(\tau) = I$. Dann ist $\tilde{Y}(t) := Z(t)\,Y(\tau)$ eine Lösungsmatrix mit dem Anfangswert $\tilde{Y}(\tau) = Y(\tau)$. Die Eindeutigkeit der Lösung liefert $\tilde{Y}(t) = Y(t) = Z(t)\,Y(\tau)$.

Daraus folgt

$$\varphi'(t) = \frac{d}{dt}\left(\det Y(t)\right) = \frac{d}{dt}\left(\det Z(t)\cdot \det Y(\tau)\right) = \frac{d}{dt}\left(\det Z(t)\right)\cdot\varphi(\tau)$$

Nach der Kettenregel erhalten wir

$$\frac{d}{dt}\left(\det Z(t)\right) = \sum_{j=1}^{n} \det\left(z^1(t), \cdots, \frac{d}{dt}z^j(t), \cdots, z^n(t)\right).$$

wobei $z^j(t)$ die Lösung von $\begin{cases}\frac{d}{dt}z^j(t) = A(t)\, z^j(t) \\ z^j(\tau) = e^j = (0, \cdots, \underset{j}{1}, \cdots 0)\end{cases}$ ist.

Daher ist

$$\left.\frac{d}{dt}\left(\det Z(t)\right)\right|_{t=\tau} = \sum_{j=1}^{n} \det\left(e^1, \cdots, A(\tau)e^j, \cdots e^n\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{jj}(\tau) = \operatorname{Sp} A(\tau).$$

Dann gilt es $\forall \tau \in J$.

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \operatorname{Sp} A(\tau)\cdot\varphi(\tau)$$

$$\Longrightarrow \quad \varphi(t) = \varphi(\tau)\cdot e^{\int_\tau^t \operatorname{Sp} A(s)\,ds} \qquad \forall t, \tau \in J. \quad \blacksquare$$

$$\left(\text{oder} \quad \varphi(\tau) = \varphi(t)\cdot e^{-\int_\tau^t \operatorname{Sp} A(s)\,ds}\right)$$

<u>Bemerkung</u>. Für FM $Y(t)$, ist $\det Y(0) \neq 0$, daher nach dem Lemma für Wronski Determinante, ist $\det Y(t) \neq 0, \forall t \in J$. d.h dass $Y(t)$ invertierbar ist. Daher ist

$$0 = \frac{d}{dt} I_{n\times n} = \frac{d}{dt}\left(Y(t)\,Y^{-1}(t)\right)$$

$$= Y'(t)\,Y^{-1}(t) + Y(t)\left(Y^{-1}(t)\right)'$$

$$= A(t)\,Y(t)\,Y^{-1}(t) + Y(t)\left(Y^{-1}(t)\right)' = A(t) + Y(t)\left(Y^{-1}(t)\right)'$$

$$\Longrightarrow \quad \left(Y^{-1}(t)\right)' = -Y^{-1}(t)\,A(t)$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(Y^{-1}(t)\right)^T = -A^T(t)\left(Y^{-1}(t)\right)^T$$

also ist $\left(Y^{-1}(t)\right)^T$ eine Lösungsmatrix von $x' = -A^T x$.

Wir Bezeichnen $X(t)$ als die HFM, dann erfüllt $X(t)$ das folgende AWP.

$$\begin{cases} X'(t) = A(t)\,X(t) \\ X(t_0) = I \end{cases}$$

Sei $Y(t)$ eine FM mit $Y(t_0)$ gegeben, also $\begin{cases} Y'(t) = A(t)\,Y(t) \\ Y(t_0) = Y(t_0) \end{cases}$.

Dann ist $X(t) = Y(t)\,Y^{-1}(t_0)$, denn $Y(t)\,Y^{-1}(t_0)$ erfüllt

$$\begin{cases} \left(Y(t)\,Y^{-1}(t_0)\right)' = A(t)\,Y(t)\,Y^{-1}(t_0) \\ Y(t)\,Y^{-1}(t_0)\big|_{t=t_0} = I. \end{cases}$$

<u>Proposition</u>

Die Lösung von

(AWP) $\begin{cases} x'(t) = A(t)\,x(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ kann durch FM gegeben,

also $x(t) = X(t)\,x_0 = Y(t)\,Y^{-1}(t_0)\,x_0$,

wobei $X(t)$ ist ~~eine~~ die HFM und $Y(t)$ eine FM.

<u>Erklärung</u>. $(X(t)\,x_0)' = X'(t)\,x_0 = A(t)\,X(t)\,x_0$.

$$X(t)\,x_0\big|_{t=t_0} = I \cdot x_0 = x_0$$

Inhomogene Systeme

$$x'(t) = A(t)\,x + b(t), \quad t \in J$$

Sei $Y \in C^1(J; \mathbb{R}^{n\times n})$ eine FM, $z \in C^1(J; \mathbb{R}^n)$ eine spezielle Lösung.

Dann nach dem Superpositionsprinzip, sind alle Lösungen durch

$$x(t) = Y(t)\,c + z(t), \quad \forall c \in \mathbb{R}^n$$

gegeben.

<u>Methode der Variation der Konstanten</u> (eine $z(t)$ zu finden)

Man setze $z(t) = Y(t) \cdot c(t)$ wobei $c \in C^1(J; \mathbb{R}^n)$.

Die Produktregel liefert dass

$$z'(t) = Y'(t)\,c(t) + Y(t)\cdot c'(t)$$
$$= A(t)Y(t)\,c(t) + Y(t)\,c'(t)$$

Dann ~~setzen~~ wir die in die Gleichung ein, erhalten wir

$$A(t)\,Y(t)\,c(t) + Y(t)\,c'(t) \doteq A(t)\,Y(t)\,c(t) + b(t)$$

$$\Rightarrow \qquad c'(t) = Y^{-1}(t)\,b(t).$$ wobei $Y(t)$ für jede t invertierbar ist.

$$\Rightarrow \qquad c(t) = c(t_0) + \int_{t_0}^{t} Y^{-1}(s)\,b(s)\,ds \,, \quad \forall t \in J.$$

Da wir nur eine spezielle Lösung suche, mit $c(t_0) = 0 \in \mathbb{R}^n$, erhalten wir

$$z(t) = Y(t)\cdot\int_{t_0}^{t} Y^{-1}(s)\,b(s)\,ds\,, \quad t \in J.$$

Mit einem gegebenen Anfangswert $x(t_0) = x_0$ ist die Lösung

$$x(t) = Y(t)\,Y^{-1}(t_0)\,x_0 + Y(t)\int_{t_0}^{t} Y^{-1}(s)\,b(s)\,ds,$$

alternativ gilt es

$$x(t) = X(t)\,x_0 + X(t)\int_{t_0}^{t} X^{-1}(s)\,b(s)\,ds.$$

Bemerkung: Im Vergleich zur ~~der~~ Lösungsdarstellung von skalarer Differenzialgleichung $x(t) = e^{-G(t)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{G(s)-G(t)}\,ds$ ist ~~sind~~ die FM genau $e^{-G(t)}$, die Lösung der homogenen Gleichung ist.

Bestimmung von Fundamentalsystem

Es ist im allgemeinen nicht möglich, die Lösungen eines homogenen Systems in geschlossener Form anzugeben. Wir stellen nur die Theorie der Systeme mit konstanten Koeffizienten.

$$x'(t) = A\,x(t), \qquad A \text{ ist nicht von } t \text{ abhängig.}$$

Def. (Matrix-Exponentialfunktion) $z \to e^{Az}$, die durch

$$e^{Az} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k z^k}{k!}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

definiert heißt Matrix – Exponential funktion zur Matrix A.
wobei die Konventionen $A^0 = I$, $z^0 = 1$, $0! = 1$ verwendet werden.

Bemerkung. Man muss zeigen ob die Abbildung $z \longmapsto e^{Az}$ auf $\mathbb{C}$ wohldefiniert ist.

Def. Für Matrik $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, definiere die Menge

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \text{ ist einen Eigenwert von } A\},$$

die Spektum von A heißt.

Man nennte $\rho(A) = \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$ die Resolventenmenge.

Die Zahl $r(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$ heißt Spektralradius

Bemerkung ① $\lambda \in \sigma(A)$ ist äquivalent zu $\lambda - A$ ist nicht invertierbar.

② $r(A) = \limsup_{k\to\infty} |A^k|^{\frac{1}{k}}$

wober $|\cdot|$ ist einer der Matrix normen. z.B. für $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$

$$\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

$\vdots$

Die Auswahl der Normen sind nicht erheblich.

Dieser Grenzwert zeigt dass. $\forall \varepsilon > 0$ $\exists k_0$ sodass $\forall k \ge k_0$.

ist $\quad |A^k| \le (r(A)+\varepsilon)^k$.

Daraus folgt dass

$$\left|\frac{A^k z^k}{k!}\right| \le \frac{(r(A)+\varepsilon)^k \cdot |z|^k}{k!}.$$