Dynamishe System (FSS 2020)

Einführung und elementare Methoden

DGL.

$$h(t, x, x', \dots, x^{(m)}) = 0 \qquad t \in \underset{\text{Intervall}}{J} \subset R \qquad (*)$$

$h : J \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine gegebener Funktion.

t ist die einzige unabhängige Variable.

Die Ordnung einer Differentialgleichung ist definiert durch die höchste nichttrivial enthaltene Ableitung. $(*)$ hat die Ordnung m, sofern $\partial_{x^{(m)}} h \neq 0$ ist.

$(*)$ ist in impliziter Form.

Eine Gleichung durch die Form $x^{(m)} = g(t, x, x', \dots, x^{(m-1)})$ gegeben ist, heißt sie im expliziter Form.

Def. Eine Funktion $x : J \to \mathbb{R}^n$ heißt Lösung von $(*)$ in J, falls $x \in C^m(J; \mathbb{R}^n)$ ist und die GL $(*)$ für alle $t \in J$ gilt.

Bemerkung. Falls es mehrere unabhängige Variable gibt in eine DGL, nennt man es partielle DGL. z.B.

$$H(y, u, \nabla u, D^2 u, \dots, \nabla^m u) = 0, \quad y \in U \in \mathbb{R}^n \text{ offen}$$

Lösungen $u(y)$ sind Funktionen mehrerer Variablen.

Erste Beispiele

(B1) Bevölkerungswachstum

$$x' = \alpha x. \qquad \alpha \in R \qquad \text{eine einfaches Model}$$

$x(t)$ ~ die Größe einer Population zur Zeit t.

$x'(t)$ ~ die zeitliche Änderung der Population

$x'(t) \begin{cases} <0 & \sim \text{Abnahme} \\ =0 & \text{keine Änderung} \\ >0 & \text{Zunahme.} \end{cases}$

α ~ Wachstumsrate

Lösung $\quad x(t) = C \cdot e^{\alpha t}$ $\quad$ C ist die Integrationskonstante, die durch ein Anfanswert $x(t_0) = x_0$ festgelegt werden.

(B2) Das Räuber – Beute – Model (Volterra-Lokta 1924).

$$\begin{cases} x'(t) = (a - by)x = ax - byx \\ y'(t) = y(-c + dx) = -cy + dyx. \end{cases} \qquad a, b, c, d > 0$$

$x(t)$ ~ die Größe der Population der <u>Beute</u> zur Zeit t

$y(t)$ ~ ~~die P~~ . . . der Räuber zur Zeit.

ax, $-cy$ repräsentieren Wachstum der Beute und die Reduktion der Räuber. Das Produkt xy repräsentiert die Interaktion der Spezies.

(B1) Bevölkerungswachstum mit dem Logistischen Wachstum

$$\begin{cases} x' = \alpha\, x\left(1 - \frac{x}{k}\right), & t \in \mathbb{R},\ \alpha > 0,\ k > 0 \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

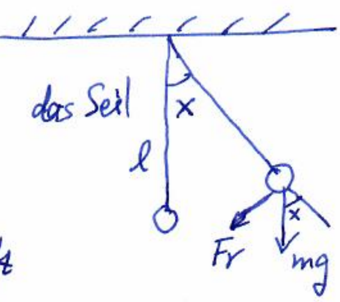
k ist die sogenente <u>Kapazität</u>

Lösung $\quad x(t) = \dfrac{x_0 k}{x_0 + e^{-\alpha t}(k - x_0)} \xrightarrow{t \to \infty} k$

langzeit Verhalten

<u>sättigungswert.</u>

B3 Das mathematische Pendel



Nach dem 2. Newtonschen Gesetz gilt

$$m\, l\, \ddot{x}'' = -F_r \quad \text{die Rücktriebskraft der Auslenkung.}$$

$$= \underbrace{mg}_{\text{die Gewichtkraft}} \cdot \sin x$$

$$\Rightarrow \quad x'' + \omega^2 \sin x = 0 \qquad \omega^2 = \frac{g}{l}$$

Das ist eine nichtlineare GL.

Aus dem Satz von Taylor folgt.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - o(x^6) \sim x$$

für kleine Auslenkungen x.

Dann ist $x'' + \omega^2 x = 0$ eine Approximation

Def. Eine DGL heißt linear, falls sie linear in allen abhängigen Variablen ist, also in $x, x', \cdots, x^{(m)}$. Ansonsten heißt sie nicht linear.

$$a(t)x^{(m)} + x = 0 \qquad \text{linear}$$

$$x'' + \omega^2 \sin x = 0 \qquad \text{nichtlinear.}$$

Ordnung Reduktion

Systeme von Differentialgleichungen 1. Ordnung

$$x(t) : J \to \mathbb{R}^n$$

$$f : J \times \mathbb{R}^{n \otimes m} \to \mathbb{R}^n$$

$$x_1' = f_1(t, x_1, \cdots, x_n)$$

$$x_2' = f_2(t, x_1, \cdots, x_n)$$

$$\vdots$$

$$x_n' = f_n(t, x_1, \cdots, x_n)$$

Das zugehörige Anfangswertproblem

$$(AWP) \begin{cases} x' = f(t, x). \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

gegeben.

- Durch eine geeignete Substitution kann man DGL höherer Ordnung auf ein System erster Ordnung reduzieren.

Sei $y^{(m)} = g(t, y, y', \dots y^{(m-1)})$ (Gm) eine explizierteformige DGL. m-ter Ordnung.

Man setze $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ ? \\ \vdots \\ y^{(m-1)} \end{pmatrix}$, es folgt

$$x' = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ \vdots \\ y^{(m)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_m \\ g(t, x_1, x_2, \cdots, x_m) \end{pmatrix} := f(t, x) \quad \text{(GS)}.$$

dann ist $x' = f(t, x)$ ein 1. Ordnung System.

Proposition. Die Funktion $y \in C^m(J;\mathbb{R})$ löst (Gm) genau dann, wenn $x \in C^1(J; \mathbb{R}^m)$ das System (GS) löst. $\boxed{\text{Beweis ist trivial}}$.

Bemerkung. Diese Reduktion auf ein System 1. Ordnung kann ebenso auch für Systeme höcherer Ordnung durchgeführt werden.

Fragestellungen der Theorie

① Lösungen existieren? Wie viele? lokal oder global?
Existenz.

ⓐ. Eine skalare DGL m-ter Ordnung hat m Integrations-konstanten, also m- Freiheitsgrade.

ⓑ. Anfangswert oder Randwert Bedingungen.

z.B. $\quad x^{(i)}(t_0) = \frac{d^i}{dx^i} x(t)\Big|_{t=t_0} = x_{0,i}, \quad i=0, \cdots, m-1.$

z.B. $\begin{cases} x' = f(t.x) \\ a\,x(t_0) + b\,x(t_1) = d. \end{cases} \quad t \in J = [t_0, t_1].$

ⓒ lokal oder global? (in Zeit t)

z.B. $\begin{cases} x' = \alpha x \\ x(0) = x_0 \end{cases}$ hat eine eindeutige global Lösung $x(t) = x_0 e^{\alpha t}$

z.B. $\begin{cases} x' = 1 + x^2 \\ x(0) = 0 . \end{cases}$

Die Lösung is durch $x(t) = \tan t$ gegeben, die existiert nur in $J = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ und $\lim_{t \to \pm\frac{\pi}{2}} x(t) = \pm\infty$.

~~Das betr~~ Eines Blow-up einer Lösung in den Punkten $\hat{t} = \pm\frac{\pi}{2}$.

②. Eindeutigkeit der Lösung. (Beispiele später)

③. Abhangigkeit und Differenzierbarkeit der Lösungen von Daten. (die Störung).

Daten sind z.B. Anfangswerten, Parametern, Randwerten.

~~Stab~~

④. Wie berechnet man die Lösungen.
(Analytisch, Numerisch).

⑤ Qualitative Theorie (Eigenschaften der Lösungen).
Wichtig!

z.B.
- beschrankt oder blow-up.
- positivität?
- periodisch?
- Asymptotisches Verhalten für größe Zeit:
- Stabilität:
- ⋮