Globale Existenz

$$(\text{AWP}) \quad \begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Sei f stetig und lokal Lipschitz in x.

Der Satz von Picard-Lindelöf impliziert, dass eine lokale eindeutige Lösung existiert und der Fortsetzungssatz ergibt ein maximales Existenzintervall. Nun geben wir Kriterien um global existierte Lösung zu kriegen.

Korollar Sei $G = J \times \mathbb{R}^n$, $J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $(t_0, x_0) \in G$, und $f: G \to \mathbb{R}^n$ stetig, lokal Lipschitz in x. Seien ferner $a, b \in C(J, \mathbb{R}_+)$ gegeben, sodass

$$|f(t,x)| \leq a(t) + b(t)\,|x| \quad , \quad \forall t \in J,\ x \in \mathbb{R}^n.$$

gilt; man sagt f sei bzgl. x linear beschränkt. Dann existiert die Lösung von (AWP) global.

Beweis. Sei $x(t)$ die Lösung. Angenommen $t_+ \in J$ und

$$\lim_{t \to t_+} |x(t)| = \infty.$$

Dann nach der Integralgleichung $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,ds$, $t \in [t_0, t_+)$ und die lineare Abschätzung $|f(t,x)| \leq a(t) + b(t)\,|x|$, erhalten wir

$$|x(t)| \leq |x_0| + \int_{t_0}^{t} \big(a(s) + b(s)\,|x(s)|\big)\,ds$$

$$= \underbrace{|x_0| + \int_{t_0}^{t} a(s)\,ds}_{\alpha(t)} + \int_{0}^{t} \underbrace{b(s)}_{\beta(t)}\,|x(s)|\,ds \quad , \quad \forall t \in [t_0, t_+)$$

Die Gronwall Ungleichung liefert dass

$$|x(t)| \leq \alpha(t) + \int_{t_0}^{t} \beta(s)\, e^{\int_s^t \beta(z)\,dz}\, \alpha(s)\,ds.$$

Da a und b stetig sind, ~~ist die~~ bleibt die rechte Seite für t gegen t_+ beschränkt. Das ist ein Widerspruch gegen $\lim_{t \to t_+} |x(t)| = \infty$. $\blacksquare$

Korollar Sei $J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $A \in C(J;\mathbb{R}^{n\times n})$, $b \in C(J,\mathbb{R}^n)$, $t_0 \in J$ und $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Dann besitzt das lineare (AWP)

$$\begin{cases} x' = A(t)x(t) + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

genau eine globale Lösung.

Beispiel ⓐ Das gedämpfte Pendel

$$x'' + \alpha x' + \omega^2 \sin x = b(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

wober $\alpha \geq 0$, $b \in C(\mathbb{R})$ gegeben sind.

Nach 1. Ordnungssystem um schreiben,

$$\left.\begin{cases} u' = v \\ v' = -\alpha v - \omega^2 \sin u + b(t) \end{cases}\right\} = f(t,u,v)$$

f ist stetig und stetig diffbar in u und v, dann zu jedem $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$ gibt es genau eine lokale Lösung. und die folgende Abschätung gilt

$$|f(t,u,v)|^2 = v^2 + (-\alpha v - \omega^2 \sin u + b(t))^2$$
$$\leq C \cdot (u^2 + v^2 + b^2(t))$$

daher ist $\quad |f(t,u,v)| \leq C \cdot (|u| + |v| + |b(t)|) \quad \forall t \in \mathbb{R},\ (u,v) \in \mathbb{R}^2$.

also ist die Lösung nach $(-\infty, \infty)$ fortsetztbar. (oder global).

ⓑ Ein nichtlinearer Schwinger

$$x'' + x - \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} = b(t) \in C(\mathbb{R}).$$

Nach dem 1. Ordnungssystem um geschieben wird, gilt

$$\left.\begin{cases} u' = v \\ v' = b(t) - u + \frac{2u}{\sqrt{1+u^2}} \end{cases}\right\} = f(t,u,v).$$

Es ist offenbar dass f stetig und stetig diffbar in (u,v).

Ferner gilt $\quad |f(t,u,v)| = \sqrt{v^2 + \left(b(t) - u + \frac{2u}{\sqrt{1+u^2}}\right)^2}$

$$\leq C \cdot (|v| + |u| + |b(t)|).$$

Also existiert die Lösung global.

Korollar. Sei $G = J \times \mathbb{R}^n$, $J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f: G \to \mathbb{R}^n$ stetig, lokal Lipschitz in x und es existiere eine Konstante $\omega \geq 0$ so dass

$$f(t,x) \cdot x \leq \omega |x|^2. \qquad \forall (t,x) \in G \text{ gilt.}$$

Dann existieren alle Lösungen global nach rechts.

Beweis. Sei $x(t)$ eine Lösung, dann gilt.

$$\left(\tfrac{1}{2}|x|^2\right)' = x \cdot x' = x \cdot f(t,x) \leq \omega \cdot |x|^2$$

Dann erfüllt $|x(t)|^2$ ~~das AWP~~ die Gronwallsche Ungleichung

$$(|x|^2)' \leq 2\omega |x|^2$$

$$|x(t_0)|^2 = x_0^2$$

also

$$|x(t)|^2 \leq x_0^2 \cdot e^{2\omega(t-t_0)}$$

und es folgt

$$|x(t)| \leq x_0 \cdot e^{\omega(t-t_0)}, \qquad \forall t > t_0$$

Diese Abschätzung zeigt dass die Lösung auf jedem kompakten Intervall beschränkt, also die global Existenz nach rechts folgt.

Beispiel. Lotka-Volterra System mit Sättigung

$$\begin{cases} u' = u - k u^2 - uv \\ v' = -\varepsilon v + uv \\ (u,v)|_{0} = (u_0, v_0), \end{cases}$$

Sei $u_0 > 0$, $v_0 > 0$ und $u(t)$, $v(t)$ die Lösung auf ihrem maximalen Existenzinterval $[0, t_+)$, dann gilt $\forall t \in [0, t_+)$

$$u(t) = u_0 \cdot e^{\int_0^t (1 - k u(s) - v(s))\, ds}$$

$$v(t) = v_0 \cdot e^{\int_0^t (u(s) - \varepsilon)\, ds}$$

Es ist offenbar dass u und v positiv sind. Angenommen $t_+ < \infty$. dann gilt

$$u(t) \leq u_0 \cdot e^t \leq u_0 \cdot e^{t_+} \leq C < \infty$$

$$\text{und } v(t) \leq v_0 \cdot e^{Ct} \leq v_0 \cdot e^{Ct_+} < \infty.$$

Ein Widerspruch zur Fortsetzungssatz. Daher ~~gibt es~~ sind sie global positive Lösungen.

Kapitel 3. Lineare Systeme

$$\begin{cases} x' = A(t)\,x + b(t), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \qquad t \in J := [t_0, t_1].$$

wobei $A \in C(J; \mathbb{R}^{n\times n})$, $b \in C(J, \mathbb{R}^n)$ sind gegebene Funktionen.

Das system heißt homogen falls $b \equiv 0$ ist, anderenfalls nennt man es inhomogen

• Homogene Systeme

$$x' = A(t)\,x.$$

Die Menge aller Lösungen ist ein Vektorraum, genauer ein Teilraum

$\mathcal{L} \subset C^1(J; \mathbb{R}^n)$. ($n$ dimention), (wegen des Superpositions Prinzipes ist $\mathcal{L}$ ein Vektorraum)

Erklärung

Sei $x = x(\cdot, x_0)$ eine Lösung von $\begin{cases} x' = A(t)\,x \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$, dann

definiert die Abbildung $Tx_0 := x(\cdot, x_0)$ einen linearen Isomorphismus von $\mathbb{R}^n$ auf $\mathcal{L}$. also

$$T: \ x_0 \in \mathbb{R}^n \longrightarrow x(\cdot, x_0) \in \mathcal{L}.$$

Die Abbildung T is injektiv, $T(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{L}$, und die ist auch surjektiv weil jede Lösung einen Anfangswert besitzt.

T ist linear, ~~dann~~ es gilt $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$T(\alpha x_0 + \beta x_1) = x(\cdot, \alpha x_0 + \beta x_1)$$

$$\overset{\text{Superposition}}{=} \alpha x(\cdot, x_0) + \beta x(\cdot, x_1) = \alpha \cdot T x_0 + \beta\, T x_1$$

Dann ~~ist T einen~~ gilt auch $\dim \mathcal{L} = \dim \mathbb{R}^n = n$.

Def. Eine Basis von $\mathcal{L}$ heißt Fundamentalsystem (FS).

Mit n Lösungen $y^i \in C^1(J; \mathbb{R}^n)$ kann man eine Lösungsmatrix $Y(t) = (y^1, y^2, \cdots, y^n)$ zusammenfassen, wobei y^i die Spalten von $Y(t)$ darstellen. Ist $\{y^1, \cdots, y^n\}$ ein FS, so nennt man $Y(t)$ eine