Schritt 3a Auf M ist die Norm durch

$$\|x\| = \max_{t\in J_\delta} |x(t)|$$

definiert. ~~Di~~ die Norm induzierte Matrik d_1 ist.

$$d_1(x,\bar{x}) = \|x-\bar{x}\| \quad , \quad \forall x, \bar{x} \in M.$$

Mit der Matrik d_1, können wir wie folgend die Kontraktion von T zeigen.

$$\|T(x) - T(\bar{x})\| = \max_{t\in J_\delta} |T(x(t)) - T(\bar{x}(t))|$$

$$= \max_{t\in J_\delta} \left| \int_{t_0}^{t} \Big(f(s,x(s)) - f(s,\bar{x}(s))\Big) ds \right|$$

$$\leq \max_{t\in J_\delta} \int_{t_0}^{t} |f(s,x(s)) - f(s,\bar{x}(s))| ds$$

$$\leq L \cdot \max_{t\in J_\delta} \int_{t_0}^{t} |x(s) - \bar{x}(s)| ds$$

$$\leq L \cdot |t-t_0| \max_{s\in J_\delta} |x(s) - \bar{x}(s)| \leq L\cdot\delta\cdot \|x-\bar{x}\|.$$

Nun für $\delta \leq \min\{\delta_0, \frac{r}{m}, \frac{1}{2L}\}$ können zeigen dass

$$\|T(x) - T(\bar{x})\| \leq \frac{1}{2}\|x-\bar{x}\|.$$

also T eine Kontration ist. Dann nachdem Banach Fixpunktsatz erhält man genau einen Fixpunkt $x_* \in M$ von T. so dass,

$$x_*(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_*(s)) ds, \quad \forall t \in J_\delta.$$

Schritt 3b Man kann auf M eine andere Matrik definieren.

Sei $$d_2(x,\bar{x}) = \max_{t\in J_\delta} e^{-\alpha(t-t_0)} |x(t) - \bar{x}(t)|, \quad \forall x,\bar{x}\in M$$

wobei α im weiteren fest gelegt wird.

$$d_2(T(x) - T(\bar{x})) = \max_{t\in J_\delta} e^{-\alpha(t-t_0)} \left| \int_{t_0}^{t} (f(s,x(s)) - f(s,\bar{x}(s))) ds \right|$$

$$\leq L \cdot \max_{t\in J_\delta} e^{-\alpha(t-t_0)} \int_{t_0}^{t} |x(s) - \bar{x}(s)| ds$$

$$= L \cdot \max_{t\in J_\delta} e^{-\alpha(t-t_0)} \int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(s-t_0)} |x(s) - \bar{x}(s)| e^{\alpha(s-t_0)} ds$$

$$\leq L \cdot \max_{t\in J_\delta} \max_{s\in J_\delta} e^{-\alpha(s-t_0)} |x(s) - \bar{x}(s)| \cdot e^{-\alpha(t-t_0)} \int_{t_0}^{t} e^{\alpha(s-t_0)} ds$$

$$= L \cdot d_2(x, \bar{x}) \max_{t\in J_\delta} e^{-\alpha(t-t_0)} \int_{t_0}^{t} e^{\alpha(s-t_0)} ds$$

$$\leq \frac{L}{\alpha} d(x, \bar{x}), \qquad \forall t \in J_\delta$$

Nun wählen wir $\alpha = 2L$, ist T eine Kontration.
Mit der Metrik d_2, ist das Existenzintervall $[t_0, t_0+\delta]$ nicht von der Lipschitz Konstant L abhängt. ∎

Picard Iteration (Numerik Methode).

Man definierte
$$x_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_0)\, ds$$
$$x_2(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_1(s))\, ds$$
$$\vdots$$
$$x_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_{n-1}(s))\, ds.$$

wobei $f \in C\left([t_0-\delta_0, t_0+\delta_0] \times \overline{B_r(x_0)}\right)$ vorausgesetzt wird.

Satz. Die Folge $x_n(t)$ konvergiert gegen $x(t) \in C^1(J_\delta)$ für $\delta \leq \min\{\delta_0, \frac{r}{m}\}$ und $m = \max_{\substack{|t-t_0|\leq\delta_0 \\ x\in \overline{B_r(x_0)}}} |f(t,x)|$.

Beweis. Wir zeigen dass $\{x_n(t)\}$ eine Cauchy Folge in $C(J_\delta)$ ist.

$$|x_2(t) - x_1(t)| \leq \int_{t_0}^{t} |f(s, x_1(s)) - f(s, x_0)|\, ds$$
$$\leq L \cdot \int_{t_0}^{t} |x_1(s_0) - x_0|\, ds_0$$
$$\leq L \cdot \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{s_0} |f(s_1, x_0)|\, ds_1\, ds_0$$
$$\leq m \cdot L \cdot \int_{t_0}^{t} (s_0 - t_0)\, ds_0 = mL \cdot \frac{(t-t_0)^2}{2}$$

Nachder ähnlichen Abschätzungen, erhält man

$$|x_n(t) - x_{n-1}(t)| \le \frac{m \cdot L^{n-1} |t-t_0|^n}{n!}$$

Dann $\forall\ p > n$, es gilt

$$|x_{n+p}(t) - x_n(t)| \le \sum_{k=n+1}^{n+p} |x_k - x_{k-1}|$$

$$\le \sum_{k=n+1}^{n+p} m \cdot \frac{L^{k-1} \delta^k}{k!}$$

$$= \frac{m}{L} \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{(L\delta)^k}{k!} \le \frac{m}{L} \cdot \frac{(L\delta)^{n+1}}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{(L\delta)^k}{k!}$$

$$\overset{\forall p}{\le} \frac{m}{L} \frac{(L\delta)^{n+1}}{(n+1)!} e^{L\delta}$$

Daraus folgt $\exists!\ x(t) \in C(J_\delta)$ so dass

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0.$$

Dann wegen der Stetigkeit von f, können wir auf beiden Seiten der Iteration den Grenzwert für $n \to \infty$ nehmen und.

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,ds.$$

<u>Beispiel 1.</u> Lokta-Volterra-Modell

$$\begin{cases} u' = u(1-v) \\ v' = v(u-\varepsilon) \end{cases}, \quad \varepsilon > 0 \qquad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} f_1(u,v) \\ f_2(u,v) \end{pmatrix} = f(u,v)$$

offenbar ~~sind~~ ist $f(u,v) = \begin{pmatrix} u(1-v) \\ v(u-\varepsilon) \end{pmatrix} \in C^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$

Dann ist f lokal Lipschitz stetig und der Satz von Picard-Lindelöf liefert zu jedem Anfangswert $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$ genau eine lokale Lösung.

<u>Beispiel 2</u> Das mathematische Pendel

$$\left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} v \\ -w^2 \sin u \end{pmatrix} \in C^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2). \right.$$

also hat das Problem zu jedem Anfangswert $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$ genau eine lokale Lösung

Korollar Sei $J \in [a,b]$, $t_0 \in (a,b)$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $b \in C(J;\mathbb{R}^n)$, $A \in C(J;\mathbb{R}^{n\times n})$ gegeben. Dann besitzt das AWP linearen Systems

$$\begin{cases} x'(t) = A(t)\,x(t) + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

genau eine lokale Lösung.

Fortsetzbarkeit und maximale Existenzintervall

$$(\text{AWP}) \quad \begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

wobei $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen ist, $f: G \to \mathbb{R}^n$ stetig und lokal Lipschitz in x.

Def. Für $(t_0, x_0) \in G$, sei $t_\pm(t_0,x_0) \in \mathbb{R}$ durch

$$t_+ := t_+(t_0,x_0) = \sup\{t_1 \geq t_0 \mid \text{auf } [t_0,t_1] \text{ besitzt (AWP) eine Lösung}\}$$

$$t_- := t_-(t_0,x_0) = \inf\{t_2 \leq t_0 \mid \text{auf } [t_2,t_0) \text{ besitzt (AWP) eine Lösung}\}$$

definiert. Die Intervalle $[t_0, t_+)$ und $(t_-, t_0]$ heißen maximale Existenzintervalle der Lösung nach rechts und nach links.

Die maximale Lösung von (AWP) wird definiert durch

$$x(t) = x_1(t) \quad \forall\, t \in [t_0, t_1] \quad \text{bzw.}$$
$$x(t) = x_2(t) \quad \forall\, t \in [t_2, t_0]$$

Der Existenzsatz stellt $t_+ > t_0$ und $t_- < t_0$.
und Globale Existenz bedeutet $t_+ = +\infty$ (nach rechts)
oder $t_- = -\infty$ (nach links)

Wenn $t_+ < \infty$ (bzw $t_- > -\infty$), was sind die Möglichkeiten?

- $\liminf\limits_{t \to t_+} \operatorname{dist}\big((t, x(t)), \partial G\big) = 0$
- $\liminf\limits_{t \to t_+} |x(t)| = \infty$

z.B. $\begin{cases} x' = -\sqrt{1-x^2}\,\frac{1}{t^2} \\ x(\frac{1}{\pi}) = 0 \end{cases}$ hat eine Lösung $x(t) = \sin\frac{1}{t}$, $t \in (0,\infty)$, $G = (0,\infty) \times (-1,1)$