Kapitel 3

Funktionenräume

3.1 Banachräume

Zuerst erinnern wir an ein paar grundlegende Begriffe.

Definition 3.1. *Ein normierter Vektorraum ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum X mit einer Norm, d.h. einer Abbildung $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:*

(i) $\|x\| \geq 0$ *und Gleichheit nur für* $x = 0$. **(ii)** $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ *für* $x \in X, \lambda \in \mathbb{K}$.

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *für* $x, y \in X$.

Eine Norm erzeugt durch $d(x, y) := \|x - y\|$ eine Metrik Ist X mit dieser Matrix vollständig, d.h. jede Cauchyfolge ist konvergent, so heißt $(X, \| \, \|)$ ein Banachraum.

Eine symmetrische, positiv definite Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf X heißt inneres Produkt oder Skalarprodukt auf X. Sie erzeugt durch $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ eine Norm auf X. Ist die erzeugte Metrik vollständig, so heißt $(X, \langle ., . \rangle)$ Hilbertraum.

Der Raum aller stetigen, linearen Abbildungen $\mathcal{L}(X, Y)$ zwischen zwei normierten Vektorräumen X, Y ist mit der Norm $\|T\| := \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\|$ wieder ein normierter Vektorraum, und ein Banachraum, wenn Y ein Banachraum ist. Der Dualraum $X' := \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ ist der Banachraum der stetigen linearen Funktionale auf X.

Wir konstruieren mit folgendem Kriterium von Lax und Milgram Isomorphien:

Satz von Lax und Migram 3.2. *Falls ein $T \in \mathcal{L}(X, X)$ auf einem Hilbertraum X folgendes erfüllt, dann ist T ein Isomorphismus, d.h. T ist bijektiv und $T^{-1} \in \mathcal{L}(X, X)$:*

$$\langle Tx, x \rangle \geq C|x|^2 \qquad \text{für ein } C > 0 \text{ und für alle } x \in X. \tag{3.1}$$

Beweis: Aus (3.1) folgt $C\|x\|^2 \leq \langle Tx, x\rangle \leq \|Tx\| \cdot \|x\|$ aund damit auch

$$C\|x\| \leq \|Tx\| \qquad \text{für alle } x \in X \tag{3.2}$$

Insbesondere ist T injektiv. Für eine Cauchyfolge $(Tx_m)_{m\in\mathbb{N}}$ im Bild von T, die gegen y konvergiert, ist $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ wegen (3.2) eine Cauchyfolge, und konvergiert gegen ein x mit $Tx = y$. Für $z \in (\operatorname{Bild} T)^\perp$ folgt $z = 0$ aus (3.1) und $0 = \langle Tz, z\rangle \geq C\|z\|^2$, und damit $\operatorname{Bild} T = \overline{\operatorname{Bild} T} = X$. Also ist T bijektiv und wegen (3.2) ist T^{-1} stetig. **q.e.d.**

Eine stetige Abbildung $T : X \to Y$ heißt kompakt, wenn die Abschlüsse der Bilder von beschränkten Mengen kompakt sind. Für jede beschränkte Folge $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ in X konvergiert eine Teilfolge von $(Tx_m)_{m\in\mathbb{N}}$. Die Verkettung einer lipschitzstetigen mit einer kompakten Abbildung ist wieder kompakt.

Lemma von Ehrling 3.3. *Es seien X, Y, Z Banachräume und $X \to Y \hookrightarrow Z$ zwei stetige, lineare Abbildungen, deren erste $T : X \to Y$ kompakt und deren zweite $I : Y \hookrightarrow Z$ injektiv ist. Dann existiert zu jedem $\epsilon > 0$ ein $C(\epsilon) < \infty$ mit*

$$\|Tx\|_Y \leq \epsilon\|x\|_X + C(\epsilon)\|ITx\|_Z \qquad \textit{für alle } x \in X.$$

Beweis: Andernfalls existiert ein $\epsilon > 0$ und eine Folge $(x_m)_{m\in\mathbb{N}} \in X$ mit

$$\epsilon\|x_m\|_X + m\|ITx_m\|_Z < \|Tx_m\|_Y = 1.$$

Dann ist $x_m \in X$ beschränkt, und, da T kompakt ist, konvergiert eine Teilfolge von $(Tx_m)_{m\in\mathbb{N}}$ gegen $y \in Y$. Der Grenzwert ist $y \neq 0$ wegen $\|y\|_Y = 1$. Aufgrund der Annahme konvergiert die entsprechende Teilfolge von $(ITx_m)_{m\in\mathbb{N}}$ gegen Null und wegen der Stetigkeit von I gegen $\|Iy\|_Z$, im Widerspruch zu der Injektivität von I. **q.e.d.**

Injektive kompakte Störungen von Isomorphismen sind wieder Isomorphismen:

Lemma 3.4. *Seien $T, K : X \to Y$ stetige lineare Abbildungen zwischen zwei Banachräumen X, Y. Die erste T sei ein Isomorphismus, und die zweite K sei kompakt. Ist $T - K$ injektiv oder surjektiv, so ist $T - K$ ein Isomorphismus.*

Bemerkung 3.5. *Allgemein kann man zeigen, dass eine kompakte Störung eines Isomorphismus ein Fredholmoperator vom Index 0 ist, siehe Lemma 4.45 Y.A. Abramovich, C.D. Aliprantis: "An Invitation to Operator Theory". Dabei heißt eine lineare stetige Abbildung $T : X \to Y$ zwischen Banachräumen Fredholmoperator, falls*

(i) $\operatorname{Bild} T \subset Y$ *ist abgeschlossenen,* **(ii)** $\dim \operatorname{Kern} T < \infty$.

(iii) $\dim \operatorname{Kokern} T = \dim(Y/\operatorname{Bild} T) < \infty$.

Die Differenz $\operatorname{Ind} T := \dim \operatorname{Kern} T - \dim \operatorname{Kokern} T$ *heißt der Index von* T*.*

Beweis: O.B.d.A. können wir $X = Y$ und $T = \mathbb{1}_X$ annehmen.
Zuerst sei $\mathbb{1} - K$ injektiv. Wir behaupten, dass dann folgendes gilt:

$$\|(\mathbb{1} - K)x\| \geq C\|x\| \qquad \text{für ein } C > 0 \text{ und alle } x \in X. \tag{3.3}$$

Andernfalls existiert eine Folge $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ in X mit $\|(\mathbb{1}-K)x_m\| < \frac{1}{m}\|x_m\|$ und o.B.d.A. $\|x_m\| = 1$. Nach Übergang zu einer Teilfolge konvergiert $Kx_m \to y$ und $x_m \to y$ wegen $\|(\mathbb{1} - K)x_m\| \to 0$. Dann ist $(\mathbb{1} - K)y$ der Grenzwert von $(\mathbb{1} - K)x_m \to 0$. Weil $\mathbb{1} - K$ injektiv ist folgt $y = 0$ im Widerspruch zu $1 = \|x_m\| \to \|y\|$. Das zeigt (3.3).

Dann ist für jede Cauchyfolge $((\mathbb{1} - K)x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ im $\operatorname{Bild}(\mathbb{1} - K)$ mit Grenzwert y auch $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge, mit einem Grenzwert x mit $(\mathbb{1} - K)x = y$. Also ist $\operatorname{Bild}(\mathbb{1} - K)$ abgeschlossen. Wenn $\mathbb{1} - K$ nicht surjektiv ist, sei $x \in X \setminus \operatorname{Bild}(\mathbb{1} - K)$. Mit $\mathbb{1} - K$ ist auch $(\mathbb{1} - K)^n$ injektiv und von der Form $\mathbb{1} - \tilde{K}$ mit $\tilde{K}$ kompakt:

$$(\mathbb{1} - K)^n = \mathbb{1} - \sum\nolimits_{l=1}^{n} \binom{n}{l} (-1)^{l-1} K^l.$$

Aus $(\mathbb{1}-K)^n x = (\mathbb{1}-K)^{n+1} y$ mit $y \in X$, würde $(\mathbb{1}-K)^n(x-(\mathbb{1}-K)y) = 0$ folgen, und da $(\mathbb{1}-K)^n$ injektiv ist, auch $x = (\mathbb{1}-K)y \in \operatorname{Bild}(\mathbb{1}-K)$ im Widerspruch zur Wahl von x. Das ergibt $(\mathbb{1}-K)^n x \in \operatorname{Bild}(\mathbb{1}-K)^n \setminus \operatorname{Bild}(\mathbb{1}-K)^{n+1}$ und $d((\mathbb{1}-K)^n x, \operatorname{Bild}(\mathbb{1}-K)^{n+1}) > 0$, weil $\operatorname{Bild}(\mathbb{1} - K)^{n+1}$ abgeschlossenen ist. Sei $y_n \in \operatorname{Bild}(\mathbb{1} - K)^{n+1}$ mit

$$\frac{\|(\mathbb{1} - K)^n x - y_n\|}{d((\mathbb{1} - K)^n x, \operatorname{Bild}(\mathbb{1} - K)^{n+1})} \leq 2 \quad \text{und} \quad \tilde{y}_n := \frac{(\mathbb{1} - K)^n x - y_n}{\|(\mathbb{1} - K)^n x - y_n\|} \in \operatorname{Bild}(\mathbb{1} - K)^n.$$

Aus $d((\mathbb{1} - K)^n x, \operatorname{Bild}(\mathbb{1} - K)^{n+1}) = d((\mathbb{1} - K)^n x - y_n, \operatorname{Bild}(\mathbb{1} - K)^{n+1})$ folgt

$$d(\tilde{y}_n, \operatorname{Bild}(\mathbb{1} - K)^{n+1}) = \frac{d((\mathbb{1} - K)^n x, \operatorname{Bild}(\mathbb{1} - K)^{n+1})}{\|(\mathbb{1} - K)^n x - y_n\|} \geq \frac{1}{2} \qquad \text{und}$$

$$\|K\tilde{y}_n - K\tilde{y}_m\| = \|\tilde{y}_n - \tilde{y}_m - (\mathbb{1} - K)\tilde{y}_n + (\mathbb{1} - K)\tilde{y}_m\| \geq 1/2 \qquad \text{für } m > n,$$

da $\tilde{y}_m + (\mathbb{1} - K)\tilde{y}_n - (\mathbb{1} - K)\tilde{y}_m \in \operatorname{Bild}(\mathbb{1} - K)^{n+1}$. Also konvergiert keine Teilfolge von $(K\tilde{y}_m)_{m\in\mathbb{N}}$, was $\|\tilde{y}_m\| = 1$ und der Kompaktheit von K widerspricht. Also ist $\mathbb{1} - K$ surjektiv und ein Isomorphismus, weil wegen (3.3) die Umkehrabbildung stetig ist.

*Nun sei $\mathbb{1}-K$ surjektiv. Wenn $\mathbb{1}-K$ nicht injektiv ist, wähle $0 \neq x_1 \in \operatorname{Kern}(\mathbb{1}-K)$. Da $\mathbb{1} - K$ surjektiv ist, existieren induktiv $(\mathbb{1} - K)x_{n+1} = x_n$ für $n \in \mathbb{N}$. Daraus folgt $(\mathbb{1} - K)^{n-1}x_n = x_1 \neq 0$ und $(\mathbb{1} - K)^n x_n = (\mathbb{1} - K)x_1 = 0$, also $x_n \in \operatorname{Kern}(\mathbb{1} - K)^n \setminus \operatorname{Kern}(\mathbb{1} - K)^{n-1}$ für $n \geq 1$. Wähle k_n im abgeschlossenen $\operatorname{Kern}(\mathbb{1} - K)^{n-1}$ mit

$$\frac{\|x_n - k_n\|}{d(x_n, \operatorname{Kern}(\mathbb{1} - K)^{n-1})} \leq 2 \qquad \text{und} \qquad \tilde{x}_n := \frac{x_n - k_n}{\|x_n - k_n\|} \in \operatorname{Kern}(\mathbb{1} - K)^n.$$

Dann folgt wieder $\quad d(\tilde{x}_n, \mathrm{Kern}(\mathbb{1} - K)^{n-1}) = \dfrac{d(x_n, \mathrm{Kern}(\mathbb{1} - K)^{n-1})}{\|x_n - k_n\|} \geq \dfrac{1}{2}$ und

$$\|K\tilde{x}_n - K\tilde{x}_m\| = \|\tilde{x}_n - \tilde{x}_m - (\mathbb{1} - K)\tilde{x}_n + (\mathbb{1} - K)\tilde{x}_m\| \geq 1/2 \qquad \text{für } m > n,$$

da $\tilde{x}_m + (\mathbb{1} - K)\tilde{x}_n - (\mathbb{1} - K)\tilde{x}_m \in \mathrm{Bild}(\mathbb{1} - K)^{n-1}$. Das widerspricht wieder der Kompaktheit von K und $\|\tilde{x}_m\| = 1$. Also ist $\mathbb{1} - K$ auch injektiv. **q.e.d.**

Fixpunktsatz von Schauder 3.6. *Sei X Banachraum, $G \subset X$ abgeschlossen und konvex und $T : G \to G$ stetig mit kompaktem $\overline{T[G]}$. Dann hat T einen Fixpunkt.*

Beweis: Weil G abschlossen ist, liegt $\overline{T[G]}$ in G und wird für jedes $\epsilon > 0$ durch endlich viele $(B(x_i, \epsilon))_{i=0,\ldots,n}$ mit $x_i \in \overline{T[G]}$ überdeckt. Die Schnittmenge K aller abgeschlossenen und konvexen Teilmengen von G, die $T[G]$ enthalten, ist in der konvexen Teilmenge

$$\overline{B(K_\epsilon, \epsilon)} = \bigcup\nolimits_{x \in K_\epsilon} \overline{B(x, \epsilon)} \text{ mit } K_\epsilon := \left\{ \sum\nolimits_i \lambda_i x_i \in X \,\middle|\, \lambda \in [0,1]^{n+1} \text{ mit } \sum\nolimits_i \lambda_i = 1 \right\}$$

enthalten. Die kompakte Menge K_ϵ wird durch endlich viele $B(y_j, \epsilon)$, und K durch $B(y_j, 2\epsilon)$ überdeckt. Das gilt für alle $\epsilon > 0$, und K ist vollständig, also kompakt. Sei

$$P_\epsilon : K \to K_\epsilon, \quad x \mapsto P_\epsilon(x) = \frac{\sum_{i=0}^n x_i d(x, K \setminus B(x_i, \epsilon))}{\sum_{i=0}^n d(x, K \setminus B(x_i, \epsilon))}$$

Als konvexe Linearkombination von $x_i \in B(x, \epsilon)$ liegt $P_\epsilon(x)$ in $B(x, \epsilon)$. Der minimale Wert von $y \mapsto \|x - y\|$ auf der kompakten Menge $K \setminus B(x_i, \epsilon)$ hängt wegen der Dreiecksungleichung lipschitzstetig von x ab. Also sind P_ϵ und $P_\epsilon \circ T|_{K_\epsilon} : K_\epsilon \to K_\epsilon$ stetig. Wegen der folgenden Übungsaufgabe ist K_ϵ hömoomoprh zu $K_\epsilon \simeq \overline{B(0,1)} \subset \mathbb{R}^{\dim K_\epsilon}$, wobei $\dim K_\epsilon$ die Dimension des von x_i aufgespannten affinen Raumes ist. Wegen dem Brouwerschen Fixpunktsatz hat $P_\epsilon \circ T|_{K_\epsilon}$ einen Fixpunkt $y_\epsilon \in K$ mit

$$\|y_\epsilon - T(y_\epsilon)\| = \|P_\epsilon(T(y_\epsilon)) - T(y_\epsilon)\| < \epsilon.$$

Eine Teilfolge von y_ϵ konvergiert für $\epsilon \downarrow 0$ gegen einen Fixpunkt von T. **q.e.d.**

Übungsaufgabe 3.7. *Die Abschlüsse zweier offener, nichtleerer, beschränkter und konvexer Teilmengen des $\mathbb{R}^d$ sind homöomorph.*

Satz von Leray-Schauder 3.8. *Sei T eine kompakte stetige Selbstabbildung auf einem Banachraum X. Wenn für ein $M > 0$ folgendes gilt, dann hat T einen Fixpunkt:*

$$\|x\| < M \qquad \text{für alle } x \in X \text{ mit } x = \sigma T x \text{ für ein } \sigma \in [0,1].$$

Beweis: Sei $\hat{T}$ die Verkettung $I \circ T$ von T mit der stetigen Abbildung

$$I : X \mapsto \overline{B(0,M)} \subset X, \quad x \mapsto f(\|x\|)x \quad \text{mit} \quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \begin{cases} 1 & \text{für } t \leq M, \\ \frac{M}{t} & \text{für } t > M. \end{cases}$$

Der Abschluss des Bildes $\hat{T}[\overline{B(0,M)}]$ ist kompakt und $\hat{T}$ hat wegen dem Fixpunktsatz von Schauder einen Fixpunkt $x \in \overline{B(0,M)}$. Wir zeigen $x \in B(0,M)$, so dass x auch ein Fixpunkt von T ist. Aus $\|Tx\| \geq M$ würde $\hat{T}x = \frac{M}{\|Tx\|}Tx = \sigma Tx$ mit $\sigma = \frac{M}{\|Tx\|} \in (0,1)$ und laut Voraussetung $\|x\| < M$ folgen, im Widerspruch zu $\|x\| = \|\hat{T}x\| = M$. **q.e.d.**

3.2 Hölderräume

Definition 3.9. (Hölderräume) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $k \in N_0$. Der Raum der k-fach stetig differenzierbaren Funktionen auf Ω bzw. auf A mit $\Omega \subset A \subset \bar{\Omega}$ ist*

$$C^k(\Omega) := \{u : \Omega \to \mathbb{R} \mid \partial^\gamma u \text{ existiert für } |\gamma| \leq k \text{ und ist stetig auf } \Omega\}$$
$$C^k(A) := \{u \in C^k(\Omega) \mid \partial^\gamma u \text{ setzt sich für } |\gamma| \leq k \text{ stetig auf } A \text{ fort}\}$$

und $C^\infty(A) := \cap_{k\in\mathbb{N}} C^k(A)$. Der Index 0 bezeichnet Funktionen mit kompaktem Träger:

$$C_0^k(A) := \{u \in C^k(A) | \operatorname{supp}(u) \Subset A\} \qquad C_0^\infty(A) := \cap_{k\in\mathbb{N}} C_0^k(A).$$

Für beschränktes Ω ist $C^k(\bar{\Omega})$ ein Banachraum mit $\quad \|u\|_{C^k(\Omega)} := \sum_{|\gamma|\leq k} \|\partial^\gamma u\|_{L^\infty(\Omega)}$.

Für $0 < \alpha \leq 1$ ist die Hölderkonstante definiert als $\quad \operatorname{höl}_{\Omega,\alpha} u := \sup_{x\neq y\in\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^\alpha}$

und eine Lipschitzkonstante $\operatorname{lip}_\Omega u := \operatorname{höl}_{\Omega,1} u$. Eine Funktion u mit endlicher Hölder- bzw. Lipschitzkonstante heißt hölder- bzw. lipschitzstetig. Der Raum der Funktionen mit beschränkten und hölderstetigen Ableitungen bis zur k-ten Ordnung ist

$$C^{k,\alpha}(\Omega) := \{u \in C^k(\Omega) \mid \|\partial^\gamma u\|_{L^\infty(\Omega)} + \operatorname{höl}_{\Omega,\alpha}(\partial^\gamma u) < \infty \text{ für } |\gamma| \leq k\}.$$

zusammen mit der Norm $\quad \|u\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} := \sum_{|\gamma|\leq k} (\|\partial^\gamma u\|_{L^\infty(\Omega)} + \operatorname{höl}_{\Omega,\alpha} \partial^\gamma u)$.

Wir nennen $C^{k,\alpha}(\Omega)$ Hölderräume. Schließlich sei für $\Omega \subset A \subset \bar{\Omega}$

$$C_{\text{loc}}^{k,\alpha}(A) := \{u \in C^k(\Omega) \mid \forall x \in A : \exists \varrho > 0 : u|_{A\cap B(x,\varrho)} \in C^{k,\alpha}(\Omega \cap B(x,\varrho))\}.$$

Übungsaufgabe 3.10. *Zeige dass für $\alpha > 1$ lokal $u \equiv \text{const}$ aus $\operatorname{höl}_{\Omega,\alpha} u < \infty$ folgt.*

Proposition 3.11. *$C^{k,\alpha}(\Omega)$ ist ein Banachraum.*

Beweis: Sei $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $C^{k,\alpha}(\Omega)$. Weil die stetigen und beschränkten Funktionen auf einem metrischen Raum mit $\|\cdot\|_\infty$ ein Banachraum sind, konvergiert $\partial^\gamma u_j$ für $|\gamma|\leq k$ gleichmäßig gegen eine solche Funktion u_γ. Für $\gamma_i \geq 1$ folgt aus

$$\partial^{\gamma-e_i}u_j(x+te_i) = \partial^{\gamma-e_i}u_j(x) + \int_0^t \partial^\gamma u_j(x+se_i)\,\mathrm{d}s \quad \text{auf} \quad \{x+te_i \mid |t|<\epsilon\}\subset\Omega$$

die analoge Gleichung für die entsprechenden Grenzwerte. Deshalb folgt $u_\gamma = \partial^\gamma u$ mit $u = \lim u_j$ aus der gleichmäßigen Konvergenz aller partiellen Ableitungen der Ordnung $\leq k$. Genauso konvergiert $\frac{\partial^\gamma u_j(x)-\partial^\gamma u_j(y)}{|x-y|^\alpha}$ auf $\{(x,y)\in\Omega\times\Omega \mid x\neq y\}$ gleichmäßig gegen eine stetige beschränkte Funktion. Der Grenzwert stimmt mit dem punktweisen Grenzwert $\frac{\partial^\gamma u(x)-\partial^\gamma u(y)}{|x-y|^\alpha}$ überein. Also kovergiert u_j in $C^{k,\alpha}(\Omega)$ gegen u. **q.e.d.**

Das Produkt zweier hölderstetiger Funktionen ist wieder hölderstetig.

Proposition 3.12. *Seien $k\in\mathbb{N}_0$ und $0<\alpha\leq 1$. Dann gilt für $u,v\in C^{0,\alpha}(\Omega)$*

$$\text{höl}_{\Omega,\alpha}(uv) \leq \text{höl}_{\Omega,\alpha}\,u\|v\|_{L^\infty\Omega} + \|u\|_{L^\infty(\Omega)}\,\text{höl}_{\Omega,\alpha}\,v$$

und für $u,v\in C^{k,\alpha}(\Omega)$ $\quad \|uv\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} \leq C(n,k)\|u\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)}\|v\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)}.$

Beweis: Die erste Abschätzung folgt aus folgender Ungleichung für $x,y\in\Omega$:

$$\begin{aligned}|uv(x)-uv(y)| &\leq |u(x)-u(y)|\;|v(x)| + |u(y)|\;|v(x)-v(y)|\\ &\leq \left(\text{höl}_{\Omega,\alpha}\,u\|v\|_{L^\infty(\Omega)} + \|u\|_{L^\infty(\Omega)}\,\text{höl}_{\Omega,\alpha}\,v\right)|x-y|^\alpha,\end{aligned}$$

Die zweite folgt aus dieser unter Beachtung der Produktregel (1.1). **q.e.d.**

Proposition 3.13. *Für $\Omega\Subset\mathbb{R}^n$ und $0<\beta<\alpha$ sind folgende Einbettungen kompakt:*

$$C^{0,\alpha}(\Omega)\hookrightarrow C^{0,\beta}(\Omega)\hookrightarrow C^0(\bar{\Omega}).$$

Beweis: Eine Funktion $u\in C^{0,\alpha}(\Omega)$ ist gleichmäßig stetig und läßt sich daher stetig auf $\bar{\Omega}$ fortsetzen. Klarerweise ist die Einbettung $C^{0,\alpha}(\Omega)\hookrightarrow C^0(\bar{\Omega})$ stetig. Eine in $C^{0,\alpha}(\Omega)$ beschränkte Folge von Funktionen $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ ist auf $\bar{\Omega}$ gleichgradig stetig beschränkt. Da $\bar{\Omega}$ kompakt ist, gibt es nach dem Satz von Arzela-Ascoli eine gleichmäßig konvergente Teilfolge, und die Einbettung der Hölderräume in den Raum der bis zum Rand stetigen Funktionen ist kompakt. Für $0<\beta<\alpha$, $x\neq y\in\Omega$ und $\delta>0$ gilt

$$\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\beta} \leq \text{höl}_{\Omega,\alpha}\,u\;\delta^{\alpha-\beta} \qquad \text{wenn} \qquad |x-y|\leq\delta \tag{3.4}$$

$$\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\beta} \leq 2\|u\|_{L^\infty(\Omega)}\;\delta^{-\beta} \qquad \text{wenn} \qquad |x-y|\geq\delta. \tag{3.5}$$

Für $\delta \geq \operatorname{diam} \Omega$ folgt daraus die Beschränktheit von $C^{0,\alpha}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\beta}(\Omega)$:

$$\operatorname{höl}_{\Omega,\beta} u \leq \operatorname{höl}_{\Omega,\alpha} u \operatorname{diam}^{\alpha-\beta}(\Omega)$$

Nach Übergang zu einer Teilfolge konvergiert also eine in $C^{0,\alpha}(\Omega)$ beschränkte Folge u_j gleichmäßig in $C^0(\bar{\Omega})$ gegen eine Funktion u. Mit (3.4) und (3.5) folgt für alle $\delta > 0$

$$\begin{aligned}\limsup_{i,j\to\infty} \operatorname{höl}_{\Omega,\beta}(u_i - u_j) &:= \lim_{k\to\infty} \sup_{i,j\geq k} \operatorname{höl}_{\Omega,\beta}(u_i - u_j) \leq \\ &\leq \limsup_{i,j\to\infty} \delta^{\alpha-\beta}(\operatorname{höl}_{\Omega,\alpha} u_i + \operatorname{höl}_{\Omega,\alpha} u_j) + \limsup_{i,j\to\infty} 2\delta^{-\beta}\|u_i - u_j\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\delta^{\alpha-\beta}.\end{aligned}$$

Also ist u_j eine Cauchyfolge, und konvergiert damit in $C^{0,\beta}(\Omega)$. **q.e.d.**

Für Einbettungen mit $k > 0$ muss $\partial\Omega$ eine gewisse Regularität aufweisen.

Definition 3.14. *Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{N}_0$ und $0 < \alpha \leq 1$. Wir nennen $\partial\Omega$ C^k- bzw. $C^{k,\alpha}$-regulär ($\partial\Omega \in C^k$ bzw. $C^{k,\alpha}$), wenn $\partial\Omega$ lokal der Graph einer C^k bzw. $C^{k,\alpha}$ Funktion ist. D,h. für alle $x_0 \in \partial\Omega$ existieren $\varrho > 0$, $M < \infty$ und $\varphi \in C^k(B^{n-1}(0,\varrho))$ bzw. $C^{k,\alpha}(B^{n-1}(0,\varrho))$ mit $\varphi(0) = 0$ und $\|\varphi\|_\infty < M$, so dass nach einer geeigneten Rotation*

$$\{x - x_0 \mid x \in \Omega\} \cap B^{n-1}(0,\varrho) \times (-M, M) = \{(y,t) \in B^{n-1}(0,\varrho) \times (-M,M) \mid t > \varphi(y)\}.$$

Damit erhalten wir den Kompaktheitsansatz für Hölderräume mit $k > 0$.

Proposition 3.15. *Seien $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ offen $\partial\Omega \in C^{0,1}$, $k \geq l \in \mathbb{N}_0$, $0 < \beta, \alpha \leq 1$ mit $k + \alpha > l + \beta$. Dann sind die Einbettungen $C^{k,\alpha}(\Omega) \hookrightarrow C^{l,\beta}(\Omega)$ kompakt.*

Beweis: Für $k = l$ folgt die Aussage sofort aus Proposition 3.13. Auch der allgemeine Fall folgt aus Proposition 3.13, wenn wir zeigen, dass die Einbettung

$$C^1(\bar{\Omega}) \hookrightarrow C^{0,1}(\Omega) \tag{3.6}$$

wohldefiniert und stetig ist. Da $\partial\Omega \in C^{0,1}$, hat Ω nur endlich viele Zusammenhangskomponenten, und diese haben alle positiven Abstand δ zueinander. Für $x, y \in \Omega$, die nicht in derselben Zusammenhangskomponente liegen, gilt somit

$$|u(x) - u(y)| \leq 2\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C(\Omega)\|u\|_{L^\infty(\Omega)}|x - y| \qquad \text{mit} \qquad C(\Omega) = \tfrac{2}{\delta}.$$

Für $x, y \in \Omega$ in der selben Zusammenhangskomponente gibt es nach dem folgenden Lemma einen stetig differenzierbaren Weg $\gamma : [0,1] \to \Omega$, mit $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$ und

$$L(\gamma) = \int_0^1 |\gamma'(t)| \,\mathrm{d}t \leq C(\Omega)|x - y|.$$

Daraus folgt für $u \in C^1(\bar{\Omega})$

$$|u(x) - u(y)| \leq \int_0^1 |\nabla u(\gamma(t)||\gamma'(t)| \, \mathrm{d}t \leq \|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)} C(\Omega)|x - y|. \tag{3.7}$$

Also ist $\mathrm{lip}_\Omega \, u = \mathrm{höl}_{\Omega,1} \, u \leq C(\Omega)\|u\|_{C^1(\bar{\Omega})}$, und (3.6) wohldefiniert und stetig. **q.e.d.**

Lemma 3.16. *Es sei $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ offen und zusammenhängend, $\partial\Omega \in C^{0,1}$. Dann gibt es $C(\Omega) < \infty$, so dass für zwei beliebige Punkte $x, y \in \Omega$ ein stetig differenzierbarer Weg $\gamma : |0, 1| \to \Omega$ mit $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$ und folgender Eigenschaft existiert:*

$$L(\gamma) = \int_0^1 |\gamma'(t)| \, \mathrm{d}t \leq C(\Omega)|x - y|. \tag{3.8}$$

Beweis: Für $x_i \in \partial\Omega$ setzen wir nach einer geeigneten Rotation

$$U_i := \big\{x \in \Omega \mid x - x_i \in B^{n-1}(0, \varrho_i) \times (-M_i, M_i)\big\}$$

mit $\varrho_i, M_i > 0$, $\varphi_i \in C^{0,1}(B^{n-1}(0, \varrho))$ und $\|\varphi_i\|_\infty < M$ wie in Definition 3.14. Weil die Halbgeraden mit Steigung $\pm \, \mathrm{lip}(\varphi_i)$ weg vom Rand den Rand nicht schneiden, ist (3.8) für $U_i \cap \Omega$ mit $C_i := \sqrt{1 + \mathrm{lip}^2(\varphi_i)} < \infty$ erfüllt. Für $x_i \in \Omega$ wählen wir $U_i := B(x_i, \varrho_i) \Subset \Omega$, und sehen dass (3.8) für U_i mit $C_j = 1$ erfüllt ist. Da $\bar{\Omega}$ kompakt ist, existieren endlich viele $x_1, \ldots, x_N \in \bar{\Omega}$ mit $\bar{\Omega} \subset U_1 \cup \ldots \cup U_N$. Für jedes $i = 1, \ldots, N$ ist (3.8) für $U_i \cap \Omega$ mit einem $C_i < \infty$ erfüllt. Wir setzen $C = \max\{C_1, \ldots, C_N\}$. Die stetige Funktion $\max\{\delta_1, \ldots, \delta_N\}$ mit $\delta_i(x) = d(x, \bar{\Omega} \setminus U_i)$ ist auf $\bar{\Omega}$ nicht kleiner als $\delta > 0$, so dass beliebige $x, y \in \Omega$ mit $|x - y| < \delta$ in einem U_i enthalten sind. Also ist (3.8) für $x, y \in \Omega$ mit $|x - y| < \delta$ mit $C = \max\{C_1, \ldots, C_N\}$ erfüllt.

Da Ω zusammenhängend ist, existiert für $x, y \in \Omega$ mit $|x - y| \geq \delta$ ein stetig differenzierbarer Weg γ von x nach y mit (er durchläuft jedes U_i höchstens einmal)

$$L(\gamma) \leq \sum\nolimits_{i=1}^N C_i \, \mathrm{diam}(U_i) \leq \frac{|x - y|}{\delta} \sum\nolimits_{i=1}^N C_i \, \mathrm{diam}(U_i) =: C_0|x - y|.$$

Mit $C(\Omega) := \max\{C_0, \ldots, C_N\} < \infty$ ist (3.8) erfüllt, und das Lemma bewiesen. **q.e.d.**

3.3 Soboleväume

Wir beginnen mit einer kurzen Erinnerung an L^p-Räume.

Definition 3.17. *(L^p-Räume) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, d.h. $\mathcal{A}$ eine σ–Algebra auf Ω und μ ein σ–additives Maß auf $\mathcal{A}$. Für $1 \leq p \leq \infty$ und meßbares $u : \Omega \to \mathbb{K}$ sei*

$$\|u\|_{L^p(\mu)} := \begin{cases} \left(\int_\Omega |u|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p} & \text{für } 1 \leq p < \infty, \\ \inf\{\lambda \mid \mu\text{-fast überall gilt } |u| \leq \lambda\} & \text{für } p = \infty, \end{cases}$$

und definieren den Raum der p–integrablen bzw. der beschränkten meßbaren Funktionen

$$L^p(\mu) := L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu) := \left\{u : \Omega \to \mathbb{K} \text{ meßbar } \mid \|u\|_{L^p(\Omega)} < \infty\right\},$$

wobei wir wie üblich Funktionen identifizieren, die μ–fast überall übereinstimmen. $L^p(\mu)$ ist mit der Norm $\|\cdot\|_{L^p(\mu)}$ ein Banachraum und für $p = 2$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle u, v\rangle := \int_\Omega u\,\bar{v}\,\mathrm{d}\mu$$

ein Hilbertraum. Für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ messbar schreiben wir abkürzend $L^p(\Omega) := L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, wobei μ das n–dimensionale Lebesguemaß ist und $\mathcal{A}$ die σ–Algebra der lebesguemeßbaren Teilmengen von Ω bezeichnet. Weiter setzen wir

$$L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega) := \{u : \Omega \to \mathbb{K} \mid u|_{\Omega'} \in L^p(\Omega') \text{ für alle } \Omega' \Subset \Omega\},$$

wobei u_m in $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ gegen u konvergiert, falls $u_m|_{\Omega'} \to u|_{\Omega'}$ in $L^p(\Omega')$ für alle $\Omega' \Subset \Omega$.

Für $1 \leq p \leq \infty$ heißt $1 \leq q \leq \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ der zu p konjugierte Exponent, und es gilt für $u \in L^p(\mu), v \in L^q(\mu)$ die Hölderungleichung

$$\left|\int_\Omega u\,v\,\mathrm{d}\mu\right| \leq \|u\|_{L^p(\mu)}\|v\|_{L^q(\mu)}.$$

Für $1 \leq p, q, r \leq \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ folgt für $u \in L^p(\mu), v \in L^q(\mu)$

$$\|uv\|_{L^r(\mu)} = \|u^r v^r\|_{L^1(\mu)}^{\frac{1}{r}} \leq \|u^r\|_{L^{\frac{p}{r}}(\mu)}^{\frac{1}{r}} \|v^r\|_{L^{\frac{q}{r}}(\mu)}^{\frac{1}{r}} = \|u\|_{L^p(\mu)}\|v\|_{L^q(\mu)}.$$

$$\|u\|_{L^r(\mu)} \leq \mu(\Omega)^{\frac{1}{r}-\frac{1}{p}}\|u\|_{L^p(\mu)} \qquad \text{für } \mu(\Omega) < \infty \text{ und } 1 \leq r \leq p < \infty \tag{3.9}$$

Mit Induktion erhalten wie die verallgemeinerte Hölderungleichung

$$\left|\int_\Omega u_1 \ldots u_m \,\mathrm{d}\mu\right| \leq \|u_1\|_{L^{p_1}(\mu)} \cdots \|u_m\|_{L^{p_m}(\mu)} \qquad \text{für} \qquad \tfrac{1}{p_1} + \ldots + \tfrac{1}{p_m} = 1. \tag{3.10}$$

Auf einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ist für $1 \leq p < \infty$ jede Treppenfunktion in $L^p(\Omega)$ ein Grenzwert von Funktionen in $C_0(\Omega)$. Also liegt $C_0(\Omega)$ dicht in $L^p(\Omega)$.

Diese Aussage wollen wir verschärfen, indem wir zeigen, dass die unendlich oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger in Ω, d.h. $C_0^\infty(\Omega)$, für $1 \leq p < \infty$ in $L^p(\Omega)$ dicht liegen. Dazu wählen wir $\lambda \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \lambda \geq 0$ mit $\int \lambda = 1$ und $\operatorname{supp} \lambda \subset \overline{B(0,1)}$. Wir definieren den glatten Mollifier $\lambda_\epsilon(x) := \epsilon^{-n}\lambda(\frac{x}{\epsilon})$ für $\epsilon > 0$ und sehen $\operatorname{supp} \lambda_\epsilon \subset \overline{B(0,\epsilon)}$ und $\int \lambda_\epsilon = 1$. Für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ definieren wir

$$u_\epsilon(x) := (\lambda_\epsilon * u)(x) := \int \lambda_\epsilon(x-y)u(y)\,\mathrm{d}^{\mathrm{n}}y \text{ für } x \in \Omega \text{ mit } \epsilon < d(x, \partial\Omega). \tag{3.11}$$

Wir sehen $u_\epsilon \in C^\infty(\Omega')$ für $\Omega' \Subset \Omega$ mit $d(\Omega', \partial\Omega) > \epsilon$. Für $u \in L^1(\Omega)$ können wir u_ϵ auf ganz $\mathbb{R}^n$ definieren mit $u_\epsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Für $\operatorname{supp}(u) \Subset \Omega$ und $\epsilon < d(\operatorname{supp}(u), \partial\Omega)$ gilt $u_\epsilon \in C_0^\infty(\Omega)$. Für $u = \chi_{\Omega''}$ mit $\Omega' \Subset \Omega'' \Subset \Omega$ und $\epsilon < \min\{d(\Omega', \partial\Omega''), d(\Omega'', \partial\Omega)\}$ gilt

$$u_\epsilon \in C_0^\infty(\Omega) \qquad 0 \leq u_\epsilon \leq 1 \qquad u_\epsilon \equiv 1 \text{ auf } \Omega'.$$

u_ϵ approximiert u in lokalen Räumen, wie die folgende Proposition zeigt.

Proposition 3.18. *(i) Für $u \in L^p(\Omega), 1 \leq p < \infty$ gilt $u_\epsilon \to u$ in $L^p(\Omega)$.*

(ii) Für $u \in C^0(\Omega)$ gilt für alle $\Omega' \Subset \Omega$ $u_\epsilon \to u$ in $C^0(\bar{\Omega}')$.

(iii) Für $u \in C^{k,\alpha}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, $0 < \alpha \leq 1$, $k \in \mathbb{N}_0$, gilt für $0 < \beta < \alpha$ $u_\epsilon \to u$ in $C^{k,\beta}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, und für alle $\Omega' \Subset \Omega$ gilt $\|u_\epsilon\|_{C^{k,\alpha}(\Omega')} \leq \|u\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)}$, falls $\epsilon < d(\Omega', \partial\Omega)$.

Beweis: Für $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega), x \in \Omega' \Subset \Omega'' \Subset \Omega$ und $\epsilon < d(\Omega', \partial\Omega'')$ gilt, wegen $\int \lambda_\epsilon = 1$,

$$u_\epsilon(x) - u(x) = \int_{\Omega''} \lambda_\epsilon(x-y)(u(y) - u(x))\,\mathrm{d}^{\mathrm{n}}y = \int_{B(0,\epsilon)} \lambda_\epsilon(y)(u(x-y) - u(x))\,\mathrm{d}^{\mathrm{n}}y. \tag{3.12}$$

(i) Wir identifizieren $L^p(\Omega)$ mit dem Banachunterraum $\{f \in L^p(\mathbb{R}^n) \mid f|_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} = 0\}$. Weil $\|f|_\Omega\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ für alle $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ gilt, genügt es $\Omega = \mathbb{R}^n$ zu betrachten. Wegen $\lambda_\epsilon \geq 0$, $\int \lambda_\epsilon = 1$ und der Konvexität von $x \mapsto |x|^p$ folgt[1] $\left(\int \lambda_\epsilon |f|\right)^p \leq \int \lambda_\epsilon |f|^p$ für $f \in L^p(B(0,\epsilon))$ aus Jensens Ungleichung[2]. Dann gilt für $1 \leq p < \infty$ und zuerst für alle Treppenfunktionen, und dann, weil diese dicht liegen, für alle $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und $\epsilon \downarrow 0$

$$\begin{aligned}\|u_\epsilon - u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{B(0,\epsilon)} \lambda_\epsilon(y)|u(x-y) - u(x)|^p\,\mathrm{d}^{\mathrm{n}}y\,\mathrm{d}^{\mathrm{n}}x = \\ &= \int_{B(0,\epsilon)} \lambda_\epsilon(y)\|u(\cdot - y) - u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}\,\mathrm{d}^{\mathrm{n}}y \leq \sup_{\{y \mid |y| < \epsilon\}} \|u(\cdot - y) - u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \to 0.\end{aligned} \tag{3.13}$$

[1] Diese Ungleichung folgt auch aus der allgemeinen Hölderungleichung (3.9) für das Maß $\lambda_\epsilon\,\mathrm{d}\mu$.

[2] In Rudin: "Real and Complex Analysis" findet sich folgender einfache Beweis: Sei $t = \int \lambda_\epsilon |f|$. Aus der Konvexität von $s \mapsto s^p$ folgt $s^p \geq t^p + pt^{p-1}(s-t)$ (Tangente an $s \mapsto s^p$) für $s \geq 0$, also $|f(x)|^p \geq t^p + pt^{p-1}(|f(x)| - t)$. Daraus folgt $\int \lambda_\epsilon |f|^p \geq \int \lambda_\epsilon t^p + pt^{p-1} \int \lambda_\epsilon(|f| - t)) = t^p = (\int \lambda_\epsilon |f|)^p$.

(ii) Für $u \in C^0(\Omega)$ und $\Omega' \Subset \Omega'' \Subset \Omega$ ist u gleichmäßig stetig auf Ω''. Aus (3.12) folgt

$$\|u_\epsilon - u\|_{L^\infty(\Omega')} \leq \sup_{\{(x,y)|x\in\Omega',|x-y|<\epsilon\}} |u(x) - u(y)| \to 0.$$

(iii) Für $x \in \Omega'$ gilt $B(x,\epsilon) \Subset \Omega$, $\lambda_\epsilon(x - .) \in C_0^\infty(\Omega)$ und für $|\gamma| \leq k$

$$\partial^\gamma u_\epsilon(x) = \int_\Omega \lambda_\epsilon(x-y)\partial^\gamma u(y)\,\mathrm{d}^\mathrm{n} y.$$

Daher genügt es $k = 0$ zu betrachten. Aus (ii) folgt $\|u_\epsilon - u\|_{L^\infty(\Omega')} \to 0$. Mit (3.12) folgt aus (3.4) für $x_1 \neq x_2 \in \Omega'$ und $x_1 - y \neq x_2 - y$ oder für $x_1 \neq x_1 - y$ und $x_2 \neq x_2 - y$

$$\begin{aligned}|(u_\epsilon - u)(x_1) - (u_\epsilon - u)(x_2)| &\leq \int_{B(0,\epsilon)} \lambda_\epsilon(y)|(u(x_1-y) - u(x_1)) - (u(x_2-y) - u(x_2))|\,\mathrm{d}^\mathrm{n} y\\ &\leq 2\,\mathrm{höl}_{\Omega'',\alpha}(u)\min\{|x_1-x_2|^\alpha, \epsilon^\alpha\} \leq 2\epsilon^{\alpha-\beta}\,\mathrm{höl}_{\Omega'',\alpha}(u)|x_1-x_2|^\beta.\end{aligned}$$

Dies ergibt $\mathrm{höl}_{\Omega',\beta}(u_\epsilon - u) \leq 2\epsilon^{\alpha-\beta}\,\mathrm{höl}_{\Omega'',\alpha}\,u \to 0$ für $\epsilon \downarrow 0$. Weiter gilt

$$|u_\epsilon(x)| \leq \int_{B(0,\epsilon)} \lambda_\epsilon(y)|u(x-y)|\,\mathrm{d}^\mathrm{n} y \leq \|u\|_{L^\infty(\Omega)} \qquad \text{und}$$
$$|u_\epsilon(x_1) - u_\epsilon(x_2)| \leq \int_{B(0,\epsilon)} \lambda_\epsilon(y)|u(x_1-y) - u(x_2-y)|\,\mathrm{d}^\mathrm{n} y \leq \mathrm{höl}_{\Omega,\alpha}(u)|x_1-x_2|^\alpha.$$

Dies ergibt $$\|u_\epsilon\|_{C^{k,\alpha}(\Omega')} \leq \|u\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)}.$$ **q.e.d.**

Daraus folgt sofort

Proposition 3.19. $C_0^\infty(\Omega)$ *liegt dicht in* $L^p(\Omega)$ *für* $1 \leq p < \infty$.

Beweis: Die Treppenfunktionen mit kompaktem Träger in Ω liegen dicht in $L^p(\Omega)$. Für $u \in L^p(\Omega), \mathrm{supp}(u) \Subset \Omega' \Subset \Omega$, $0 < \epsilon < d(\mathrm{supp}(u), \partial\Omega')$ gilt $u_\epsilon \in C_0^\infty(\Omega)$. Mit Proposition 3.18 (ii) folgt für $\epsilon \downarrow 0$ $\quad \|u_\epsilon - u\|_{L^p(\Omega)} \leq \mu(\Omega')^{1/p}\|u_\epsilon - u\|_{L^\infty(\Omega')} \to 0$. **q.e.d.**

Wir kommen zu den Sobolevräumen.

Definition 3.20. (Sobolevräume) *Auf einer offenen nicht leeren Menge* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *sei für* $1 \leq p \leq \infty$ *der Raum der Sobolevfunktionen mit* k*-fachen* L^p*-Ableitungen*

$$W^{k,p}(\Omega) := \left\{u \in L^p(\Omega) \,\middle|\, \forall|\gamma| \leq k \exists u_\gamma \in L^p(\Omega) : \int u_\gamma\varphi\,\mathrm{d}\mu = (-1)^{|\gamma|}\int u\partial^\gamma\varphi\,\mathrm{d}\mu \forall\varphi \in C_0^\infty(\Omega)\right\}.$$

Wir nennen $\partial^\gamma u := u_\gamma$ *die schwache Ableitung von* u *und definieren die Norm*

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega} := \sum\nolimits_{0\leq\gamma\leq k} \|\partial^\gamma u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Für $1 \leq p \leq \infty$ sei $W_0^{k,p}(\Omega)$ der Abschluß $\overline{C_0^\infty(\Omega)} \subset W^{k,p}(\Omega)$ der unendlich oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger. Für $\Omega \subset A \subset \bar{\Omega}$ sei

$$W_{\mathrm{loc}}^{k,p}(A) := \{u \in L_{\mathrm{loc}}^p(\Omega) \mid \forall x \in A\ \exists \varrho > 0 : u|_{\Omega \cap B(x,\varrho)} \in W^{k,p}(\Omega \cap B(x,\varrho))\}.$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise setzen wir abkürzend $W^{0,p}(\Omega) := L^p(\Omega)$. Wir nennen $W_0^{k,p}(\Omega)$ und $W^{k,p}(\Omega)$ Sobolevräume und ihre Elemente Sobolevfunktionen.

Proposition 3.21. *$W^{k,p}(\Omega)$ und $W_0^{k,p}(\Omega)$ sind Banachräume, und für $p = 2$ sind $W^{k,2}(\Omega)$ und $W_0^{k,2}(\Omega)$ mit folgenden Skalarprodukt Hilberträume:*

$$\langle u, v\rangle := \sum\nolimits_{|\gamma| \leq k} \int_\Omega \partial^\gamma u \partial^\gamma \bar{v} \,\mathrm{d}\mu$$

Beweis: $W^{k,p}(\Omega)$ ist isometrisch zum abgeschlossenen Unterraum

$$W^{k,p}(\Omega) \cong \left\{(u_\gamma)_{0 \leq |\gamma| \leq k} \in L^p(\Omega) \times \ldots \times L^p(\Omega) \,\middle|\, \int u_\gamma \varphi \,\mathrm{d}\mu = (-1)^{|\gamma|} \int u_0 \partial^\gamma \varphi \,\mathrm{d}\mu\ \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)\right\}$$

von $L^p(\Omega) \times \ldots \times L^p(\Omega)$ und damit ein Banachraum ist. Als abgeschlossener Unteraum von $W^{k,p}(\Omega)$ ist damit auch $W_0^{k,p}(\Omega)$ ein Banachraum. Die Normen der oben definierten Skalarprodukte sind äquivalent zu den Normen von $W^{k,2}(\Omega)$ und $W_0^{k,2}(\Omega)$. **q.e.d.**

Folgende Proposition gibt eine Charakterisierung der Sobolevräume für $1 < p \leq \infty$.

Proposition 3.22. *Für $1 < p \leq \infty, k \in \mathbb{N}$ gilt $u \in W^{k,p}(\Omega)$ genau dann, wenn $u \in L^p(\Omega)$ und für ein $M < \infty$, $|\gamma| \leq k$, $q = \frac{p}{p-1}$ folgendes gilt ($\Leftrightarrow \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} \leq C(n,k)M$):*

$$|\partial^\gamma F_u(\varphi)| \leq M \|\varphi\|_{L^q(\Omega)} \quad \text{mit } \partial^\gamma F_u : C_0^\infty(\Omega) \to \mathbb{R} \quad \partial^\gamma F_u(\varphi) := (-1)^{|\gamma|} \int_\Omega u \partial^\gamma \varphi \,\mathrm{d}\mu.$$

Beweis: folgt aus der isometrischen Dualität $L^q(\Omega)' = L^p(\Omega)$ für $1 < p \leq \infty$. **q.e.d.**

Proposition 3.23. *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, zusammenhängend, und $u \in W_{\mathrm{loc}}^{1,1}(\Omega)$ mit $\nabla u = 0$. Dann ist fast überall $u \equiv \mathrm{const}$ auf Ω.*

Beweis: Wir betrachten $x_0 \in \Omega$ und $B(x_0, 2\varrho) \subset \Omega$. Für $\epsilon < \varrho$ ist die Faltung $u_\epsilon \in C^\infty(B(x_0,\varrho))$ und für $x \in B(x_0,\varrho)$ ist $\lambda_\epsilon(x - .) \in C_0^\infty(B(x_0, 2\varrho)) \subset C_0^\infty(\Omega)$. Dies ergibt

$$\nabla u_\epsilon(x) = \int \nabla \lambda_\epsilon(x-y) u(y) \,\mathrm{d}^n y = \int \lambda_\epsilon(x-y) \nabla u(y) \,\mathrm{d}^n y = 0.$$

Daher ist $u_\epsilon \equiv \mathrm{const}$ auf $B(x_0,\varrho)$, und, da $u_\epsilon \to u$ in $L^1(B(x_0,\varrho))$, ist fast überall $u \equiv \mathrm{const}$ auf $B(x_0,\varrho)$. Da Ω zusammenhängend ist, folgt $u^{-1}[\{u(x_0)\}] = \Omega$. **q.e.d.**

Sobolevfunktionen können lokal durch glatte Faltungen (3.11) approximiert werden.

Proposition 3.24. *(i) Für* $u \in W^{k,p}(\Omega), k \in \mathbb{N}$ *und* $1 \leq p < \infty$ *gilt* $u_\epsilon \to u$ *in* $W^{k,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

(ii) Für $\operatorname{supp}(u) \Subset \Omega$ *oder* $\Omega = \mathbb{R}^n$ *existieren* $u_m \in C_0^\infty(\Omega)$ *mit* $u_m \to u$ *in* $W^{k,p}(\Omega)$, *also* $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$ *wenn* $\operatorname{supp}(u) \Subset \Omega$, *und* $W^{k,p}(\mathbb{R}^n) = W_0^{k,p}(\mathbb{R}^n)$.

(iii) Für $\Omega = \mathbb{R}^n_+ := \mathbb{R}^{n-1} \times (0,\infty)$ *existieren* $u_m \in C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ *mit* $u_m \to u$ *in* $W^{k,p}(\mathbb{R}^n_+)$, *d.h.* $W^{k,p}(\mathbb{R}^n_+) = \overline{C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}^n_+})}$.

Beweis: (i) Wir betrachten die in (3.11) definierte Faltung $u_\epsilon := \lambda_\epsilon * u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Für $x \in \Omega, \epsilon < d(x, \partial\Omega)$ ist $\lambda_\epsilon(x - .) \in C_0^\infty(\Omega)$, und wir sehen für $|\gamma| \leq k$

$$\begin{aligned}\partial^\gamma u_\epsilon(x) &= \int_\Omega \partial^\gamma \lambda_\epsilon(x-y)u(y)\,\mathrm{d}^n y \ = (-1)^{|\gamma|} \int_\Omega \partial_y^\gamma \lambda_\epsilon(x-y)u(y)\,\mathrm{d}^n y \\ &= \int_\Omega \lambda_\epsilon(x-y)\partial^\gamma u(y)\,\mathrm{d}^n y = (\partial^\gamma u)_\epsilon(x)\end{aligned}$$

im Sinne einer schwachen Ableitung. Da $\partial^\gamma u \in L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ folgt mit Proposition 3.18 $\partial^\gamma(u_\epsilon) = (\partial^\gamma u)_\epsilon \to \partial^\gamma u$ in $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, also $u_\epsilon \to u$ in $W^{k,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.
(ii) Ist $\operatorname{supp}(u) \Subset \Omega$ oder $\Omega = \mathbb{R}^n$, so gilt mit obiger Rechnung $u_\epsilon \to u$ in $W^{k,p}(\Omega)$. Im Fall $\operatorname{supp}(u) \Subset \Omega$ wissen wir weiter, dass $u_\epsilon \in C_0^\infty(\Omega)$, wenn $\epsilon < d(\operatorname{supp}(u), \partial\Omega)$. Im Fall $\Omega = \mathbb{R}^n$ können wir mit obigem Argument $u \in W^{k,p}(\mathbb{R}^n) \cap C^\infty(\mathbb{R}^n)$ annehmen. Wir wählen $\eta_1 \in C_0^\infty(B(0,2))$ mit $\eta_1 \equiv 1$ auf $B(0,1)$. Für Multiindex γ gilt

$$|\partial^\gamma \eta_R| \leq \|\partial^\gamma \eta_1\|_{L^\infty(B(0,2))} R^{-|\gamma|} \chi_{B(0,2R)\setminus B(0,R)} \qquad \text{mit} \qquad \eta_R(x) := \eta_1(\tfrac{x}{R}).$$

Wir setzen $u_R := \eta_R u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt für $|\gamma| \leq k$ im Grenzwert $R \to \infty$

$$\partial^\gamma u_R = \sum_{0 \leq \beta \leq \gamma} \binom{\gamma}{\beta} \partial^\beta \eta_R \partial^{\gamma-\beta} u, \quad \|\partial^\gamma u_R - \eta_R \partial^\gamma u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C(n,k) R^{-1} \|u\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^n)} \to 0.$$

Da $\eta_R \partial^\gamma u \to \partial^\gamma u$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$ folgt $\partial^\gamma u_R \to \partial^\gamma u$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$, und $u_R \to u$ in $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$.
(iii) Im Fall $\Omega = \mathbb{R}^n_+$ wählen wir den Faltungskern in $\lambda \in C_0^\infty(B(0,1) \cap \mathbb{R}^{n-1} \times (-\infty, 0))$. Für $x \in \mathbb{R}^n_+$ hängt die rechte Seite von (3.12) nur von den Werten von u auf $\mathbb{R}^n_+$ ab. Wegen $\|u_\epsilon|_{\mathbb{R}^n_+} - u|_{\mathbb{R}^n_+}\|_{L^p(\mathbb{R}^n_+)} \leq \|u_\epsilon - u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ folgt auch dieser Fall. **q.e.d.**

Schwache Ableitungen können durch endliche Differenzen approximiert werden. Für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $h \neq 0, l = 1, \ldots, n$ und $u : \Omega \to \mathbb{R}$ setzen wir

$$\partial_l^h u(x) := \frac{u(x + he_l) - u(x)}{h} \qquad \text{für} \qquad x \in \Omega \cap (\Omega - he_l). \tag{3.14}$$

Wenn wir $x + he_l$ durch x substituieren erhalten wir die diskrete partielle Integration:

$$\int \partial_l^h u\phi\,\mathrm{d}\mu = -\int u\partial_l^{-h}\phi\,\mathrm{d}\mu \quad \text{für } u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega), \phi \in C_0(\Omega) \text{ und } 0 < |h| < d(\operatorname{supp}\phi, \partial\Omega).$$

Proposition 3.25. *(i) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen $k \in \mathbb{N}$, $1 \le p < \infty$, und $l = 1, \ldots, n$. Für $u \in W^{k,p}(\Omega)$, $\Omega' \Subset \Omega$ und $0 < |h| < d(\Omega', \partial\Omega)$ gilt dann*

$$\|\partial_l^h u\|_{W^{k-1,p}(\Omega')} \le \|\partial_l u\|_{W^{k-1,p}(\Omega)} \quad \text{und} \quad \partial_l^h u \to \partial_l u \text{ in } W^{k-1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega) \text{ für } h \to 0. \tag{3.15}$$

(ii) Gilt umgekehrt für $1 < p \le \infty, u \in W^{k-1,p}(\Omega), 0 < |h| < d(\Omega', \partial\Omega), l = 1, \ldots, n$

$$\text{für alle } \Omega' \Subset \Omega \qquad \|\partial_l^h u\|_{W^{k-1,p}(\Omega')} \le C(\Omega'), \tag{3.16}$$

$$\text{so ist } u \in W^{k,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega) \text{ mit } \qquad \|\partial_l u\|_{W^{k-1,p}(\Omega')} \le C(n, k, \Omega'). \tag{3.17}$$

Beweis: (i) Für $u \in W^{k,p}(\Omega) \cap C^\infty(\Omega), |\gamma| \le k-1, x \in \Omega' \Subset \Omega, 0 < |h| < d(\Omega', \partial\Omega)$ gilt

$$\partial^\gamma \partial_l^h u(x) = \frac{\partial^\gamma u(x + he_l) - \partial^\gamma u(x)}{h} = \int_0^1 \partial^\gamma \partial_l u(x + the_l)\,\mathrm{d}t$$

$$\|\partial^\gamma \partial_l^h u\|^p_{L^p(\Omega')} \le \int_{\Omega'} \int_0^1 |\partial^\gamma \partial_l u(x + the_l)|^p \,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}^{\mathrm{n}}x \le \int_0^1 \int_\Omega |\partial^\gamma \partial_l u(y)|^p \,\mathrm{d}^{\mathrm{n}}y\,\mathrm{d}t \le \|\partial^\gamma \partial_l u\|^p_{L^p(\Omega)}$$

wegen Jensens Ungleichung. Für glatte u folgen nacheinander beide Seiten von (3.15).

Für allgemeines u existiert nach Proposition 3.24 $u_m \in C^\infty(\Omega)$ mit $u_m \to u$ in $W^{k,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Mit $\Omega' \Subset \Omega'' := \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, \Omega') < \delta\} \Subset \Omega$ und für $|h| < \delta < d(\Omega', \partial\Omega)$ gilt

$$\|\partial_l^h u\|_{W^{k-1,p}(\Omega')} \leftarrow \|\partial_l^h u_m\|_{W^{k-1,p}(\Omega')} \le \|\partial_l u_m\|_{W^{k-1,p}(\Omega'')} \to \|\partial_l u\|_{W^{k-1,p}(\Omega'')},$$

also (3.15) linke Seite. Die rechte Seite folgt im Grenzwert $m \to \infty$, weil folgendes gilt:

$$\begin{aligned}
&\limsup_{h \to 0} \|\partial_l^h u - \partial_l u\|_{W^{k-1,p}(\Omega')} \le \\
&\le \limsup_{h \to 0} \|\partial_l^h u_m - \partial_l u_m\|_{W^{k-1,p}(\Omega')} + \|\partial_l^h (u - u_m)\|_{W^{k-1,p}(\Omega')} + \|\partial_l u_m - \partial_l u\|_{W^{k-1,p}(\Omega')} \\
&\le 2\|\partial_l u_m - \partial_l u\|_{W^{k-1,p}(\Omega'')}.
\end{aligned}$$

(ii) Umgekehrt folgt für $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \varphi \in C_0^\infty(\Omega'), |\gamma| \le k-1$ und $0 < |h| < d(\operatorname{supp}\varphi, \partial\Omega')$

$$\begin{aligned}
\left|\int u \partial_l \partial^\gamma \varphi \,\mathrm{d}\mu\right| = \left|\int \partial^\gamma u \partial_l \varphi \,\mathrm{d}\mu\right| \leftarrow \left|\int \partial^\gamma u \partial_l^{-h} \varphi \,\mathrm{d}\mu\right| = \left|\int \partial^\gamma \partial_l^h u \varphi \,\mathrm{d}\mu\right| \le \\
\le \|\partial_l^h u\|_{W^{k-1,p}(\Omega')} \|\varphi\|_{L^q(\Omega)} \le C(\Omega') \|\varphi\|_{L^q(\Omega)}
\end{aligned}$$

aus (3.16). Für $1 < p \le \infty$ folgt mit Proposition 3.22 $u \in W^{k,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ und (3.17). **q.e.d.**

Bemerkung 3.26. *Für $u \in W^{2,p}(\Omega), 1 \le p < \infty$ sehen wir durch zweimalige Anwendungen von (3.15) für $\Omega' \Subset \Omega'' \Subset \Omega$, $0 < |h| < d(\Omega', \partial\Omega''), d(\Omega'', \partial\Omega)$,*

$$\|\partial_l^{-h} \partial_l^h u\|_{L^1(\Omega')} \le \|\partial_l \partial_l^h u\|_{L^1(\Omega'')} \le \|\partial_l^2 u\|_{L^1(\Omega)}$$

und $\partial_l^{-h} \partial_l^h u \to \partial_l^2 u$ in $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ durch Approximation mit Proposition 3.24.

Für $p = \infty$ können wir $W^{1,\infty}$ mit Hölderräumen identifizieren.

Proposition 3.27. *(i) Für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $k \in \mathbb{N}$ gilt $C^{k-1,1}(\Omega) \subset W^{k,\infty}(\Omega)$ und*

$$\|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C(n) \operatorname{lip}_\Omega u \text{ für } u \in C^{0,1}(\Omega). \tag{3.18}$$

(ii) Ist $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ mit $\partial\Omega \in C^{0,1}$ oder Ω konvex, so gilt $W^{k,\infty}(\Omega) \subset C^{k-1,1}(\Omega)$, und, falls Ω zusammenhängend ist, $\operatorname{lip}_\Omega u \leq C(\Omega, n)\|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)}$ *für $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$.*

Beweis: (i) Es genügt den Fall $k = 1$ zu beweisen. Für $u \in C^{0,1}(\Omega), \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ und $0 < |h| < d(\operatorname{supp}(\varphi), \partial(\Omega), l = 1, \ldots, n$ gilt mit diskreter partieller Integration

$$\left|\int u\partial_l\varphi \,\mathrm{d}\mu\right| \leftarrow \left|\int u\partial_l^h\varphi \,\mathrm{d}\mu\right| = \left|\int \partial_l^{-h} u\varphi \,\mathrm{d}\mu\right| \leq \operatorname{lip}_\Omega u\|\varphi\|_{L^1(\Omega)}.$$

Dann folgt mit Proposition 3.22, dass $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$ und (3.18).
(ii) Für $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$, $\Omega' \Subset \Omega$ und $\epsilon < d(\Omega'\partial\Omega)$ folgt $\|u_\epsilon\|_{C^1(\bar\Omega')} \leq \|u\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}$ aus $\nabla u_\epsilon = \lambda_\epsilon * \nabla u$. Mit (3.6) aus dem Beweis von Porposition 3.15 folgt dann $\operatorname{lip}_{\Omega'} u_\epsilon \leq C(\Omega)\|u\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}$ mit dem entsprechenden $C(\Omega)$ für die Menge Ω. Wegen dem Satz von Arzela-Ascoli konvergiert eine Teilfolge von u_ϵ im Grenzwert $\epsilon \downarrow 0$ in $C^0(\bar\Omega')$ gegen u. Weil das für alle $\Omega' \Subset \Omega$ gilt, liegt u in $C^{0,1}(\Omega)$ mit $\operatorname{lip}_\Omega u \leq C(\Omega)\|u\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}$. In zusammmenhängenden Ω gilt wegen (3.7) sogar $\operatorname{lip}_\Omega u \leq C(\Omega)\|\nabla u\|_\infty$. **q.e.d.**

Wir stellen einige einfache Rechenregeln für Sobolevfunktionen zusammen.

Proposition 3.28. (Produktregel) *Es sei $1 \leq p, q, r \leq \infty$ mit $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ und $u \in W^{1,p}(\Omega)$ und $v \in W^{1,q}(\Omega)$. Dann ist $uv \in W^{1,r}(\Omega)$ und*

$$\nabla(uv) = (\nabla u)v + u\nabla v. \tag{3.19}$$

Beweis: Zuerst betrachten wir $p, q < \infty$. Gemäß Proposition 3.24 existieren $u_m, v_m \in C^\infty(\Omega)$ mit $u_m \to u$ in $W^{1,p}_{\text{loc}}(\Omega)$ und $u_m \to v$ in $W^{1,q}_{\text{loc}}(\Omega)$. Dann folgt $u_m v_m \to uv$ aus $u_m v_m \in C^\infty(\Omega)$ mit der Hölderungleichung in $L^r_{\text{loc}}(\Omega)$ und

$$\nabla(u_m v_m) = (\nabla u_m)v_m + u_m\nabla v_m \to (\nabla u)v + u\nabla v.$$

Damit folgt $uv \in W^{1,r}_{\text{loc}}(\Omega)$ und (3.19) in $L^r(\Omega)$. Da $uv \in L^r(\Omega)$, folgt $uv \in W^{1,r}(\Omega)$.

Ohne die Endlichkeitannahme an p, q erhalten wir für $r > 1$ zuerst $uv \in W^{1,1}_{\text{loc}}(\Omega)$ und anschließend $uv \in W^{1,r}(\Omega)$, da $uv \in L^r(\Omega)$ und $\nabla(uv) \in L^r(\Omega)$. Ist $r = 1$ und o.B.d.A. $p = \infty, q = 1$ so approximieren wir $u_m \to u$, $v_m \to v$ in $W^{1,1}_{\text{loc}}(\Omega)$ durch glatte u_m, v_m. Für ein festes $l \in \mathbb{N}$ folgt $u_m v_l \to uv_l$ in $W^{1,1}_{\text{loc}}(\Omega)$ für $m \to \infty$, und uv_l erfüllt (3.19). Dann folgt $uv_l \to uv$ in $W^{1,1}_{\text{loc}}(\Omega)$ für $l \to \infty$ und (3.19), da $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$.**q.e.d.**

Proposition 3.29. (Kettenregel) *Es sei* $u \in W^{1,p}(\Omega), 1 \le p \le \infty$ *und* $f \in C^{0,1}(\mathbb{R}) = W^{1,\infty}(\mathbb{R})$, $f(0) = 0$. *Dann ist* $f(u) \in W^{1,p}(\Omega)$ *und* $\nabla(f(u)) = f'(u)\nabla u$.

Beweis: Gemäß Proposition 3.24 exitieren $u_m \in C^\infty(\Omega)$ mit $u_m \to u$ in $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ und $u_m \to u$, $\nabla u_m \to \nabla u$ punktweise fast überall. Aus $u_m \in C^{0,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega) \subset W^{1,\infty}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ folgt

$$f(u_m) \in C^{0,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega) \subset W^{1,\infty}_{\mathrm{loc}}(\Omega), \quad |f(u_m) - f(u)| \le \operatorname{lip} f \cdot |u_m - u|, \quad f'(u_m)\nabla u_m \to f'(u)\nabla u$$

in $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ und punktweise fast überall in Ω. Mit der Konvergenz von $f(u_m)$ in $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ folgt $f(u) \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ mit $\nabla(f(u)) = f'(u)\nabla u \in L^p(\Omega)$. Aus $f(0) = 0$ folgt $|f(u)| \le \operatorname{lip} f \cdot |u|$, also $f(u) \in L^p(\Omega)$ und schließlich $f(u) \in W^{1,p}(\Omega)$. **q.e.d.**

Proposition 3.30. *Für* $u \in W^{1,1}(\Omega)$ *ist* $|u| \in W^{1,1}(\Omega)$ *mit*

$$\nabla|u| = \nabla u \cdot \begin{cases} 1 & \text{für } u > 0, \\ 0 & \text{für } u = 0, \\ -1 & \text{für } u < 0. \end{cases}$$

Außerdem ist $\nabla u = 0$ *fast überall auf* $u^{-1}[\{0\}] \cap \Omega$.

Beweis: Mit Proposition 3.29 ist für alle $\theta \in \mathbb{R}$ und $\epsilon > 0$

$$u_\epsilon := ((u + \theta\epsilon)^2 + \epsilon^2)^{1/2} - \epsilon\sqrt{\theta^2 + 1} \in W^{1,1}(\Omega) \qquad \nabla u_\epsilon = \frac{u + \theta\epsilon}{((u + \theta\epsilon)^2 + \epsilon^2)^{1/2}} \nabla u.$$

Im Grenzwert $\epsilon \downarrow 0$ konvergiert $u_\epsilon \to |u|$ in $L^1(\Omega)$ und wegen Lebesgues Satz der beschränkten Konvergenz

$$\nabla u_\epsilon \to \nabla u \cdot \begin{cases} 1 & \text{für } u > 0, \\ \frac{\theta}{\sqrt{\theta^2+1}} & \text{für } u = 0, \\ -1 & \text{für } u < 0. \end{cases}$$

punktweise fast überall in Ω und in $L^1(\Omega)$. Daraus folgt $|u| \in W^{1,1}(\Omega)$ und

$$\nabla|u| = \nabla u \cdot \begin{cases} 1 & \text{für } u > 0, \\ \frac{\theta}{\sqrt{\theta^2+1}} & \text{für } u = 0, \\ -1 & \text{für } u < 0. \end{cases}$$

Da die schwache Ableitung wohldefiniert ist, ist obiger Ausdruck unabhängig von $\theta \in \mathbb{R}$, und somit ist $\nabla u = 0$ fast überall auf $u^{-1}[\{0\}]$. Dies ergibt die Behauptung. **q.e.d.**

Für Transformationen im Definitionsbereich haben wir folgende Proposition.

Proposition 3.31. *Sei $\Psi : \Omega_1 \cong \Omega_2$ eine bi-lipschitzstetige Abbildung zwischen offenen Mengen $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$ mit $\operatorname{lip}_{\Omega_1} \Psi \leq \Lambda$ und $\operatorname{lip}_{\Omega_2} \Psi^{-1} \leq \Lambda$. Für $1 \leq p \leq \infty$ folgt $u \circ \Psi \in W^{1,p}(\Omega_1)$ aus $u \in W^{1,p}(\Omega_2)$. Die Einträge der Jacobimatrix Ψ' von $\Psi \in C^{0,1}(\Omega_1)$ liegen gemäß Proposition 3.27 in $W^{1,\infty}(\Omega_1)$ und es gilt*

$$\nabla^T(u \circ \Psi) = (\nabla^T u) \circ \Psi \cdot \Psi' \quad \textit{mit} \quad \|u \circ \Psi\|_{W^{1,p}(\Omega_1)} \leq C(\Lambda, n)\|u\|_{W^{1,p}(\Omega_2)}. \tag{3.20}$$

Beweis: Zuerst sei $u \in C^\infty(\Omega_2)$. Für $\Omega_1' \Subset \Omega_1$ konvergiert mit Proposition 3.18 die Faltung (3.11) $\Psi_\epsilon \to \Psi$ gleichmäßig auf Ω_1', $\Psi_\epsilon' \to \Psi'$ punktweise fast überall in Ω_1 mit

$$\|\Psi_\epsilon'\|_{L^\infty(\Omega_1')} \leq \|\Psi'\|_{L^\infty(\Omega_1)} \leq \Lambda.$$

Wählen wir $\Psi(\bar{\Omega}_1') \Subset \Omega_2' \Subset \Omega_2$, so gilt $\Psi_\epsilon(\Omega_1') \subset \Omega_2'$ für kleine ϵ. Dies ergibt $u \circ \Psi_\epsilon \in C^\infty(\Omega_1')$ und $u \circ \Psi_\epsilon \to u \circ \Psi$ gleichmäßig auf Ω_1' und punktweise fast überall auf Ω_1'

$$\nabla^T(u \circ \Psi_\epsilon) = \big((\nabla^T u) \circ \Psi_\epsilon\big) \cdot \Psi_\epsilon' \to \big((\nabla^T u) \circ \Psi\big) \cdot \Psi'.$$

Weil ∇u auf Ω_2' und Ψ_ϵ' auf Ω_1' beschränkt sind, folgt auch die Konvergenz in $L^1(\Omega_1')$. Daraus folgt $u \circ \Psi \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega_1)$ und die linke Gleichung von (3.20). Die lipschitzstetige Abbildung Ψ^{-1} bildet jeden Quader $Q \subset \Omega_2$ mit gleichen Kantenlänge l auf eine Teilmenge von Ω_1 ab, die in einem Ball mit Radius $C(\Lambda, n)l$ enthalten ist. Dann folgt $\mu(\Psi^{-1}[A]) \leq C(\Lambda, n)\mu(A)$ zuerst für Quader A mit rationalen Kantenlängen und dann für messbare Mengen $A \subset \Omega_2$. Deshalb definiert $v \mapsto v \circ \Psi$ eine stetige lineare Abbildung von $L^p(\Omega_2)$ nach $L^p(\Omega_1)$. Daraus folgt $u \circ \Psi \in W^{1,p}(\Omega_1)$ mit

$$\|u \circ \Psi\|_{W^{1,p}(\Omega_1)} \leq C(\Lambda, n)\|u\|_{W^{1,p}(\Omega_2)}. \tag{3.21}$$

Ist schließlich $u \in W^{1,p}(\Omega_2)$ so existieren mit Proposition 3.24 $u_m \in C^\infty(\Omega_2)$ mit $u_m \to u$ in $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega_2)$ und punktweise fast überall. Aus (3.21) folgt, dass $u_m \circ \Psi$ in $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega_1)$ konvergiert. Andererseits konvergiert $u_m \to u$ und $\nabla u_m \to \nabla u$ fast überall auf Ω_2, z.B. auf $\Omega_2 - N$ mit $\mu(N) = 0$. Da $\mu(\Psi^{-1}(N)) = 0$ und Ψ^{-1} lipschitzstetig ist, konvergiert $u_m \circ \Psi \to u \circ \Psi$ und $(\nabla u_m) \circ \Psi \to (\nabla u) \circ \Psi$ fast überall auf Ω_1. Daraus folgt $u \circ \Psi \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega_1)$, und die linke Gleichung von (3.20) aus der entsprechenden Gleichung für $u_m \in C^\infty(\Omega_2)$. Aus (3.21) für u_m folgt $u \circ \Psi \in W^{1,p}(\Omega_1)$ und (3.20). **q.e.d.**

Als nächstes setzen wir Funktionen über einen genügend glatten Rand hinweg fort.

Fortsetzungssatz 3.32. *Es sei $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ offen mit $\partial\Omega \in C^{k-1,1}, k \in \mathbb{N}, 1 \leq p \leq \infty$. Dann existiert für jedes $\Omega' \Supset \Omega$ ein Fortsetzungsoperator $E : W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{k,p}_0(\Omega')$ mit*

$$Eu|_\Omega = u \quad \textit{und} \quad \|Eu\|_{W^{l,q}(\Omega')} \leq C(\Omega, \Omega', n, k)\|u\|_{W^{l,q}(\Omega)} \quad \forall\, 0 \leq l \leq k,\ 1 \leq q \leq p.$$

Beweis: Für $\mathbb{R}^n_+ := \mathbb{R}^{n-1} \times (0,\infty)$ definieren wir einen Fortsetzungsoperator

$$E_0 : W^{k,p}(\mathbb{R}^n_+) \hookrightarrow W^{k,p}(\mathbb{R}^n) \qquad (E_0u)(y,t) := \sum\nolimits_{i=1}^{k+1} \sigma_i u(y,-it) \text{ für } t<0,$$

wobei die σ_i so gewählt sind, dass $\sum_{i=1}^{k+1} \sigma_i(-i)^m = 1$ für $m = 0,\dots,k$ gilt. Damit folgt $E_0u \in C^k_0(\mathbb{R}^n) \subset W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ aus $u \in C^\infty_0(\overline{\mathbb{R}^n_+})$. Und mit Proposition 3.27 folgt auch $E_0u \in C^{k-1,1}(\mathbb{R}^n) \subset W^{k,\infty}(\mathbb{R}^n)$ aus $u \in C^{k-1,1}(\mathbb{R}^n_+)$ und

$$\|E_0u\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C(n,k)\|u\|_{W^{k,p}}(\mathbb{R}^n_+).$$

Da $C^\infty_0(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ gemäß Proposition 3.24 in $W^{k,p}(\mathbb{R}^n_+)$ dicht liegt bzw. mit Proposition 3.27 $C^{k-1,1}(\mathbb{R}^n_+) = W^{k,\infty}(\mathbb{R}^n_+)$ gilt, setzt sich E_0 stetig auf $W^{k,p}(\mathbb{R}^n_+) \hookrightarrow W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ fort.

Da $\partial\Omega \in C^{k-1,1}$ kompakt ist, können wir endlich viele $x_1,\dots,x_N \in \partial\Omega$ mit Umgebungen $x_j \in U_j \Subset \Omega'$ und bi $-C^{k-1,1}$-Abbildungen Ψ_j wählen, die nach einer Rotation

$$\begin{aligned}
&\Psi_j(y,t) := \lambda_j^{-1}((y,t-\varphi_j(y)) - x_j) \qquad \Psi_j^{-1}(y,t) := \lambda_j(y,t) + \phi_j(y) + x_j \quad \text{mit}\\
&\qquad \lambda_j > 0, \qquad \varphi_j \in C^{k-1,1}(\mathbb{R}^{n-1}) \qquad\qquad \text{und}\\
&\Psi_j : U_j \cong B(0,1), \qquad \Psi_j(x_j) = 0, \qquad \Psi_j(U_j \cap \Omega) = B(0,1) \cap \mathbb{R}^n_+
\end{aligned}$$

und $\partial\Omega \subset U_1 \cup \ldots \cup U_N \Subset \Omega'$ erfüllen. Dazu wählen wir eine offene Teilmenge $U_0 \Subset \Omega$ mit $\bar{\Omega} \subset U_0 \cup U_1 \cup \ldots \cup U_N \Subset \Omega'$ und eine entsprechende Zerlegung der Eins

$$\eta_j \in C^\infty_0(U_j) \quad 0 \leq \eta_j \leq 1 \quad \text{für } j = 0,\dots,N \quad \text{mit } \sum\nolimits_{j=0}^N \eta_j \equiv 1 \text{ auf } \bar{\Omega}. \tag{3.22}$$

Damit definieren wir für $u \in W^{k,p}(\Omega)$ als $\qquad E_ju := E_0\left((\eta_ju) \circ \Psi_j^{-1}\right) \circ \Psi_j.$

Aus Propositionen 3.27 und 3.31 folgt $\Psi_j \in C^{k-1,1}(U_j) \subset W^{k,\infty}(U_j)$ und

$$E_ju \in W^{k,p}(\Omega') \qquad \text{mit} \qquad \|E_ju\|_{W^{k,p}(\Omega')} \leq C(\eta_j,\Psi_j,U_j,n,k)\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}. \tag{3.23}$$

Da $\operatorname{supp}(\eta_j) \Subset U_j$ folgt $\operatorname{supp}(E_ju) \Subset U_j \Subset \Omega'$ aus der Definiton von E_0, also $E_ju \in W^{k,p}_0(\Omega')$ aus der Proposition 3.24. Weiter gilt $E_ju|_\Omega = \eta_ju$. Schließlich setzen wir

$$Eu := \eta_0u + \sum\nolimits_{j=1}^N E_ju \in W^{k,p}_0(\Omega'),$$

Aus (3.22) und $E_ju|_\Omega = \eta_ju$ folgt $E|_\Omega = \eta_0u + \sum_{j=1}^N E_ju|_\Omega = \eta_0u + \sum_{j=1}^n \eta_ju = u$. **q.e.d.**

Damit können wir die Approximation aus Proposition 3.24 verschärfen.

Approximationssatz 3.33. *Es sei $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ offen mit $\partial\Omega \in C^{k-1,1}$, $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$ und $u \in W^{k,p}(\Omega)$. Dann existieren $u_m \in C^\infty(\bar{\Omega})$ mit $u_m \to u$ in $W^{k,p}(\Omega)$.*

Beweis: Sei $E : W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{k,p}_0(\Omega')$ der Fortsetzungsoperator aus Satz 3.32 für ein $\Omega' \Supset \Omega$. Wir wählen $v_m \in C^\infty_0(\Omega')$ mit $v_m \to Eu$ in $W^{k,p}(\Omega')$. Dann folgt

$$u_m = v_m|_\Omega \to Eu|_\Omega = u \text{ in } W^{k,p}(\Omega) \quad \text{für } u_m := v_m|_\Omega \in C^\infty(\Omega).$$ **q.e.d.**

Übungsaufgabe 3.34. *Zeige mit den folgenden Aussagen, dass $f_1, \ldots, f_n \in C^{0,1}(\Omega)$ auf einer offenen beschränkten Menge $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ mit $\partial\Omega \in C^{0,1}$ den Divergenzsatz erfüllt.*

(i) *Für $f \in W^{1,\infty}_0(B^{n-1}(0,\varrho) \times (-M,M))$ und $\varphi \in C^{0,1}(B^{n-1}(0,\varrho))$ definieren wir*

$$\int_{\{(y,\varphi(y)) | y \in B^{n-1}(0,\varrho)\}} f \cdot N \, \mathrm{d}\sigma = \int_{B^{n-1}(0,\varrho)} f(y,\varphi(y)) \cdot (\nabla_y \varphi(y), -1) \, \mathrm{d}^{n-1} y.$$

Für $\partial\Omega \in C^1$ stimmt das entsprechende $\int_{\partial\Omega} f \cdot N \, \mathrm{d}\sigma$ mit Definition 1.7 überein.

(ii) *Zeige für $f_1, \ldots, f_n \in C^\infty_0(B^{n-1}(0,\varrho) \times (-M,M))$ und $\varphi \in C^{0,1}(B^{n-1}(0,\varrho))$*

$$\int_{B^{n-1}(0,\varrho)} \int_{\varphi(y)}^M \nabla \cdot f(y,t) \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}^{n-1} y = \int_{B^{n-1}(0,\varrho)} f(y,\varphi(y)) \cdot (\nabla_y \varphi(y), -1) \, \mathrm{d}^{n-1} y.$$

Folgende Proposition macht mithilfe von $W^{1,p}_0$ Aussagen über die Randwerte:

Proposition 3.35. *Es sei $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ offen mit $\partial\Omega \in C^{0,1}$, und $1 \leq p < \infty$. Ein $u \in C^0(\bar{\Omega}) \cap W^{1,p}(\Omega)$ gehört genau dann zu $W^{1,p}_0(\Omega)$, wenn u auf $\partial\Omega$ verschwindet.*

Beweis: $(\Rightarrow)$: Es sei $u \in C^0(\bar{\Omega}) \cap W^{1,p}_0(\Omega)$. Falls $\sup_{\partial\Omega} |u| > 0$, so existiert $x_0 \in \partial\Omega$ mit einer Umgebung $U(x_0)$, so dass o.B.d.A. $u \geq \epsilon$ in $U(x_0)$, also $\min(u,\epsilon) = \epsilon$ in $U(x_0)$ gilt. Wegen $u \in W^{1,p}_0(\Omega)$ exisitiert $u_m \in C^\infty_0(\Omega)$ mit $u_m \to u \in W^{1,p}(\Omega)$ und $u_m \to u$ und $\nabla u_m \to \nabla u$ punktweise fast überall. Es gilt $\min(u_m,\epsilon) \to \min(u,\epsilon)$ in $L^p(\Omega)$, und mit Proposition 3.30 gilt $\min(u_m,\epsilon) \in W^{1,p}(\Omega)$, $\nabla \min(u_m,\epsilon) \to \chi_{[u<\epsilon]} \nabla u$ punktweise fast überall, $|\nabla \min(u_m,\epsilon)| \leq |\nabla u_m|$, also $\min(u_m,\epsilon) \to \min(u,\epsilon)$ in $W^{1,p}(\Omega)$.

Für $\varphi \in C^1_0(U(x_0),\mathbb{R}^n)$ rechnen wir mit $\min(u_m,\epsilon) \in C^{0,1}_0(\Omega)$

$$\int_{\partial\Omega} \epsilon\varphi \cdot N \, \mathrm{d}\sigma = \int_\Omega \nabla \cdot ((\min(u,\epsilon)\varphi) \, \mathrm{d}\mu \leftarrow \int_\Omega \nabla \cdot ((\min(u_m,\epsilon)\varphi) \, \mathrm{d}\mu = 0.$$

Auf $\partial\Omega \in C^{0,1}$ gilt dies nicht für alle $\varphi \in C^1_0(U(x_0),\mathbb{R}^n)$. Also folgt $u|_{\partial\Omega} \equiv 0$.
$(\Leftarrow)$: Es sei $u \in C^0(\bar{\Omega}) \cap W^{1,p}(\Omega)$ mit $u = 0$ auf $\partial\Omega$. Für $u_\epsilon := \max(u,\epsilon) - \epsilon$ mit $\epsilon > 0$ gilt $\mathrm{supp}(u_\epsilon) \Subset \Omega$, $u_\epsilon \to u_+$ in $L^p(\Omega)$, und mit Proposition 3.30 gilt weiter $u_\epsilon \in W^{1,p}(\Omega)$,

$$\nabla u_\epsilon = \chi_{[u>\epsilon]} \nabla u \to \chi_{[u>0]} \nabla u \text{ punktweise fast überall, und} \quad |\nabla u_\epsilon| \leq \chi_{[u>0]} |\nabla u|,$$

also $u_\epsilon \to u_+$ in $W^{1,p}(\Omega)$. Mit Proposition 3.24 ergibt sich $u_\epsilon \in W^{1,p}_0(\Omega)$, also $u_+ \in W^{1,p}_0(\Omega)$. Genauso folgt $(-u)_+ \in W^{1,p}_0(\Omega)$ und schließlich $u \in W^{1,p}_0(\Omega)$. **q.e.d.**

Dies legt folgende Definition nahe.

Definition 3.36. *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\Gamma \subset \partial\Omega$ offen und $1 \le p < \infty$. Wir sagen $u \in W^{1,p}(\Omega)$ hat Nullrandwerte auf Γ in $W^{1,p}(\Omega)$, geschrieben $u = 0$ auf Γ, wenn $u\eta \in W_0^{1,p}(\Omega)$ für alle $\eta \in C_0^1(\Omega \cup \Gamma)$. Wir sagen $v \in W^{1,p}(\Omega)$ hat die gleichen Randwerte wie u, falls $u - v = 0$ auf Γ. Die Randwerte bleiben unter Konvergenz erhalten.*

Proposition 3.37.* *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\Gamma \subset \partial\Omega$ offen $1 \le p < \infty$. Dann ist*

$$V := \{u \in W^{1,p}(\Omega) \mid u = 0 \text{ auf } \Gamma\} \subset W^{1,p}(\Omega) \qquad \text{ein abgeschlossener Unterraum.}$$

Beweis*: Klarerweise ist V ein Unterraum. Nun sei $u_m \in V$ mit $u_m \to u$ in $W^{1,p}(\Omega)$. Für $\eta \in C_0^1(\Omega \cup \Gamma)$ gilt $\eta u_m \to \eta u$ in $W^{1,p}(\Omega)$. Da $\eta u_m \in W_0^{1,p}(\Omega)$ und $W_0^{1,p}(\Omega) \subset W^{1,p}(\Omega)$ abgeschlossen ist, folgt $\eta u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ und $u = 0$ auf Γ, also $u \in V$. **q.e.d.**

Für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bezeichne $\Omega_\pm := \Omega \cap \mathbb{R}^{n-1} \times \pm(0,\infty)$ und $\Omega_0 = \Omega \cap \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$. Approximationen können mit Erhaltung von Nullrandwerten durchgeführt werden.

Proposition 3.38. *Sei $u \in W^{1,p}(B(0,1)_+), 1 \le p < \infty$ mit $u = 0$ auf $B(0,1)_0$. Dann existieren $u_m \in C^\infty(\overline{B(0,1)_+})$ mit $u_m = 0$ auf $B(0,1)_0$ und $u_m \to u$ in $W^{1,p}(B(0,1)_+)$.*

Beweis: Sei $u(y,t) = 0$ für $t < 0$ und $\Omega := B(0,1) \cup \mathbb{R}^n_-$. Für $\eta \in C_0^1(\Omega)$ gilt nach Definition 3.36 $u\eta \in W_0^{1,p}(B(0,1)_+)$. Für $u = \eta^{-1}(\eta u)$ auf $\eta^{-1}[\mathbb{R}^\times] \Subset \Omega$ folgt mit der Produktregel $u \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Also liegt mit $\chi_{B(0,1)_+}u$ und $\chi_{\mathbb{R}^n_-}u = 0$ auch u in $W^{1,p}(\Omega)$.

Wir setzen $u_h(y,t) := u(y, t-h)$ mit $(y,t) \in \Omega_h := \Omega + he_n$ und wählen $h > 0$ für gegebenes $\delta > 0$ mit $\|u_h - u\|_{W^{1,p}(B(0,1)_+)} < \delta$. Da $B(0,1)_+ \Subset \Omega_h$, konvergiert die Faltung $u_{h,\epsilon} \in C^\infty(\overline{B(0,1)_+})$ nach Proposition 3.24 $u_{h,\epsilon} \to u_h$ in $W^{1,p}(B(0,1)_+)$. Wir können also $\epsilon > 0$ so wählen, dass $\|u_{h,\epsilon} - u_h\|_{W^{1,p}(B(0,1)_+)} < \delta$ gilt. Für $\epsilon < h$ gilt $u_{h,\epsilon} = 0$ auf $B(0,1)_0$. Wählen wir für eine Folge $\delta_m \downarrow 0$ entsprechende h_m und $\epsilon_m < h_m$, so hat $u_m = u_{h_m,\epsilon_m}$ die gewünschten Eigenschaften. **q.e.d.**

Wir setzen eine Funktion $u : B(0,1)_+ \to \mathbb{R}$ folgendermaßen auf $B(0,1)$ fort:

$$E_{\pm,0}u(y,t) := \begin{cases} u(y,t) & \text{falls } t > 0, \\ \{\pm, 0\}u(y,-t) & \text{falls } t < 0. \end{cases} \tag{3.24}$$

Proposition 3.39.* *Für $u \in W^{1,p}(B(0,1)_+), 1 \le p < \infty$ gilt $E_+u \in W^{1,p}(B(0,1))$ und, falls $u = 0$ auf $B(0,1)_0$, gilt weiter $E_0u \in W^{1,p}(B(0,1))$ und $E_-u \in W^{1,p}(B(0,1))$.*

Beweis*: Mit dem Approximationssatz 3.33 und Proposition 3.38 existieren $u_m \in C^\infty(\overline{B(0,1)_+})$ mit $u_m \to u$ in $W^{1,p}(B(0,1)_+)$, und, falls $u = 0$ auf $B(0,1)_0$, so gilt weiter $u_m = 0$ auf $B(0,1)_0$. Dies ergibt $E_{\pm,0}u_m \in C^{0,1}(B(0,1)) \subset W^{1,p}(B(0,1))$,

$$\|\nabla E_{\pm,0}u_m\|_{L^p(B(0,1))} \le 2^{1/p}\|\nabla u_m\|_{L^p(B(0,1)_+)} \le C$$

und $E_{\pm,0}u_m \to E_{\pm,0}u$ in $L^p(B(0,1))$. Daraus folgt $E_{\pm,0}u \in W^{1,p}(B(0,1))$. **q.e.d.**

Bei zwei schwachen Ableitungen übertragen sich Nullrandwerte auf Ableitungen.

Proposition 3.40*. *Für $u \in W^{2,p}(B(0,1)_+), 1 \leq p < \infty$ mit $u = 0$ auf $B(0,1)_0$ gilt*

$$\partial_l u = 0 \text{ auf } B(0,1)_0 \qquad \text{für} \qquad l = 1, \ldots, n-1.$$

Beweis*: Für $0 < \delta < 1/2$ wählen wir $B(0,1-\delta)_+ \subset \Omega_0 \subset B(0,1)_+$ mit $\partial\Omega \in C^\infty$ und betrachten den Fortsetzungsoperator $E : W^{2,p}(\Omega_0) \to W_0^{2,p}(\mathbb{R}^n)$ aus Satz 3.32. Mit Proposition 3.25 folgt $\partial_l^h Eu \to \partial_l Eu$ in $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) \subset W^{1,p}(B(0,1-\delta)_+)$. Da $\partial_l^h Eu = \partial_l^h u$ in $B(0,1-2\delta)_+$ für $0 < |h| < \delta$, folgt $\partial_l^h u \to \partial_l u$ in $W^{1,p}(B(0,1-2\delta)_+)$. Nun gilt $\partial_l^h u = 0$ auf $B(0,1-2\delta)_0$, und die Behauptung folgt aus Proposition 3.37 **q.e.d.**

Wir setzen Funktionen mit zwei schwachen Ableitungen ungerade duch E_- fort.

Proposition 3.41*. *Für $u \in W^{2,p}(B(0,1)_+), 1 \leq p > \infty$ mit $u = 0$ auf $B(0,1)_0$ gilt*

$$E_- u \in W^{2,p}(B(0,1)).$$

Beweis*: Proposition 3.39 und 3.40 ergeben $\partial_l(E_-u) = E_-(\partial_l u) \in W^{1,p}(B(0))$ für $l \neq n$ und $\partial_n(E_-u) = E_+(\partial_n u) \in W^{1,p}(B(0,1))$, also $E_-u \in W^{2,p}(B(0,1))$. **q.e.d.**

3.4 Einbettungsätze für Soboleväume

Wir beginnen mit dem Satz von Rellich.

Satz vom Rellich 3.42. *Für $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ offen mit $\partial\Omega \in C^{0,1}$ und $1 \leq p \leq \infty$ ist folgende Einbettung kompakt:* $\quad W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega).$

Beweis: Für $p = \infty$ folgt aus den Propositionen 3.13 und 3.27 die Kompaktheit von

$$W^{1,\infty}(\Omega) \cong C^{0,1}(\Omega) \hookrightarrow C(\bar{\Omega}) \hookrightarrow L^\infty(\Omega).$$

Für $1 \leq p < \infty$ betrachten wir eine beschränkte Folge u_m in $W^{1,p}(\Omega)$. Mit dem Fortsetzungsoperator E aus Fortsetzungssatz 3.32 für $B(0,R) \Supset \Omega$ folgt $Eu_m \in W_0^{1,p}(B(0,R))$. Wir können also o.B.d.A. $u_m \in W_0^{1,p}(B(0,R))$ mit $\|u_m\|_{W^{1,p}(B(0,R)} \leq C$ annehmen.

Für die Faltung 3.11 $u_{m,\epsilon}$ eines u_m gilt wegen $\lambda_\epsilon(x) = \epsilon^{-n}\lambda(\frac{x}{\epsilon})$ und (3.9)

$$\begin{aligned}
|u_{m,\epsilon}(x)| &= \left|\int \lambda_\epsilon(x-y)u_m(y)\,\mathrm{d^n}y\right| \leq \frac{\|\lambda\|_{L^\infty(B(0,1))}}{\epsilon^n}\|u_m\|_{L^1(B(0,R))} \leq \frac{C'}{\epsilon^n} \\
|\nabla u_{m,\epsilon}(x)| &= \left|\int \nabla\lambda_\epsilon(x-y)u_m(y)\,\mathrm{d^n}y\right| \leq \frac{\|\nabla\lambda\|_{L^\infty(B(0,1))}}{\epsilon^{n+1}}\|u_m\|_{L^1(B(0,R))} \leq \frac{C''}{\epsilon^{n+1}}.
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Weiter gilt mit (3.13) $\quad \|u_m - u_{m,\epsilon}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \sup_{|h|<\epsilon} \|u_m(.+h) - u_m\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \quad$ und

$$\|u_m(.+h)-u_m\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \int |u_m(x+h)-u_m(x)|^p \,\mathrm{d}^\mathrm{n}x \leq \int\!\left(\int_0^1 |h\cdot\nabla u_m(x+th)|\,\mathrm{d}t\right)^p \mathrm{d}^\mathrm{n}x$$

$$\leq \int\int_0^1 |h\cdot\nabla u_m(x+th)|^p \,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}^\mathrm{n}x \leq |h|^p \int_0^1\int |\nabla u_m(x+th)|^p \,\mathrm{d}^\mathrm{n}x\,\mathrm{d}t = |h|^p \|\nabla u_m\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Zusammen ergibt dies
$$\|u_m - u_{m,\epsilon}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \epsilon \|\nabla u_m\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \tag{3.26}$$

Wegen (3.25) und dem Satz von Arzela-Ascoli können wir induktiv für jedes $j \in \mathbb{N}$ die Folgenglieder u_m zu $m \geq j$ durch eine Teilfolge von $(u_m)_{m\geq j}$ ersetzen, so dass $u_{m,j} := u_{m,\epsilon_j}$ mit $\epsilon_j = \frac{1}{j}$ gleichmäßig auf $B(0,R)$ und somit in $L^p(B(0,R))$ konvergiert: $\limsup\limits_{m,l\to\infty} \|u_{m,j} - u_{l,j}\|_{L^p(B(0,R))} = 0$. Mit (3.26) folgt $\limsup\limits_{m,l\to\infty} \|u_m - u_l\|_{L^p(B(0,R))} \leq 2C\epsilon_j$. Der Grenzwert $j \to \infty$ zeigt, dass u_m in $L^p(B(0,R))$ eine Cauchyfolge ist. **q.e.d.**

Mit dem Satz von Rellich erhalten wir eine Poincaréungleichung.

Poincaréungleichung 3.43. *Es sei $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ offen, zusammenhängend mit $\partial\Omega \in C^{0,1}, 1 \leq p \leq \infty$, und $M \subset W^{1,p}(\Omega)$ ein abgeschlossener Kegel, d.h. mit $u \in M$ folgt $\lambda u \in M$ für $\lambda > 0$, der außer $0 \in M$ keine Konstanten enthält. Dann gilt*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \qquad \text{für ein } C > 0 \text{ und für alle } u \in M.$$

Beweis: Angenommen die Gleichung ist falsch, dann existieren $u_m \in M$ mit

$$\|\nabla u_m\|_{L^p(\Omega)} < \tfrac{1}{m}\|u_m\|_{L^p(\Omega)}.$$

Nach Übergang zu $\frac{u_m}{\|u_m\|_{L^p(\Omega)}} \in M$ können wir weiter $\|u_m\|_{L^p(\Omega)} = 1$ annehmen, und u_m ist beschränkt in $W^{1,p}(\Omega)$. Nach dem Satz von Rellich konvergiert für eine Teilfolge $u_m \to u$ in $L^p(\Omega)$ mit $\|u\|_{L^p(\Omega)} = 1$. Andererseits konvergiert wegen obiger Ungleichung $\nabla u_m \to 0$ in $L^p(\Omega)$ und daher $u_m \to u$ in $W^{1,p}(\Omega)$. Also ist $u \in M$ mit $\nabla u = 0$, und nach Proposition 3.23 ist $u \equiv \text{const}$, also nach der Vorraussetzung $u = 0$. Dies widerspricht $\|u\|_{L^p(\Omega)} = 1$, und die Ungleichung ist bewiesen. **q.e.d.**

Die Kombination des Satzes von Rellich mit dem Lemma von Ehrling 3.3, ergibt das

Interpolationslemma für Sobolevräume 3.44. *(i) Für $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^n), 1 \leq p \leq \infty$ gilt*

$$\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C(n,p)\|u\|^{\frac{1}{2}}_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|D^2 u\|^{\frac{1}{2}}_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

(ii) Für $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ offen mit $\partial\Omega \in C^{1,1}$, $u \in W^{2,p}(\Omega)$ und $1 \leq p \leq \infty$ gilt für $0 < \epsilon < 1$

$$\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \leq \epsilon\|D^2 u\|_{L^p(\Omega)} + C(\Omega,n,p)\epsilon^{-1}\|u\|_{L^p(\Omega)}$$

Beweis: (i) Sei Q_ϱ ein offener Würfel mit Seitenlänge ϱ. Die Einbettungen

$$W^{2,p}(Q_1) \hookrightarrow W^{1,p}(Q_1) \hookrightarrow L^p(Q_1)$$

sind wegen dem Satz von Rellich 3.42 kompakt. Mit dem Lemma von Ehrling 3.3 folgt

$$\begin{aligned} &\|\nabla u\|_{L^p(Q_1)} \leq \tfrac{1}{2}\|u\|_{W^{2,p}(Q_1)} + \tfrac{1}{2}\tilde{C}(n,p)\|u\|_{L^p(Q_1)} \leq \\ &\quad \leq \tfrac{1}{2}\|\nabla u\|_{L^p(Q_1)} + \tfrac{1}{2}\|D^2 u\|_{L^p(Q_1)} + \tfrac{1}{2}\tilde{C}(n,p)\|u\|_{L^p(Q_1)} \text{ für } u \in W^{2,p}(Q_1), \qquad \text{also} \end{aligned}$$

$$\|\nabla u\|_{L^p(Q_1)} \leq \|D^2 u\|_{L^p(Q_1)} + \tilde{C}(n,p)\|u\|_{L^p(Q_1)}.$$

Für $\varrho > 0$ und $u \in W^{2,p}(Q_\varrho)$, reskalieren wir $v(x) := u(\varrho x)$ und erhalten

$$\begin{aligned} \|\nabla u\|_{L^p(Q_\varrho)} &= \varrho^{-1+\frac{n}{p}}\|\nabla v\|_{L^p(Q_1)} \leq \varrho^{-1+\frac{n}{p}}\|D^2 v\|_{L^p(Q_1)} + \tilde{C}(n,p)\varrho^{-1+\frac{n}{p}}\|v\|_{L^p(Q_1)} \\ &= \varrho\|D^2 u\|_{L^p(Q_\varrho)} + \tilde{C}(n,p)\varrho^{-1}\|u\|_{L^p(Q_\varrho)}. \end{aligned}$$

Wir überdecken $\mathbb{R}^n$ bis auf eine Nullmenge N durch abzählbar viele disjunkte Würfel der Seitenlänge ϱ: $\mathbb{R}^n \setminus N = \bigcup_{i=1}^\infty Q_\varrho^i$. Für $a, b \geq 0$ gilt $(\frac{a+b}{2})^p \leq \frac{a^p+b^p}{2} \leq \max^p\{a,b\} \leq (a+b)^p$ wegen der Konvexität von $x \to x^p$. Für $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^n)$ und $1 \leq p < \infty$ folgt

$$\begin{aligned} &\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p = \sum_{i=1}^\infty \|\nabla u\|_{L^p(Q_\varrho^i)}^p \leq 2^{p-1}\sum_{i=1}^\infty \Big(\varrho^p\|D^2 u\|_{L^p(Q_\varrho^i)}^p + \tfrac{\tilde{C}^p(n,p)}{\varrho^p}\|u\|_{L^p(Q_\varrho^i)}^p\Big) \\ &= \tfrac{1}{2}(2\varrho\|D^2 u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)})^p + \tfrac{1}{2}(\tfrac{2\tilde{C}(n,p)}{\varrho}\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)})^p \leq \Big(2\varrho\|D^2 u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \tfrac{4\tilde{C}(n,p)}{2\varrho}\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\Big)^p, \end{aligned}$$

also $\quad \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \tilde{\varrho}\|D^2 u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + 4\tilde{C}(n,p)\tilde{\varrho}^{-1}\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \quad$ für alle $\tilde{\varrho} = 2\varrho > 0$. (3.27)

Für $p = \infty$ erhalten wir $\qquad \|\nabla u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = \sup_{i \in \mathbb{N}} \|\nabla u\|_{L^\infty(Q_\varrho^i)} \leq$

$$\leq \sup_{i \in \mathbb{N}}\Big(\varrho\|D^2 u\|_{L^\infty(Q_\varrho^i)} + \tilde{C}(n,\infty)\varrho^{-1}\|u\|_{L^\infty(Q_\varrho^i)}\Big) = \varrho\|D^2 u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + \tilde{C}(n,\infty)\varrho^{-1}\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)},$$

also wieder (3.27). Für $\epsilon > 0$ setzen wir $\quad \varrho := \sqrt{\dfrac{\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \epsilon}{\|D^2 u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \epsilon}} > 0 \quad$ und erhalten

$$\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^2 \leq C(n,p)(\|D^2 u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \epsilon)(\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \epsilon)$$

mit $C(n,p) = 1 + 4\tilde{C}(n,p)$ aus (3.27). Im Grenzwert $\epsilon \downarrow 0$ folgt (i).

(ii) Für $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ offen mit $\partial\Omega \in C^{1,1}$ und $1 \leq p \leq \infty$ erhalten wir mit dem Fortsetzungssatz 3.32 für $u \in W^{2,p}(\Omega)$ wegen $0 < \epsilon < \epsilon^{-1} \Longleftrightarrow 0 < \epsilon < 1$ und $2ab < a^2 + b^2$

$$\begin{aligned}\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} &\leq \|Eu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C(n,p)\|Eu\|^{1/2}_{L^p(\mathbb{R}^n)}\|D^2 Eu\|^{1/2}_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|Eu\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq 2\tilde{C}(\Omega,n,p)\|u\|^{1/2}_{L^p(\Omega)}\|u\|^{1/2}_{W^{2,p}(\Omega)} \leq \tfrac{\epsilon}{2}\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} + 2\tilde{C}^2(\Omega,n,p)\epsilon^{-1}\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq \\ &\leq \tfrac{\epsilon}{2}\|D^2u\|_{L^p(\Omega)} + \tfrac{\epsilon}{2}\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} + \left(2\tilde{C}^2(\Omega,n,p) + \tfrac{1}{2}\right)\epsilon^{-1}\|u\|_{L^p(\Omega)}.\end{aligned}$$

Nach Absorption von $\epsilon\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ folgt (ii) mit $C(\Omega,n,p) = 4\tilde{C}^2(\Omega,n,p) + 1$. **q.e.d.**

Wir zeigen jetzt, dass Sobolevfunktionen höhere Integrabilität besitzen.

Sobolevungleichung 3.45. *Es sei $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n), 1 \leq p < n$. Dann gilt*

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C(n,p)\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \qquad \text{für } p^* := \tfrac{np}{n-p} \qquad \text{d.h. } 1 - \tfrac{n}{p} = -\tfrac{n}{p^*}.$$

Beweis: Zuerst sei $p = 1, p^* = \frac{n}{n-1}$ und $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} u(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n) &= \int_{-\infty}^{x_i} \partial_i u(x_1,\ldots,t_i,\ldots,x_n)\,\mathrm{d}t_i, && \text{also} \\ |u(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}} |\nabla u(x_1,\ldots,t_i,\ldots,x_n)|\,\mathrm{d}t_i && \text{und} \\ |u(x)|^{\frac{n}{n-1}} &\leq \prod_{i=1}^n \left(\int_{\mathbb{R}} |\nabla u(x_1,\ldots,t_i,\ldots,x_n)|\,\mathrm{d}t_i\right)^{\frac{1}{n-1}}. \end{aligned}$$

Nun integrieren wir bezüglich x_1. Dies ergibt mit (3.10) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |u(x_1,\ldots,x_n)|^{\frac{n}{n-1}}\,\mathrm{d}x_1 \leq$

$$\begin{aligned} &\leq \left(\int_{\mathbb{R}} |\nabla u(t_1,x_2,\ldots,x_n)|\,\mathrm{d}t_1\right)^{\frac{1}{n-1}} \int_{\mathbb{R}} \prod_{i=2}^n \left(\int_{\mathbb{R}} |\nabla u(x_1,\ldots,t_i,\ldots,x_n)|\,\mathrm{d}t_i\right)^{\frac{1}{n-1}} \mathrm{d}x_1 \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}} |\nabla u(t_1,x_2,\ldots,x_n)|\,\mathrm{d}t_1\right)^{\frac{1}{n-1}} \prod_{i=2}^n \left(\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |\nabla u(x_1,\ldots,t_i,\ldots,x_n)|\,\mathrm{d}t_i\,\mathrm{d}x_1\right)^{\frac{1}{n-1}}. \end{aligned}$$

Sukzessive Integration über $x_2,\ldots,x_n$ ergibt $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{n}{n-1}}\,\mathrm{d}\mu \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{n}{n-1}}$, also

$$\|u\|_{L^{\frac{n}{n-1}}(\mathbb{R}^n)} \leq \|\nabla u\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}. \tag{3.28}$$

Für $u \in W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$ gibt es nach Proposition 3.24 $u_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \cap W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$ mit $u_j \to u$ in $W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$. Eine Teilfolge von u_j konvergiert fast überall gegen u. Mit (3.28) folgt

$$\|u\|_{L^{\frac{n}{n-1}}(\mathbb{R}^n)} \leq \liminf_{j\to\infty} \|u_j\|_{L^{\frac{n}{n-1}}(\mathbb{R}^n)} \leq \liminf_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_j|\,\mathrm{d}\mu = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|\,\mathrm{d}\mu. \tag{3.29}$$

Im Fall $1 < p < n$ setzen wir $v = |u|^\gamma$ für $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $\gamma > 1$. Mit (3.29) gilt

$$\|u\|^\gamma_{L^{\frac{n\gamma}{n-1}}(\mathbb{R}^n)} = \|v\|_{L^{\frac{n}{n-1}}(\mathbb{R}^n)} \leq \|\nabla v\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \int_{\mathbb{R}^n} \gamma |u|^{\gamma-1} |\nabla u| \, \mathrm{d}\mu \leq \gamma \|u\|^{\gamma-1}_{L^{\frac{p(\gamma-1)}{p-1}}(\mathbb{R}^n)} \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Wir wählen γ so, dass $\frac{n\gamma}{n-1} = \frac{p(\gamma-1)}{p-1}$ bzw. $\frac{p-1}{p}\gamma = \frac{n-1}{n}(\gamma-1)$, also $\left(\frac{p-1}{p} - \frac{n-1}{n}\right)\gamma = -\frac{n-1}{n}$ und $\frac{n\gamma}{n-1} = \frac{1}{\frac{1}{p}-\frac{1}{n}} = \frac{np}{n-p} = p^*$. Dies ergibt $\qquad \|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq \gamma \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$.
Für allgemeine $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ folgt dies mit Proposition 3.24 wie oben. **q.e.d.**

Soboleveinbettungssatz 3.46. *Für $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ offen mit $\partial\Omega \in C^{0,1}$, $k, l \in \mathbb{N}_0$, und $1 \leq p, q < \infty$ sind folgende Einbettungen stetig und bei strikten Ungleichungen kompakt:*

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{l,q}(\Omega) \qquad \text{für} \qquad k \geq l \qquad \text{und} \qquad k - \tfrac{n}{p} \geq l - \tfrac{n}{q}. \tag{3.30}$$

Beweis: Zuerst betrachten wir den Spezialfall $k = 1, l = 0, 1 \leq p < n, 1 - \frac{n}{p} \geq -\frac{n}{q}$. Für $u \in W^{1,p}(\Omega)$ folgt $Eu \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ mit dem Fortsetzungsoperator E aus Satz 3.32 aus der Sobolevungleichung 3.45 und

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq \|Eu\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C(n,p)\|\nabla Eu\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C(\Omega,n,p)\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Aus $-\frac{n}{p^*} = 1 - \frac{n}{p} \geq -\frac{n}{q}$ folgt $1 \leq q \leq p^*$. Wegen (3.9) ist $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ stetig. Gilt die strikte Ungleichung in (3.30), also $1 \leq q < p^*$, und ist u_m beschränkt in $W^{1,p}(\Omega)$, so ist u_m nach dem Gezeigten beschränkt in $L^{p^*}(\Omega)$, und nach dem Satz von Rellich 3.42 konvergiert eine Teilfolge u_m in $L^p(\Omega)$ gegen u. Für $1 \leq q \leq p$ folgt der Spezialfall aus (3.9). Für $p < q < p^*$ und $M > 0$ folgt $\limsup_{m\to\infty} \|u_m - u\|^q_{L^q(\Omega)} =$

$$= \limsup_{m\to\infty} \left(\|(u_m-u)\chi_{[|u_m-u|\leq M]}\|^q_{L^q(\Omega)} + \|(u_m-u)\chi_{[|u_m-u|>M]}\|^q_{L^q(\Omega)} \right)$$
$$\leq M^{q-p} \limsup_{m\to\infty} \|u_m-u\|^p_{L^p(\Omega)} + M^{q-p^*} \limsup_{m\to\infty} \|u_m-u\|^{p^*}_{L^{p^*}(\Omega)} \leq M^{q-p^*}(2C)^{p^*},$$

weil $|u_m-u|^q \leq M^{q-p}|u_m-u|^p$ auf $[|u_m-u| \leq M]$, und $M^{p^*-q}|u_m-u|^q < |u_m-u|^{p^*}$ auf $[|u_m-u| > M]$ gilt. Im Grenzwert $M \to \infty$ folgt der Spezialfall.

Die allgemeine Aussage beweisen wir mit Induktion in $k - l \in \mathbb{N}_0$. Für $k = l$ gilt $1 \leq q \leq p$ und die Aussage folgt mit (3.9) aus der Stetigkeit von $L^p(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$.

Nun sei $k = l+1$. Dann gilt $1 - \frac{n}{p} \geq -\frac{n}{q}$. Da $q < \infty$, gilt $-\frac{n}{q} < 0$, und wir können o.B.d.A. $1 \leq p < n$ annehmen. Für $u \in W^{k,p}(\Omega)$ und $|\gamma| \leq l$ ist $\partial^\gamma u \in W^{1,p}(\Omega)$, und

$$\|\partial^\gamma u\|_{L^q(\Omega)} \leq C(\Omega,n,p)\|\partial^\gamma u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq C(\Omega,n,p)\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}$$

folgt aus dem Gezeigtem. Dann ist $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{l,q}(\Omega)$ stetig. Für strikte Ungleichheit in (3.30) und u_m beschränkt in $W^{k,p}(\Omega)$ ist $\partial^\gamma u_m$ für $|\gamma| \leq l$ beschränkt in $W^{1,p}(\Omega)$. Mit dem Spezialfall konvergiert eine Teilfolge $\partial^\gamma u_m$ in $L^q(\Omega)$, also u_m in $W^{l,q}(\Omega)$.

Schließlich sei $k \geq l+2$. Ist $p \geq n$, so gilt $k - \frac{n}{p} > (k-1) - \frac{n}{n} \geq l > l - \frac{n}{q}$ und per Induktion ist die folgende Einbettung kompakt:

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{k-1,n}(\Omega) \hookrightarrow W^{l,q}(\Omega).$$

$$\text{Ist } 1 \leq p < n, \text{ so gilt} \qquad k - \tfrac{n}{p} = (k-1) - \tfrac{n}{p^*} \geq l - \tfrac{n}{q}, \tag{3.31}$$

$$\text{und per Induktion ist die Einbettung} \quad W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{k-1,p^*}(\Omega) \hookrightarrow W^{l,q}(\Omega) \tag{3.32}$$

stetig. Ist die Ungleichung in (3.30) strikt, dann auch in (3.31), und per Induktion ist die zweite Einbettung in (3.32) kompakt, also auch die Einbettung (3.30). **q.e.d.**

Bemerkung 3.47. *Im kritischen Fall* $1 - \frac{n}{p} = -\frac{n}{\infty} := 0$, *also* $p = n$, *gilt für* $n \geq 2$ $W^{1,n}(\Omega) \not\subseteq L^\infty(\Omega)$. *Dazu betrachten wir auf* $B(0,1)$

$$u(x) := \ln(1 + |\ln|x||).$$

Klarerweise gilt $u \notin L^\infty(B(0,1))$. *Weiter gilt* $u \in W^{1,n}(B(0,1))$ *für* $n \geq 2$ *wegen*

$$|\nabla u(x)| = \frac{1}{|x|(1+|\ln|x||)} \quad \|\nabla u\|^n_{L^p(B(0,1))} = \int_0^1 \frac{n\omega_n r^{n-1}\,\mathrm{d}r}{r^n(1-\ln r)^n} = \int_0^\infty \frac{n\omega_n\,\mathrm{d}t}{(1+t)^n} = \frac{n\omega_n}{n-1}.$$

Nun betten wir Sobolevräumen in Hölderräume ein. Dazu folgende Abschätzung:

Lemma 3.48. *Für* $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ *konvex,* $S \subset \Omega$ *meßbar mit* $\mu(S) > 0$ *und* $u \in W^{1,1}(\Omega)$ *gilt*

$$|u(x) - u_S| \leq \frac{\operatorname{diam}^n(\Omega)}{n \cdot \mu(S)} \int_\Omega |x-y|^{1-n} |\nabla u(y)|\,\mathrm{d}^n y \ \text{a.e. in } \Omega \text{ mit } \ u_S = \frac{1}{\mu(S)} \int_S u\,\mathrm{d}\mu.$$

Beweis: Mit Approximation von u durch glatte Funktionen wie in Proposition 3.24 erhalten wir fast überall auf $x \neq y \in \Omega$ mit $d = \operatorname{diam}\Omega$, $r = |x-y|$ und $\omega = \frac{y-x}{|y-x|}$

$$u(x) - u(y) = -\int_0^{|x-y|} \nabla u(x + s\omega)\omega\,\mathrm{d}s.$$

Integration von y über S ergibt $\quad \mu(S)|u(x) - u_S| \leq \int_S \int_0^{|x-y|} |\nabla u(x+s\omega)|\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}^n y$

$$\leq \int_0^d \int_{B(x,d)} |\nabla u(x+s\omega)| \chi_\Omega(x+s\omega)\,\mathrm{d}^n y\,\mathrm{d}s = \int_0^d \int_{\partial B(0,1)} \int_0^d |\nabla u(x+s\omega)| \chi_\Omega(x+s\omega) r^{n-1}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}s$$

$$= \frac{d^n}{n} \int_0^d \int_{\partial B(0,1)} |\nabla u(x+r\omega)| \chi_\Omega(x+r\omega)\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}r = \frac{d^n}{n} \int_\Omega |x-y|^{1-n} |\nabla u(y)|\,\mathrm{d}^n y. \quad \textbf{q.e.d.}$$

Nun kommen wir zum Einbettungssatz in Hölderräume.

Satz von Morrey 3.49. *Für $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ offen mit $\partial\Omega \in C^{0,1}$, $k > l \in \mathbb{N}_0$, $1 \leq p < \infty$ und $0 < \alpha < 1$ sind folgende Einbettungen stetig und bei strikter Ungleichung kompakt:*

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{l,\alpha}(\Omega) \qquad \text{mit} \qquad k - \tfrac{n}{p} \geq l + \alpha. \tag{3.33}$$

Beweis: Die Kompaktheit der Einbettungen ergibt sich sofort aus der Stetigkeit der Einbettungen und Proposition 3.13: Gilt in (3.33) die strikte Ungleichung, so wählen wir $0 < \beta < 1$ mit $k - \frac{n}{p} > l + \beta > l + \alpha$, und erhalten die stetige Einbettungen

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{l,\beta} \hookrightarrow C^{l,\alpha}(\Omega).$$

Nach Proposition 3.13 ist die zweite Einbettung kompakt, also auch die Gesamteinbettung. Daher genügt es die Stetigkeit der Einbettungen zu beweisen.

Zuerst betrachten wir den Spezialfall $k = 1, l = 0, 1 - \frac{n}{p} = \alpha \in (0,1)$. Mit dem Fortsetzungsoperator E aus Satz 3.32 gilt für $B(0,R) \Supset \Omega$ und $u \in W^{1,p}(\Omega)$

$$Eu \in W^{1,p}_0(B(0,R)) \qquad \|Eu\|_{W^{1,p}(B(0,R))} \leq C(\Omega, n, p)\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Zum Beweis der Stetigkeit der Einbettung im Spezialfall genügt es folgendes zu zeigen:

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)} \leq C(n,p)\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \text{ für alle } u \in C^\infty_0(\mathbb{R}^n). \tag{3.34}$$

Im Spezialfall gilt $n < p < \infty$ und deshalb $1 < q < \frac{n}{n-1}$ für $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Es folgt

$$\||x - \cdot|^{1-n}\|_{L^q(B(0,1))} \leq \left(\int_{B(0,2)} |y|^{q(1-n)}\, \mathrm{d}^n y\right)^{1/q} \leq C(n,p) \quad \text{für alle} \quad x \in B(0,1).$$

Mit Lemma 3.48 und der Hölderungleichung folgt für $u \in C^\infty_0(\mathbb{R}^n)$

$$\operatorname*{osc}_{B(0,1)} u := \sup_{x,y \in B(0,1)} u(x) - u(y) \leq 2\|u - u_{B(0,1)}\|_{L^\infty(B(0,1))} \leq C(n,p)\|\nabla u\|_{L^p(B(0,1))}. \tag{3.35}$$

Durch Reskalieren $v(x) := u(z + \varrho x)$ erhalten wir für alle $B(z,\varrho) \subset \mathbb{R}^n$ wegen $1 - \frac{n}{p} = \alpha$

$$\operatorname*{osc}_{B(z,\varrho)} u := \sup_{x,y \in B(z,\varrho)} u(x) - u(y) = \operatorname*{osc}_{B(0,1)} v \leq C(n,p)\|\nabla v\|_{L^p(B(0,1)} = C(n,p)\varrho^\alpha \|\nabla u\|_{L^p(B(z,\varrho)},$$

Daraus folgt für $x \neq y \in \mathbb{R}^n$, $\varrho := \frac{|x-y|}{2}$, $z := \frac{x+y}{2}$, $x, y \in \overline{B(z,\varrho)}$, dass

$$|u(x) - u(y)| \leq \operatorname*{osc}_{B(z,\varrho)} u \leq C(n,p)\varrho^\alpha \|\nabla u\|_{L^p(B(z,\varrho))} \qquad \text{höl}_{\mathbb{R}^n,\alpha}\, u \leq C(n,p)\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Schließlich folgt aus (3.35) für beliebiges $B_1 = B(z,1) \subset \mathbb{R}^n$ $\qquad \|u\|_{L^\infty(B_1)} \leq$

$$\leq \|u - u_{B_1}\|_{L^\infty(B_1)} + |u_{B_1}| \leq C(n,p)\|\nabla u\|_{L^p(B_1)} + C(n)\|u\|_{L^1(B_1)} \leq C'(n,p)\|u\|_{W^{1,p}(B_1)}.$$

Damit ist (3.34) und der Spezialfall bewiesen.

Wenn $1 - \frac{n}{p} \geq \alpha$, ist für $\bar{\alpha} := 1 - \frac{n}{p} \in (0,1)$ die Einbettung

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\bar{\alpha}}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\Omega)$$

mit dem eben Gezeigten und Proposition 3.13 stetig.

Die allgemeine Aussage beweisen wir mit Induktion in $k - l \in \mathbb{N}$. Für $k = l+1$ gilt $1 - \frac{n}{p} \geq \alpha$. Für $u \in W^{k,p}(\Omega)$ und $|\gamma| \leq l$ gilt $\partial^\gamma u \in W^{1,p}(\Omega)$, und wegen dem Gezeigten

$$\|\partial^\gamma u\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} \leq C(\Omega, n, p)\|\partial^\gamma u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq C(\Omega, n, p)\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}.$$

Also ist die Einbettung $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{l,\alpha}(\Omega)$ stetig.

Für $k \geq l+2$ und $n \leq p$ gilt $k - \frac{n}{p} \geq (k-1) > l + \alpha$. Für großes $\bar{p} < \infty$ ist

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{k-1,\bar{p}}(\Omega) \hookrightarrow C^{l,\alpha}(\Omega)$$

wegen Satz 3.46 und durch Induktion eine kompakte Einbettung.

Für $k \geq l+2$ und $1 \leq p < n$ gilt $k - \frac{n}{p} = (k-1) - \frac{n}{p^*} \geq l + \alpha$, und die Einbettung

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{k-1,p^*}(\Omega) \hookrightarrow C^{l,\alpha}(\Omega)$$

ist durch Induktion und mit dem Satz 3.46 stetig. **q.e.d.**

Auf einer offenen Teilmenge $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ erfülle $f \in L^1(\Omega)$ für ein $K > 0$

$$\nu(r) := \int_{B(x,r)\cap\Omega} |f| \, \mathrm{d}\mu \leq K r^{n\delta} \qquad \text{für ein } \delta \in [0,1] \text{ und alle } x \in \Omega, r > 0. \tag{3.36}$$

Dann gilt für $0 \leq \mu < \delta$, $d = \operatorname{diam}\Omega$ und alle $x \in \Omega$

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega |x-y|^{-n\mu} f(y) \, \mathrm{d}^{\mathrm{n}} y\right| &\leq \int_0^d \rho^{-n\mu} \, \mathrm{d}\nu(\rho) = d^{-n\mu}\nu(d) + n\mu \int_0^d \rho^{-n\mu-1}\nu(\rho) \, \mathrm{d}\rho \\
&\leq d^{n(\delta-\mu)} K + n\mu K \int_0^d \rho^{n(\delta-\mu)-1} \, \mathrm{d}\rho = K d^{n(\delta-\mu)}\left(1 + \frac{n\mu}{n(\delta-\mu)}\right), \text{ also} \\
\left|\int_{B(x,\rho)\cap\Omega} |x-y|^{-n\mu} f(y) \, \mathrm{d}^{\mathrm{n}} y\right| &\leq \frac{\delta}{\delta-\mu} d^{n(\delta-\mu)} K \text{ für all } x \in \Omega. \qquad (3.37)
\end{aligned}$$

Die Menge aller Funktionen $f \in L^1(\Omega)$ die (3.36) für $\delta = 1 - \frac{1}{p}$ mit $p \in [0, \infty]$ erfüllen bilden mit dem Infimum aller Konstanten K in (3.36) als Norm einen Banachraum. Für $f \in L^p(\Omega)$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gilt wegen der Hölderungleichung $\|f|_{B(x,r)\cap\Omega}\|_1 \leq \|\chi_{B(x,r)}\|_q \cdot \|f\|_p = \omega_n^\delta r^{n\delta}\|f\|_{L^p(\Omega)}$, also $K \leq \omega_n^\delta \|f\|_{L^p(\Omega)}$. Dieser Banchraum ist also etwas größer als $L^p(\Omega)$, aber verwandt. In den beiden abschließenden Sätzen betrachten wir Funktionen, deren Ableitungen in diesem Banachraum liegen. Zuerst zeigen wir, dass sich die Einbettung $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\Omega)$ für $p = \frac{1}{1-\delta} = \frac{1}{1-\frac{n-1+\alpha}{n}} = \frac{n}{1-\alpha} > n$ auf diese Funktionen fortsetzt. Danach zeigen wir im John-Nirenberg Lemma, dass im Grenzfall $p = n$, diese Funktionen zwar nicht beschränkt sind, aber exponenziert werden können.

Satz 3.50. *Für $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ offen mit $\partial\Omega \in C^{0,1}$, $\alpha \in (0,1]$ und $u \in W^{1,1}(\Omega)$ mit*

$$\int_{B(x,r)\cap\Omega} |\nabla u| \,\mathrm{d}\mu \leq K r^{n-1+\alpha} \qquad \text{für ein } K > 0 \text{ und alle } B(x,r) \Subset \Omega, \tag{3.38}$$

folgt $u \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ mit $\mathrm{höl}_{\Omega,\alpha}\, u \leq C(n,\alpha,\Omega)K$.

Beweis: Wir setzen u mit dem Fortsetzungsoperator E nach $W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$ fort. Aufgrund der Konstruktion von E_0 erfüllt $E_0 u$ (3.38) auf $\Omega = \mathbb{R}^n$ mit $K \to C(n)K$ für alle $B(x,r) \Subset \mathbb{R}^n_-$, wenn (3.38) für alle $B(x,r) \Subset \mathbb{R}^n_+$ gilt. Für $\varrho > \max\{\frac{3}{4}\sqrt{2n-2}, \frac{3}{2}\}$ überdeckt $B(0,\varrho) \subset \mathbb{R}^n$ eine Umgebung von $(-1,1)^{n-1} \times (-\frac{1}{3}\varrho, \frac{1}{3}\varrho)$ und es gilt $\frac{4}{3}\varrho > 2$. Wenn der Abschluss von $B(x,r)$ Punkte in $\mathbb{R}^n_0$ enthält, überdecken für jedes $l \in \mathbb{N}_0$ jeweils $2^{(n-1)l}$ Bälle $\Subset \mathbb{R}^n_+$ und ebensoviele $\Subset \mathbb{R}^n_-$ mit Radius $r_l = 2^{-l}\varrho r$ die Teilmengen

$$\{y \in B(x,r) \mid y_n \in (\tfrac{2}{3}r_l, \tfrac{4}{3}r_l)\} \quad \text{und} \quad \{y \in B(x,r) \mid y_n \in (-\tfrac{4}{3}r_l, -\tfrac{2}{3}r_l)\}. \quad \text{Wegen}$$

$$2C(n)\sum_{l=0}^{\infty} 2^{(n-1)l} K r_l^{n-1+\alpha} = 2C(n)K(\varrho r)^{n-1+\alpha}\sum_{l=0}^{\infty} 2^{-l\alpha} = C(n,\alpha)K r^{n-1+\alpha}$$

gilt dann (3.38) für alle Bälle mit $K \to C(n,\alpha)K$. Wie im Fortsetzungssatz gilt das auch für Eu mit $K \to C(n,\alpha,\Omega)K$. Für $\Omega = S = B(x,r)$ folgt aus Lemma 3.48 und (3.37) für $f = \nabla u$, $n-1+\alpha = n\delta \iff \delta = 1 - \frac{1-\alpha}{n}$ und $-n\mu = 1-n \iff \mu = 1 - \frac{1}{n} < \delta$

$$\operatorname*{osc}_{B(x,r)} u \leq \sup_{y,z \in B(x,r)} u(y) - u(z) \leq \frac{2(2r)^n}{n\omega_n r^n}\frac{\delta}{\delta-\mu}(2r)^{n(\delta-\mu)}K = C(n,\alpha,\Omega)K r^{\alpha}. \qquad \textbf{q.e.d.}$$

Auf einer offenen Teilmenge $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ erfülle $f \in L^1(\Omega)$ wieder (3.36). Für $1 \leq q$ gilt wegen $-n\mu = n(\frac{1-\mu}{q} - 1)\frac{1}{q} + n\left((1-\mu)(1+\frac{1}{q}) - 1\right)(1 - \frac{1}{q})$ und der Hölderungleichung

$$\left|\int_\Omega |x-y|^{-n\mu} f(y)\,\mathrm{d}^n y\right| \leq \left(\int_\Omega |x-y|^{n(\frac{1-\mu}{q}-1)}|f(y)|\,\mathrm{d}^n y\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_\Omega |x-y|^{n\left((1-\mu)(1+\frac{1}{q})-1\right)}|f(y)|\,\mathrm{d}^n y\right)^{\frac{q-1}{q}}.$$

Mit (3.37) für $\delta \to \mu$ und $\mu \to 1-(1-\mu)(1+\frac{1}{q})$ schätzen wir den zweiten Faktor ab

$$\int_\Omega |x-y|^{n\left((1-\mu)(1+\frac{1}{q})-1\right)}|f(y)|\,\mathrm{d}^n y \leq \frac{\mu}{\mu - 1 + (1-\mu)(1+\frac{1}{q})} d^{n\frac{1-\mu}{q}} K = \frac{q\mu}{1-\mu} d^{n\frac{1-\mu}{q}} K.$$

Wegen $\frac{1-\mu}{q} \in (0,1]$ ist für gegebenes $\mu(\Omega)$ die Verteilungsfunktion $\mu_{h_x}(t) := \mu(\{y \in \Omega \mid |h_x(y)| > t\}$ von $h_x(y) = |x-y|^{n(\frac{1-\mu}{q}-1)}$ punktweise dann am größten, wenn $\Omega = B(x,R)$ für $\omega_n R^n = \mu(\Omega) \iff R = \left(\frac{\mu(\Omega)}{\omega_n}\right)^{\frac{1}{n}}$. In diesem Fall ist die Verteilungsfunktion gleich

$$\mu_{h_x}(t) = \begin{cases} \mu(\Omega) & \text{für } t \le \tau^{\frac{1-\mu-q}{q}} \\ \omega_n t^{\frac{q}{1-\mu-q}} & \text{für } t > \tau^{\frac{1-\mu-q}{q}} \end{cases} \qquad \text{mit } \tau = \frac{\mu(\Omega)}{\omega_n} = R^n.$$

Dann ist auch die $L^1(\Omega)$-Norm $\|h_x\|_1$ beschränkt durch

$$\|h_x\|_1 = -\int_0^\infty t\,\mathrm{d}\mu_{h_x} = -t\mu_{h_x}(t)\Big|_0^\infty + \int_0^\infty \mu_{h_x}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \mu_{h_x}(t)\,\mathrm{d}t \le$$
$$\le \mu(\Omega)\tau^{\frac{1-\mu-q}{q}} + \int_{\tau^{\frac{1-\mu-q}{q}}}^\infty \omega_n t^{\frac{q}{1-\mu-q}}\,\mathrm{d}t = \omega_n\tau\cdot\tau^{\frac{1-\mu-q}{q}} - \frac{\omega_n\tau\cdot\tau^{\frac{1-\mu-q}{q}}}{\frac{q}{1-\mu-q}+1} = \frac{q\omega_n}{1-\mu}\left(\frac{\mu(\Omega)}{\omega_n}\right)^{\frac{1-\mu}{q}}.$$

Mit Fubini, (3.36) für $\delta = \mu$ und $\mu(\Omega) \le \omega_n d^n$ schätzen wir folgendes Integral ab

$$\int_\Omega \int_\Omega |x-y|^{n(\frac{1-\mu}{q}-1)}|f(y)|\,\mathrm{d^n}y\,\mathrm{d^n}x \le \sup_{x\in\Omega} \|h_x\|_1 \|f\|_1 \le \frac{q\omega_n K d^{n(\mu+\frac{1-\mu}{q})}}{1-\mu}.$$

Zusammen mit der Abschätzung des zweiten Faktors erhalten wir dann für alle $1 \le q$

$$\int_\Omega \left|\int_\Omega |x-y|^{-n\mu} f(y)\mathrm{d^n}y\right|^q \mathrm{d^n}x \le \frac{q\omega_n K d^{n(\mu+\frac{1-\mu}{q})}}{1-\mu}\left(\frac{q\mu}{1-\mu}d^{n\frac{1-\mu}{q}}K\right)^{q-1} = \frac{\omega_n d^n}{\mu}\left(\frac{qK\mu}{1-\mu}\right)^q.$$

Mit dem Wurzelkriterium und $\lim_{l\to\infty} \frac{l}{\sqrt[l]{l!}} = e$ folgt die Beschränktheit von

$$\int_\Omega \exp\left|\frac{\sigma}{K}\int_\Omega |x-y|^{-n\mu} f(y)\,\mathrm{d^n}y\right|\mathrm{d^n}x \le \frac{\omega_n d^n}{\mu}\sum_{l=0}^\infty \frac{l^l}{l!}\left(\frac{\sigma\mu}{1-\mu}\right)^l < \infty \text{ für } \sigma < \frac{1-\mu}{e\mu}.$$

Für $\mu = \delta = \frac{n-1}{n}$ folgt aus Lemma 3.48 das folgende Lemma von John und Nirenberg:

John-Nirenberg Lemma 3.51. *Sei $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex und $u \in W^{1,1}(\Omega)$ mit*

$$\int_{\Omega\cap B(x,r)} |\nabla u|\,\mathrm{d}\mu \le Kr^{n-1} \qquad \textit{für ein } K > 0 \textit{ und alle } B(x,r) \subset \mathbb{R}^n,$$

dann existieren $\sigma_0 = \sigma_0(n) > 0$ und $C = C(n) > 0$ mit

$$\int_\Omega \exp\left(\frac{\sigma}{K}|u(x)-u_\Omega|\right)\mathrm{d^n}x \le C\,\mathrm{diam}^n(\Omega) \quad \textit{mit } \sigma = \sigma_0\mu(\Omega)\,\mathrm{diam}^{-n}(\Omega).$$ **q.e.d.**