Kapitel 2

Maximumprinzipien

2.1 Mittelwerteigenschaft harmonischer Funktionen

Für eine harmonische Funktion u auf einem Gebiet, das einen Ball $B(x,r)$ vom Radius r enthält, ist der Mittelwert von u auf dem Rand $\partial B(x,r)$ des Balles gerade gleich dem Wert von u am Mittelpunkt x. Weil das für beliebige Radien gilt und der Mittelwert von u auf dem Ball $B(x,r)$ gerade gleich einem gewichtetem Mittelwert aller Mittelwerte von u auf den Rändern der Bälle $B(x,r')$ mit $0 \leq r' \leq r$ ist, ist dann auch der Mittelwert auf dem Ball $B(x,r)$ gleich dem Wert von u am Mittelpunkt x. Dieser Sachverhalt führt zu aufschlussreichen Folgerungen.

Mittelwerteigenschaft 2.1. *Sei $u \in C^2(\Omega)$ eine harmonischen Funktion auf einem offenen Gebiet Ω, das den Ball $B(x,r)$ enthält. Dann sind die Mittelwerte von u auf dem Ball $B(x,r)$ und dessen Rand gleich dem Wert von u am Mittelpunkt x. Sind umgekehrt die Mittelwerte einer zweimal differenzierbaren Funktion $u \in C^2(\Omega)$ auf allen Bällen $B(x,r)$, die in Ω enthalten sind, oder auf Rändern dieser Bälle gleich den Werten von u an den entsprechenden Mittelpunkten, dann ist u auf Ω harmonisch.*

Beweis: Für $x \in \Omega$ sei $\Phi(r)$ definiert als der Mittelwert von u auf $\partial B(x,r) \subseteq \Omega$:

$$\Phi(r) := \frac{1}{r^{n-1}n\omega_n} \int_{\partial B(x,r)} u(y)\,\mathrm{d}\sigma(y) = \frac{1}{n\omega_n} \int_{\partial B(0,1)} u(x+rz)\,\mathrm{d}\sigma(z).$$

Hier bezeichnet ω_n das Volumen des Einheitsballs im euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$. Mit Hilfe des Gaußschen Satzes erhalten wir für die Ableitung $\Phi'(r) =$

$$\frac{1}{n\omega_n} \int_{\partial B(0,1)} \nabla u(x+rz) \cdot z\,\mathrm{d}\sigma(z) = \frac{1}{r^{n-1}n\omega_n} \int_{\partial B(x,r)} \nabla u(y) \cdot N\,\mathrm{d}\sigma(y) = \frac{1}{r^{n-1}n\omega_n} \int_{B(x,r)} \triangle u\,\mathrm{d}\mu.$$

Für harmonische u ist also Φ konstant solange $B(x,r)$ in Ω liegt. Wegen der Stetigkeit von u konvergiert $\Phi(r)$ im Grenzwert $\lim r \to 0$ gegen $u(x)$. Also sind diese Mittelwerte von u gleich den Werten $u(x)$ von u an den entsprechenden Mittelpunkten. Wegen

$$\frac{1}{r^n\omega_n}\int_{B(x,r)} u(y)\,\mathrm{d}^{\mathrm{n}}y = \frac{n}{r^n}\int_0^r \frac{1}{s^{n-1}n\omega_n}\int_{\partial B(x,s)} s^{n-1}u(y)\,\mathrm{d}\sigma(y)\,\mathrm{d}s = \frac{n}{r^n}\int_0^r s^{n-1}\Phi(s)\,\mathrm{d}s.$$

folgt daraus, dass auch der Mittelwert von u auf $B(x,r)\subseteq\Omega$ gleich $u(x)$ ist.

Wenn umgekehrt die Mittelwerte von u auf allen Bällen $B(x,r)$ in Ω gleich den Werten von u an den entsprechenden Mittelpunkten sind, dann gilt

$$u(x) = \frac{n}{r^n}\int_0^r s^{n-1}\Phi(s)\,\mathrm{d}s.$$

Deshalb verschwindet die Ableitung der rechten Seite nach r:

$$-\frac{n^2}{r^{n+1}}\int_0^r s^{n-1}\Phi(s)\,\mathrm{d}s + \frac{n}{r^n}r^{n-1}\Phi(r) = -\frac{n}{r}u(x) + \frac{n}{r}\Phi(r) = 0.$$

Dann sind auch die Mittelwerte $\Phi(r)$ von u auf den Rändern der Bälle $B(x,r)$ gleich $u(x)$. Weil u zweimal stetig differenzierbar ist, ist nach unser obigen Formel Φ differenzierbar, und die Ableitung $\Phi'(r)$ verschwindet genau dann, wenn die Integrale von $\triangle u$ über alle Bälle in Ω verschwinden, bzw. u harmonisch ist. **q.e.d.**

Korollar 2.2. *Sei u eine glatte*[1] *harmonische Funktion auf einer offenen Teilmenge $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, die den abgeschlossenen Ball $\overline{B(x,r)}$ enthält. Dann gilt*

$$|\partial^\alpha u(x)| \le C(n,|\alpha|)r^{-|\alpha|}\|u\|_{L^\infty(\overline{B(x,r)})} \quad \textit{with} \quad C(n,|\alpha|) = 2^{\frac{|\alpha|(1+|\alpha|)}{2}}n^{|\alpha|}.$$

Beweis: Mit u sind auch die partiellen Ableitungen $\partial_i u$ harmonische Funktionen und haben die Mittelwerteigenschaft. Aus dem Gaußschen Satz folgt für $i=1,\dots,n$

$$|\partial_i\partial^\alpha u(x)| = \left|\frac{2^n}{\omega_n r^n}\int_{B(x,r/2)}\partial_i\partial^\alpha u d\mu\right| = \left|\frac{2^n}{\omega_n r^n}\int_{\partial B(x,r/2)}\partial^\alpha u N_i d\sigma\right| \le \frac{2n}{r}\|\partial^\alpha u\|_{L^\infty(\partial B(x,r/2))}.$$

Induktiv erhalten wir zuerst $C(n,1)=2n$, und dann mit der Induktionsvoraussetzung

$$\|\partial^\alpha u(y)\| \le 2^{|\alpha|}C(n,|\alpha|)r^{-|\alpha|}\|u\|_{L^\infty(B(x,r))} \quad \text{for all} \quad y\in\partial B(x,r/2)$$

die Gleichung $C(n,1+|\alpha|) = 2^{1+|\alpha|}nC(n,|\alpha|)$ mit obiger Lösung. **q.e.d.**

Aufgrund dieser Mittelwerteigenschaft gilt für $\psi\in C_0^\infty((0,r))$:

$$\int_{B(x,r)} u(y)\frac{\psi(|y-x|)}{n|y-x|^{n-1}\omega_n}\,\mathrm{d}^{\mathrm{n}}y = \int_0^r \frac{\psi(s)}{ns^{n-1}\omega_n}\int_{\partial B(x,s)} u(y)\,\mathrm{d}\sigma(y)\,\mathrm{d}s = \left(\int_0^r \psi(s)\,\mathrm{d}s\right)u(x).$$

Diese Charakterisierung können wir auf Distributionen übertragen:

[1] Mit dem Weylschen Lemma 2.1 gilt dies auch für $u\in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

Schwache Mittelwerteigenschaft 2.3. *Sei U eine harmonische Distribution auf einem offenen Gebiet Ω, das den Ball $B(x,r)$ enthält. Für $\psi \in C_0^\infty((0,r))$ mit $\int \psi \,\mathrm{d}\mu = 0$ verschwindet U auf folgender Testfunktion mit kompaktem Träger in Ω:*

$$f(y) = \frac{\psi(|y-x|)}{n|y-x|^{n-1}\omega_n}.$$

Beweis: Es genügt zu zeigen, dass es eine Testfunktion mit kompaktem Träger in Ω gibt, die $\triangle g = f$ erfüllt. Aufgrund der Voraussetzungen an ψ gibt es eine Testfunktion Ψ mit kompaktem Träger in $[0,r]$, deren Ableitung gerade gleich ψ ist. Wir definieren

$$g(y) = \int_r^{|y-x|} \frac{\Psi(s)}{ns^{n-1}\omega_n}\,\mathrm{d}s.$$

Das ist eine Testfunktion mit kompaktem Träger in $B(x,r) \subseteq \Omega$, die nur von $|y-x|$ abhängt. Für eine Funktion $u(x) := v(|x|) = v(\sqrt{x \cdot x})$ ergibt die Kettenregel für $x \neq 0$:

$$\nabla_x u(x) = v(|x|)\nabla_x|x| = v'(|x|)\frac{2x}{2|x|} \qquad \triangle_x u(x) = v''(|x|) + \frac{n-1}{|x|}v'(|x|) \tag{2.1}$$

Daraus ergibt sich

$$\triangle_y g(y) = \frac{\psi(|y-x|)}{n|y-x|^{n-1}\omega_n} - \frac{(n-1)\Psi(|y-x|)}{n|y-x|^n\omega_n} + \frac{n-1}{|y-x|}\frac{\Psi(|y-x|)}{n|y-x|^{n-1}\omega_n} = f(y).\mathbf{q.e.d.}$$

Weylsches Lemma 2.4. *Auf einem offenen Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ entspricht jede harmonische Distribution $U \in \mathcal{D}'(\Omega)$ mit $\triangle U = 0$ einer harmonischen Funktion $u \in C^\infty(\Omega)$.*

Beweis: Zunächst definieren wir u. Für jedes $x \in \Omega$ sei $B(x,r)$ ein Ball in Ω und ψ eine Testfunktion mit kompaktem Träger in $(0,r)$, die $\int_0^r \psi(s)\,\mathrm{d}s = 1$ erfüllt. Dann sei

$$u(x) := U(g_x) \quad \text{mit} \qquad g_x(y) := \frac{\psi(|y-x|)}{n|y-x|^{n-1}\omega_n}.$$

Wenn U harmonsich ist, hängt $u(x)$ aufgrund der Schwachen Mittelwerteigenschaft nicht von der Wahl von r und ψ ab. Also können wir r und ψ so wählen, dass wir sie für alle y in einer kleinen Umgebung von x in der Definition von $u(y)$ verwenden können. Wegen $\mathsf{P}g = g$ ist u die Faltung einer solchen Testfunktion g zu $x = 0$ mit der Distribution U. Wegen Lemma 1.11 ist u undendlich oft differenzierbar. Wir zeigen jetzt, dass die entsprechende Distribution $\tilde{U}$ die Schwache Mittelwerteigenschaft hat. Die Funktionen f in der Schwachen Mittelwerteigenschaft sind durch drei Eigenschaften charakterisert: Sie hängen nur vom Abstand zu einem Punkt $x \in \Omega$ ab, sie verschwinden auf einer Umgebung von diesem Punkt x und ihr Integral verschwindet. Ersteres ist äquivalent dazu, dass sie invariant unter allen Drehungen um x sind. Aus der Invarianz des Lebesguemaßes unter den Drehungen folgt, dass die Faltung $g{*}f$ einer Testfunktion g, die invariant ist unter Drehungen um y, mit einer Testfunktion f, die invariant ist unter Drehungen um z, invariant ist unter Drehungen um $y+z$, d.h. für $\mathsf{O} \in SO(n,\mathbb{R})$

$$(g{*}f)(\mathsf{O}x{+}y{+}z) = \int_{\mathbb{R}^n} g(\mathsf{O}x{+}y{+}z{-}x')f(x')\,\mathrm{d}^\mathrm{n}x' = \int_{\mathbb{R}^n} g(\mathsf{O}(x{-}z'){+}y)f(\mathsf{O}z'{+}z)\,\mathrm{d}^\mathrm{n}z'.$$

Wenn wegen der zweiten Eigenschaft eine solche Testfunktion f auf $B(x,\epsilon)$ verschwindet, und wir den Träger von ψ in $(0,\epsilon/2)$ wählen, dann verschwindet $g{*}f$ auf $B(0,\epsilon/2)$. Das Integral der Faltung $g*f$ ist gleich dem Produkt der Integrale von g und f:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} (g*f)(x)\,\mathrm{d}^\mathrm{n}x = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} g(x-y)f(y)\,\mathrm{d}^\mathrm{n}y\,\mathrm{d}^\mathrm{n}x &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} g(x-y)f(y)\,\mathrm{d}^\mathrm{n}x\,\mathrm{d}^\mathrm{n}y \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\,\mathrm{d}^\mathrm{n}x\right)\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\,\mathrm{d}^\mathrm{n}y\right).\end{aligned}$$

Wegen $\tilde{U}(f) = g*U(f) = U(\mathsf{P}(g)*f) = U(g*f)$ hat dann auch $\tilde{U}$ die schwache Mittelwerteigenschaft. Sei $(\lambda_\epsilon)_{\epsilon>0}$ ein Mollifier auf $\mathbb{R}$. Für $\overline{B(x,r)} \subset \Omega$ gibt es ein $R>0$ mit $B(x,R)\subset\Omega$. Für $0<r_1<r_2<R$ und hinreichend kleine ϵ hat $\psi(t) = \lambda_\epsilon(t-r_1) - \lambda_\epsilon(t-r_2)$ Träger in $(0,R)$ und Integral Null. Seien f_ϵ die entsprechenden Funktionen in der schwachen Mittelwerteigenschaft. Weil u stetig ist, konvergiert $\tilde{U}(f_\epsilon)$ im Grenzwert $\epsilon\downarrow 0$ gegen die Differenz der Mittelwerte von u auf $\partial B(x,r_1)$ und $\partial B(x,r_2)$. Also hat u die Mittelwerteigenschaft und ist harmonisch. Seien $g_{0,\epsilon}$ die entsprechenden Funktionen zu $x=0$ und $\psi(t) = \lambda_{\epsilon/3}(t-\epsilon/2)$. Sie bilden einen Mollifier und aus Lemma 1.12 folgt

$$U(\phi) = U(\lim_{\epsilon\downarrow 0}\mathsf{P}g_{0,\epsilon}*\phi) = \tilde{U}(\phi) \quad \text{für alle } \phi\in C_0^\infty(\Omega). \qquad \textbf{q.e.d.}$$

Insbesondere haben wir gezeigt, dass eine Distribution genau dann harmonisch ist, wenn sie die Schwache Mittelwerteigenschaft hat, oder wenn sie einer harmonischen Funktion entspricht. Die schwachen Lösungen der Laplacegleichung stimmen also mit den klassischen Lösungen überein, so dass es genügt klassische Lösungen zu betrachten.

2.2 Maximumprinzip harmonischer Funktionen

Wenn eine harmonische Funktion u auf einem offen zusammenhängendem Gebiet Ω ihr Supremum (oder Infimum) in einem Punkt $x\in\Omega$ annimmt, dann gibt es sicherlich einen Ball $B(x,r)\subseteq\Omega$. Dann folgt aber aus der Mittelwerteigenschaft

$$\frac{1}{r^n\omega_n}\int_{B(x,r)} |u(y)-u(x)|\,\mathrm{d}^\mathrm{n}y = 0.$$

Also muss u auf $B(x,r)$ konstant sein. Insbesondere ist die Teilmenge von Ω, auf der u gleich $u(x)$ ist offen und abgeschlossen. Weil aber Ω zusammenhängend ist, muss dann diese Teilmenge ganz Ω sein. Damit folgt aus der Mittelwerteigenschaft ein

Starkes Maximumprinzip 2.5. *Eine auf einer offenen und zusammenhängenden Menge harmonische Funktion, die dort einen Extremwert annimmt, ist konstant.* **q.e.d.**

Schwaches Maximumprinzip 2.6. *Sei $u \in C(\bar{\Omega})$ eine auf dem Abschluss eines beschränkten offenen Gebietes $\Omega \Subset$[2] $\mathbb{R}^n$ stetige Funktion, die auf Ω harmonisch ist. Dann nimmt u sein Maximum (und Minimum) auf dem Rand $\partial\Omega$ von Ω an.*

Beweis: Die stetige Funktion u nimmt auf $\bar{\Omega}$ ein Maximum und Minimum an. Wenn sie nicht auf $\partial\Omega$ liegen, dann ist u wegen des Starken Maximumprinzips konstant. **q.e.d.**

Wegen dem Maximumprinzip hat folgendes Randwertproblem eindeutige Lösungen:

Dirichletproblem 2.7. *Auf einer offenen beschränkten Menge $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ ist für gegebene Funktionen f auf Ω und g auf $\partial\Omega$ eine Lösung der Poissongleichung $-\triangle u = f$ gesucht, die sich stetig auf den Rand fortsetzt und dort die Werte $u|_{\partial\Omega} = g$ annimmt.*

Die Differenz zweier Lösungen ist harmonisch und verschwindet auf dem Rand. Wegen dem schwachen Maximumprinzip hat das Dirichletproblemhöchstens eine Lösung.

2.3 Poissonsche Darstellungsformel

Im Mittelwertsatz ist der Wert einer harmonischen Funktion bei x durch die Werte auf $\partial B(x,r)$ festgelegt. Mit einer expliziten Formel werden wir jetzt eine harmonische Funktion in $B(x,r)$ durch ihre Werte auf $\partial B(x,r)$ berechnen. Zunächst definieren wir

Greensche Funktion vom Einheitsball 2.8.

$$G_{B(0,1)}(x,y) := \begin{cases} -\frac{1}{2\pi}\left(\ln|x-y| - \ln\frac{|x-|x|^2y|}{|x|}\right) & \text{für } n=2 \\ \frac{1}{n(n-2)\omega_n}\left(\frac{1}{|x-y|^{n-2}} - \frac{|x|^{n-2}}{|x-|x|^2y|^{n-2}}\right) & \text{für } n>2. \end{cases}$$

Diese Funktion hat folgende Eigenschaften **(i)** $G_{B(0,1)}(x,y) = G_{B(0,1)}(y,x)$.

(ii) $G_{B(0,1)}(x,y) = 0$ für $x \in \partial B(0,1)$ oder $y \in \partial B(0,1)$.

(iii) $\triangle_x G_{B(0,1)}(x,y) = 0$ für $x \neq y$ und $y \neq \frac{x}{|x|^2}(=\tilde{x}) \Longleftrightarrow x \neq \frac{y}{|y|^2}(=\tilde{y})$.

---

[2] Wir bezeichnen mit $A \Subset B$ Teilmengen A von B mit kompaktem Abschluss $\bar{A}$ in B.

Die erste Eigenschaft folgt aus $(\frac{|x-|x|^2y|}{|x|})^2 = 1 - 2(x\cdot y) + |x|^2|y|^2 = (\frac{|y-|y|^2x|}{|y|})^2$. Die zweite folgt dann aus $x - |x|^2y = x - y$ für $|x| = 1$. Wegen (2.1) ist der erste Summand von $G_{B(0,1)}(x,y)$ für $x \neq y$ harmonisch. Genauso folgt für festes y und eine Funktion $u(x) = v(r)$ mit $r = \sqrt{1 + |x|^2|y|^2 - 2x\cdot y}$ wegen $(x|y|^2 - y)^2 = |y|^2r^2$ für $r \neq 0$

$$\nabla u(x) = \tfrac{x|y|^2-y}{r}v'(r) \qquad\qquad \triangle u(x) = |y|^2\left(v''(r) + \tfrac{n-1}{r}v'(r)\right).$$

Deshalb ist auch der zweite Summand harmonisch. Wir definieren (gilt auch für $n = 2$):

$$\begin{aligned} K(x,y) &:= -\tfrac{y}{|y|}\cdot\nabla_y G_{B(0,1)}(x,y) = -\tfrac{y}{|y|}\cdot\nabla_y G_{B(0,1)}(y,x) \\ &= -\tfrac{1}{n(n-2)\omega_n}\tfrac{y}{|y|}\cdot\nabla_y\left(\tfrac{1}{|y-x|^{n-2}} - \tfrac{|x|^{n-2}}{||x|^2y-x|^{n-2}}\right) = \tfrac{1}{n\omega_n}\tfrac{y}{|y|}\cdot\left(\tfrac{y-x}{|y-x|^n} - \tfrac{|x|^{n-2}|x|^2(|x|^2y-x)}{||x|^2y-x|^n}\right) \\ &= \tfrac{1}{n\omega_n}\tfrac{y}{|y|}\cdot\left(\tfrac{y-x}{|y-x|^n} - \tfrac{|y|^n(|x|^2y-x)}{||y|^2x-y|^n}\right) = (\text{für } |y|=1) = \tfrac{1-x\cdot y-|x|^2+x\cdot y}{n\omega_n|x-y|^n} = \tfrac{1-|x|^2}{n\omega_n|x-y|^n}. \end{aligned}$$

Poissonsche Darstellungsformel 2.9. *Für $g \in C(\partial B(0,1))$ ist die eindeutige harmonische Funktion $u \in C^2(B(0,1)) \cap C(\overline{B(0,1)})$ mit $u|_{\partial B(0,1)} = g$ gegeben durch*

$$u(x) = \int_{\partial B(0,1)} K(x,y)g(y)\,\mathrm{d}\sigma(y).$$

Beweis: Wegen der Eigenschaft (iii) ist $x \mapsto K(x,y)$ harmonisch für $x \neq y$ und $x \neq \tilde{y}$ und damit auch u auf $B(0,1)$. Wegen dem Maximumprimzip genügt es zu zeigen, dass sich u stetig auf $\partial B(0,1)$ fortsetzt mit $u|_{\partial B(0,1)} = g$. Aus dem Gaußschen Satz folgt

$$\int_{\partial B(0,1)} K(x,y)\,\mathrm{d}\sigma(y) + \int_{\partial B(x,\epsilon)} \nabla_y G_{B(0,1)}(x,y)\cdot N\,\mathrm{d}\sigma(y) = -\int_{B(0,1)\setminus B(x,\epsilon)} \triangle_y G_{B(0,1)}\,\mathrm{d}^{\mathrm{n}}y = 0$$

für $x \in B(0,1)$ und hinreichend kleine $\epsilon > 0$. Hier bezeichnet N die äußere Normale von $B(x,\epsilon)$. Weil der zweite Summand von $G_{B(0,1)}$ auch bei x harmonisch ist gilt sogar

$$\int_{\partial B(0,1)} K(x,y)\,\mathrm{d}\sigma(y) = \begin{cases} \int_{\partial B(x,\epsilon)} \nabla_y \frac{1}{2\pi}\ln|x-y|\cdot N\,\mathrm{d}\sigma(y) & \text{für } n = 2 \\ -\int_{\partial B(x,\epsilon)} \nabla_y \frac{1}{n(n-2)\omega_n|x-y|^{n-2}}\cdot N\,\mathrm{d}\sigma(y) & \text{für } n > 2. \end{cases}.$$

Dieses Integral ist wegen (2.1) gleich 1. Die Familie von glatten Funktionen $y \mapsto K(x,y)$

(i) ist auf $y \in \partial B(0,1)$ positiv, **(ii)** hat dort Integral 1,

(iii) und konvergiert für alle $y_0 \in \partial B(0,1)$ im Grenzwert $x \to y_0$ auf kompakten Mengen von $\partial B(0,1) \setminus \{y_0\}$ gleichmäßig gegen Null.

Wegen (i)-(iii) setzt sich u stetig auf $\partial B(0,1)$ fort und ist dort gleich g. **q.e.d.**

Weil die Verkettung von harmonischen Funktionen mit $y \mapsto z + ry$ harmonisch ist, gilt für jede harmonische Funktion u auf $B(z,r)$, die sich stetig auf $\partial B(z,r)$ fortsetzt,

$$u(x) = \frac{1 - \frac{|x-z|^2}{r^2}}{n\omega_n} \int_{\partial B(0,1)} \frac{u(z+ry)}{|\frac{x-z}{r} - y|^n} \,\mathrm{d}\sigma(y) = \frac{r^2 - |x-z|^2}{nr\omega_n} \int_{\partial B(z,r)} \frac{u(y')}{|x-y'|^n} \,\mathrm{d}\sigma(y'). \quad (2.2)$$

Die zweite Gleichung folgt mit $y = \frac{y'-z}{r}$ aus $|\frac{x-z}{r} - y|^{-n} \,\mathrm{d}\sigma(y) = |\frac{x-y'}{r}|^{-n} \frac{\mathrm{d}\sigma(y')}{r^{n-1}}$. Also sind insbesondere alle Werte von u in $B(z,r)$ allein durch die Werte von u auf $\partial B(z,r)$ bestimmt. Durch Ableiten nach x erhalten wir ähnliche Formeln für die Werte der Ableitungen von u. Diese Formel impliziert auch die Mittelwerteigenschaft. Weil $x \mapsto K(\frac{x-z}{r}, y)$ für $y \in \partial B(0,1)$ in x analytisch ist, und auf kompakten Teilmengen von $B(z,r)$ die Taylorreihe in $x = z$ gleichmäßig konvergiert, zeigt sie sogar folgendes:

Korollar 2.10. *Jede harmonische Funktion ist analytisch.* **q.e.d.**

2.4 Klassische Maximumprinzipien

In diesem Abschnitt verallgemeinern wir das Maximumprinzip von harmonischen Funktionen auf Lösungen von elliptischen Differentialoperatoren.

Definition 2.11. *Ein elliptischer Differentialoperator in Nicht-Divergenzform auf einer offenen Menge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ hat folgende Gestalt $L : C^2(\Omega) \to C(\Omega), u \mapsto Lu$ mit*

$$(Lu)(x) := \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(x)\partial_j\partial_i u(x) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\partial_i u(x) + c(x)u(x). \quad (2.3)$$

Hier sind a_{ij}, b_i und c reelle Funktionen auf Ω, die für ein $1 \leq \Lambda < \infty$ folgendes erfüllen

$$\sup_{x\in\Omega} |a_{ij}(x)| \leq \Lambda, \qquad \sup_{x\in\Omega} |b_i(x)| \leq \Lambda, \quad \sup_{x\in\Omega} |c(x)| \leq \Lambda, \quad (2.4)$$

$$\sum_{ij}^{n} a_{i,j}(x)\lambda_i\lambda_j \geq \Lambda^{-1}|\lambda|^2 = \Lambda^{-1}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \qquad \textit{für alle } x \in \Omega \qquad \textit{und } \lambda \in \mathbb{R}^n. \quad (2.5)$$

Definition 2.12. *Für $f : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt ein $u \in C^2(\Omega)$ mit $Lu \geq f$ bzw. $Lu \leq f$ Ober- bzw. Unterlösung von $Lu = f$ auf Ω. Eine Ober- und Unterlösung heißt Lösung.*

Wir zeigen zuerst das schwache Maximumprinzip.

Schwaches Maximumprinzip 2.13. *Sei L ein elliptischer Differentialoperator L auf einer offenen beschränkten Teilmenge $\Omega \Subset \mathbb{R}$ mit $c = 0$. Dann gilt*

$$\sup_{x\in\Omega} u(x) = \sup_{x\in\partial\Omega} u(x) \qquad \textit{für} \qquad u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) \qquad \textit{mit} \qquad Lu \geq 0.$$

Beweis: Falls $\sup_{x\in\Omega} u(x) > \sup_{x\in\partial\Omega} u(x)$ nimmt u sein Maximum bei $x_0 \in \Omega$ an mit $\nabla u(x_0) = 0$ und $D^2u(x_0) \le 0$, also $\sum_{i,j=1}^n \lambda_i\lambda_j\partial_i\partial_j u(x_0) \le 0$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}^n$. Weil die Hessische eine symmetrische Matrize ist, lässt sie sich mit einer orthogonalen Matrix diagonalisieren. Kein Eigenwert ist positiv. Dann gibt es eine Matrix $(d_{ij})_{i,j=1\dots,n}$ mit

$$\partial_i\partial_j u(x_0) = -\sum\nolimits_{k=1}^n d_{ik}d_{jk}, \quad (Lu)(x_0) = -\sum\nolimits_{i,j,k=1}^n a_{ij}(x_0)d_{ik}d_{jk} \le -\Lambda^{-1}\sum\nolimits_{i,k=1}^n d_{ik}^2 \le 0.$$

Sei $v(x) := e^{\alpha x_1}$. Dann folgt für hinreichend großes α

$$(Lv)(x) = \alpha^2 a_{11}(x) + \alpha b_1(x) > 0 \qquad L(u+\epsilon v) > 0 \qquad \text{für alle } \epsilon > 0.$$

Deshalb nehmen für alle $\epsilon > 0$ die Funktionen $u + \epsilon v$ ihr Maximum auf $\partial\Omega$ an.

$$\sup_{x\in\Omega} u(x) + \epsilon \inf_{x\in\Omega} v(x) \le \sup_{x\in\Omega} u(x) + \epsilon v(x) = \sup_{x\in\partial\Omega} u(x) + \epsilon v(x) \le \sup_{x\in\partial\Omega} u(x) + \epsilon \sup_{x\in\partial\Omega} v(x).$$

Weil v auf $\overline{\Omega}$ beschränkt ist, und das für alle $\epsilon > 0$ gilt, folgt die Aussage. **q.e.d.**

Korollar 2.14. *Sei L ein elliptischer Differentialoperator auf einer offenen beschränkten Teilmenge $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ mit $c \le 0$. Für $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ folgt aus $Lu \ge 0$ bzw. $Lu = 0$*

$\sup_{x\in\Omega} u(x) \le \sup_{x\in\partial\Omega} u_+(x)$ *mit* $u_+ := \frac{1}{2}(u + |u|)$ *bzw.* $\sup_{x\in\Omega} |u(x)| = \sup_{x\in\partial\Omega} |u(x)|$

Beweis: Für $\sup_{x\in\Omega} u(x) \le 0$ ist die erste Aussage richtig. Andernfalls folgt wegen $Lu - cu \ge -cu \ge 0$ auf $\Omega' := \{x \in \Omega \mid u(x) > 0\}$ aus dem Schwachen Maximumprinzip 2.13

$$\sup\nolimits_{x\in\Omega} u(x) = \sup\nolimits_{x\in\Omega'} u(x) = \sup\nolimits_{x\in\partial\Omega'} u(x) \le \sup\nolimits_{x\in\partial\Omega} u_+(x),$$

wegen $u(x) = 0$ bei $x \in \partial\Omega' \setminus \partial\Omega$. Falls $Lu = 0$, dann folgt auch für $-u$

$$\inf_{x\in\Omega} u(x) = -\sup_{x\in\Omega} -u(x) \ge -\sup_{x\in\partial\Omega} (-u(x))_+ \quad \text{und} \quad \sup_{x\in\Omega} |u(x)| = \sup_{x\in\partial\Omega} |u(x)|. \quad \textbf{q.e.d.}$$

Korollar 2.15. *Sei L ein elliptischer Differentialoperator auf einem offenen beschränkten Gebiet $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ mit $c \le 0$. Dann hat für gegebene Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{R}$ und $g \in C(\partial\Omega)$ folgendes Dirichletproblem höchstens eine Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$:*

$$Lu = f \text{ auf } \Omega \quad \text{mit} \quad u\,|_{\partial\Omega} = g. \qquad \textbf{q.e.d.}$$

Für das starke Maximumprinzip zeigen wir zuerst folgendes Randpunktlemma.

Randpunktlemma 2.16. *Sei L ein elliptischer Differentialoperator auf einer beschränkten offenen Menge $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ und $u \in C^2(\Omega)$ erfülle $Lu \ge 0$ auf Ω. Außerdem sei u stetig in $x_0 \in \partial\Omega$ mit $u(x_0) > u(x)$ für alle $x \in \Omega$, und Ω enthalte einen offenen Ball $B \subseteq \Omega$ mit $x_0 \in \partial B$. Schließlich gelte eine der folgenden Bedingungen:*
(i) $c = 0$. **(ii)** $c \le 0$ *und* $u(x_0) \ge 0$. **(iii)** $u(x_0) = 0$.
Existiert die Ableitung von u in x_0 in Richtung der äußere Normalen, so ist sie positiv.

Beweis: Aus $u(x_0) > u(x)$ für $x \in \Omega$ folgt in den drei Fällen für $\tilde{L} = L - c_+$ auf Ω

$$\tilde{L}(u - u(x_0)) = Lu - cu(x_0) - c_+(u - u(x_0)) \geq 0.$$

Also können wir o.B.d.A. $c \leq 0, u < 0$ und $u(x_0) = 0$ annehmen. Weiterhin sei o.B.d.A. $B(0,R) \subseteq \Omega$ mit $x_0 \in \partial B(0,R) \cap \partial\Omega$. Für $v(x) := e^{-\alpha|x|^2} - e^{-\alpha R^2}$ gilt $e^{\alpha|x|^2} Lv =$

$$= 4\alpha^2 \sum\nolimits_{i,j=1}^n a_{ij}x_ix_j - 2\alpha \sum\nolimits_{i=1}^n (a_{ii} + b_ix_i) + e^{\alpha|x|^2} cv \geq 4\alpha^2\Lambda^{-1}|x|^2 - 2|\alpha|(\Lambda + \Lambda|x|) - \Lambda,$$

wegen $c \leq 0$ und $e^{\alpha|x|^2} v \leq 1$. Für $0 < \varrho < R$ und hinreichend großes α folgt

$$L(u + \epsilon v) \geq \epsilon Lv \geq 0 \qquad \text{auf} \qquad \Omega' = B(0,R) \setminus \overline{B(0,\varrho)}.$$

Auf $\partial B(0,\varrho)$ gilt $u < 0$ und auf $\partial B(0,R)$ gilt $v = 0$. Für hinreichend kleines $\epsilon > 0$ gilt dann $u + \epsilon v \leq 0$ auf $\partial\Omega'$, und wegen Korollar 2.14 auch auf Ω'. Wegen $x_0 \in \partial\Omega'$ und $u(x_0) = 0 = v(x_0)$ folgt für die äußere Normalenableitung von $B(0,R)$ in x_0

$$N\cdot\nabla u(x_0) \geq -\epsilon N\cdot\nabla v(x_0) = 2\epsilon\alpha R e^{-\alpha R^2} > 0.$$ **q.e.d.**

Wenn $N \cdot \nabla u(x_0)$ nicht existiert, gilt für alle $\delta > 0$ und die Normale N von B in x_0

$$\lim_{x\to x_0}\inf \tfrac{u(x)-u(x_0)}{|x-x_0|} < 0 \qquad \text{auf} \qquad \{x \in \Omega \mid |(x - x_0)\cdot N| \geq \delta|x - x_0|\}$$

Nun können wir folgendes Maximumprinzip von Hopf beweisen.

Hopfs Maximumprinzip 2.17. *Sei L ein elliptischer Differentialoperator auf einer offenen und zusammenhängenden Menge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ und $u \in C^2(\Omega)$ erfülle $Lu \geq 0$ auf Ω. Falls u sein Maximum im Inneren von Ω annimmt und entweder*
(i) $c = 0$ *oder* **(ii)** $c \leq 0$ *und* $\sup_{x\in\Omega} u(x) \geq 0$ *gilt, dann ist u konstant.*

Beweis: Für das Maximum $\sup_{x\in\Omega} u(x) = u(x_0)$ gilt in beiden Fällen (i) und (ii)

$$L(u - u(x_0)) = Lu - cu(x_0) \geq 0.$$

Deshalb können wir o.B.d.A. $c \leq 0, u \leq 0$ und $u(x_0) = 0$ annehmen. Falls u nicht konstant ist, also nicht identisch verschwindet, so ist $\emptyset \neq \Omega' = \{x \in \Omega \mid u(x) < 0\} \neq \Omega$. Da Ω zusammenhängend ist, ist Ω' nicht abgeschlossen in Ω, also $\partial\Omega' \cap \Omega \neq \emptyset$. Sei $x \in \Omega'$ so nahe bei $\partial\Omega' \cap \Omega$, dass $\varrho := d(x, \partial\Omega' \cap \Omega) < d(x, \partial\Omega)$, also $B(x,\varrho) \subseteq \Omega'$ und $\overline{B(x,\varrho)} \subseteq \Omega$ gilt. Sei $y \in \partial B(x,\varrho) \cap \partial\Omega' \cap \Omega$ mit $u(y) = 0$. Aus dem Randpunktemma 2.16 folgt $\nabla u(y) \neq 0$ im Widerspruch dazu, dass u sein Maximum in y annimmt. **q.e.d.**
Als zweite Anwendung erhalten wir die Eindeutigkeit des Neumannproblems.

Satz 2.18. *Sei L ein elliptischer Operator auf einer zusammenhängenden offenen und beschränkten Menge $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ mit $c \leq 0$ und jeder Randpunkt $x \in \partial\Omega$ sei auch Randpunkt eines Balles $B \subseteq \Omega$. Weiter seien $f : \Omega \to \mathbb{R}$ und $\varrho : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ reelle Funktionen. Dann hat folgendes Neumannproblem bis auf eine Konstante höchstens eine Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, deren äußere Normalenableitung $N \cdot \nabla u$ auf ganz $\partial\Omega$ existiert:*

$$Lu = f \text{ auf } \Omega \qquad \text{und} \qquad N \cdot \nabla u = \varrho \text{ auf } \partial\Omega$$

Beweis: Die Differenz $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ zweier Lösungen erfüllt $Lu = 0$ auf Ω und $N \cdot \nabla u = 0$ auf $\partial\Omega$. Wenn sie nicht konstant ist, gilt $\sup_{x\in\Omega} \pm u(x) > 0$. O.B.d.A. sei $M := \sup_{x\in\Omega} u(x) > 0$. Gilt $u(x_0) = M$ für ein $x_0 \in \Omega$ so folgt aus Hopfs Maximumprinzip Satz 2.17, dass u konstant ist. Also gilt $u(x_0) = M$ für eine $x_0 \in \partial\Omega$. Dann folgt aus dem Randpunktlemma 2.16 $N \cdot \nabla u(x_0) > 0$ im Widerspruch zur Annahme. **q.e.d.**

Schließlich schätzen wir Lösungen von inhomogenen Gleichungen punktweise ab.

Satz 2.19. *Sei L ein elliptischer Differentialoperator auf einer offenen beschränkten Menge $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$, $c \leq 0$ und $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ erfülle $Lu \geq f$ für $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Dann gilt*

$$\sup_{x\in\Omega} u(x) \leq \sup_{x\in\partial\Omega} u_+ + C(\Omega, \Lambda) \sup_{x\in\Omega} f_-(x)$$

wobei $C(\Omega, \Lambda) := e^{C(\Lambda)d} - 1$ mit $d = d(\Omega) := \inf_{e\in\partial B(0,1)} \sup_{x,y\in\Omega} (x \cdot e - y \cdot e) \leq \operatorname{diam} \Omega$.

Beweis: Wir können o.B.d.A. $\Omega \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 < x_1 < d\}$ annehmen. Auf Ω gilt dann

$$\begin{aligned}
(L - c)e^{\alpha x_1} = e^{\alpha x_1}(\alpha^2 a_{11} + \alpha b_1) \geq e^{\alpha x_1}\alpha(\alpha\Lambda^{-1} - \Lambda) \geq 1 &\quad \text{für} \quad \alpha \geq 1 + \Lambda^2 \\
L(u - v) = Lu - (L - c)v - cv \geq f + \sup_{y\in\Omega} f_-(y) \geq 0 &\quad \text{mit} \\
v(x) := \sup_{y\in\partial\Omega} u_+(y) + (e^{\alpha d} - e^{\alpha x_1}) \sup_{y\in\Omega} f_-(y) \geq 0 &\quad \text{und} \quad f_- := \tfrac{1}{2}(|f| - f).
\end{aligned}$$

Weil $u - v \leq u - \sup_{y\in\partial\Omega} u_+(y) \leq 0$ auf $\partial\Omega$ gilt, folgt $u - v \leq 0$ aus Korollar 2.14, also

$$\sup_{x\in\Omega} u(x) \leq \sup_{x\in\Omega} v(x) \leq \sup_{x\in\partial\Omega} u_+(x) + (e^{\alpha d} - 1) \sup_{x\in\Omega} f_-(x) \qquad \textbf{q.e.d.}$$

Korollar 2.20. *Sei L ein elliptischer Differentialoperator auf der offenen beschränkten Menge $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$, $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ eine Lösung $Lu = f$ zu $f : \Omega \to \mathbb{R}$ und $c_0 := 1 - C(\Omega, \Lambda) \sup_{x\in\Omega} c_+(x) > 0$ mit der Konstante $C(\Omega, \Lambda)$ aus Satz 2.19. Dann folgt*

$$\sup_{x\in\Omega} |u(x)| \leq c_0^{-1}(\sup_{x\in\partial\Omega} |u(x)| + C(\Omega, \Lambda) \sup_{x\in\Omega} |f(x)|).$$

Beweis: Für $L_0 := L - c_+$ gilt $L_0 u = Lu - c_+ u = f - c_+ u$. Aus der Anwendung von Satz 2.19 auf $\pm u$ und L_0 folgt folgende Ungleichung und daraus auch die Behauptung:

$$\sup_{x\in\Omega} |u(x)| \leq \sup_{x\in\partial\Omega} |u(x)| + C(\Omega, \Lambda) \sup_{x\in\Omega} |f(x)| + C(\Omega, \Lambda) \sup_{x\in\Omega} c_+(x) \sup_{x\in\Omega} |u(x)|. \qquad \textbf{q.e.d.}$$