Kapitel 1

Einführung

Eine partielle Differentialgleichung ist eine Gleichung in den partiellen Ableitungen einer oder mehrerer gesuchter Funktionen, die von mindestens zwei Variablen abhängen:

Definition 1.1. *Eine gegebenenfalls vektorwertige Gleichung der Form*

$$F\left(D^k u(x), D^{k-1}u(x), \ldots, Du(x), u(x), x\right) = 0$$

heißt partielle Differentialgleichung der Ordnung k. Hierbei ist F eine gegebene Funktion und u die gesuchte Funktion. Die Ausdrücke $D^k u$ bezeichnen die Vektoren aller k-ten partiellen Ableitungen der Funktion u. Eine Funktion u heißt Lösung der Differentialgleichung, wenn sie k mal differenzierbar ist und der obigen Gleichung genügt.

Wir bezeichen höhere partielle Ableitungen auf Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ im Folgenden oft durch $\partial^\gamma = \prod_i \partial_i^{\gamma_i} = \prod_i (\frac{\partial}{\partial x_i})^{\gamma_i}$ für Multiindizes $\gamma \in \mathbb{N}_0^n$ mit der Länge $|\gamma| = \sum_i \gamma_i$. Auf den Multiindizes benutzen wir die Ordungsrealtion $\delta \leq \gamma \Longleftrightarrow \delta_i \leq \gamma_i$ für $i = 1, \ldots, n$. Die partiellen Ableitungen wirken dabei immer nur auf die Funktion, die unmittelbar dahinter steht. Soll sie auf ein Produkt wirken, so setzen wir dieses in Klammern.

Übungsaufgabe 1.2. *Zeige für alle $\gamma \in \mathbb{N}_0^n$ die verallgemeinerte Leibnizregel*

$$\partial^\gamma(uv) = \sum_{0\leq\delta\leq\gamma} \binom{\gamma}{\delta} \partial^\delta u \partial^{\gamma-\delta} v := \sum_{\delta_1=0}^{\gamma_1} \binom{\gamma_1}{\delta_1} \cdots \sum_{\delta_n=0}^{\gamma_n} \binom{\gamma_n}{\delta_n} \partial^\delta u \partial^{\gamma-\delta} v. \tag{1.1}$$

Für partielle Differentialgleichungen erster Ordnung gibt es noch eine allgemeine Lösungsmethode, die sogeannnte Methode der Charaketristik. Sie wird in der Vorlesung Introduction into PDE vorgestelt. Für partielle Differentialgleichungen höherer Ordnung gibt es aber keine allgemeine Lösungstheorie. Im Abschnitt 1.2 werden wir sogar ein Beispiel einer partiellen Differentialgleichung mit glatten Koeffizienten kennenlernen, dass in der Umgebung eines Punktes keine Lösung besitzt. Im Laufe der Zeit wurden allerdings vor allem für partielle Differentialgleichungen, wie sie in der Physik auftauchen, gute Lösungsmethoden entwickelt. Diese Lösungsmethoden wurden dann versucht auf eine möglichst große Klasse von verwandten partiellen Differentialgleichungen zu verallgemeinern. Dabei hat sich allerdigs herausgestellt, dass die Lösungesmethoden für verschiedenen partielle Differentialgleichungen sich untereinander drastisch unterscheiden. Deshalb gibt es nicht eine Theorie der partiellen Differentialgleichungen, sondern verschiedene Inseln in dem großen Gebiet der partiellen Differentialgleichungen, von relativ gut verstandenen verwandten Familien. Schon Jacobi hat deshalb in den Vorlesungen über Dynamik in den Jahren 1842-43 folgende Devise formuliert:

"Die hauptsächliche Schwierigkeit bei der Integration einer gegebenen Differentialglleichung besteht in der Einführung angepaßter Variablen, wofür es keine Regel gibt. Deshalb müssen wir den umgekehrten Weg gehen, und nach dem Auffinden einer zweckmäßigen Substitution entsprechende Probleme für ihre Anwendung suchen".

Das Ziel ist also jede erfolgreiche Lösungsmethode auf eine möglichst große Klasse von Differentielgleichungen auszuweiten. Nachdem man die partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit der Methode der Charaktersitik lösen kann, hat man dann lineare partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung untersucht. Eine allgemeine partielle lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung hat die Gestalt

$$Lu(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\partial_i\partial_j u + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\partial_i u(x) + c(x)u(x) = 0.$$

Für zweimal differenzierbare Funktionen u ändert sich wegen dem Schwarzen Lemma dabei Lu nicht, wenn wir a_{ij}durch $\frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji})$ ersetzen. Deshalb kann man annehmen, dass die $n \times n$ Matrix (a_{ij}) symmetrisch und damit diagonalisierbar ist.

Elliptische partielle Differentialgleichungen. Wenn diese Matrix gleich der Einheitsmatrix ist, und b und c verschwinden, dann ist L der Laplaceoperator:

Laplacegleichung. $$\triangle u := \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0.$$

Lösungen der Laplacegleichung heißen harmonische Funktionen. Wir werden sehen, dass sich viele Eigenschaften der harmonischen Funktionen auf allgemeine Lösungen von $Lu = 0$ übetragen lassen, wenn die Matrix (a_{ij}) positiv (oder negativ) definit ist. Das sind die Grundbeispiele der sogenannten elliptischen partiellen Differentialgleichungen. Diese Vorlesung beschäftigt sich vorwiegend mit dieser wichtigen Klasse von den relativ gut verstandene partiellen Differentialgleichungen. Die beiden anderen Koeffizienten b und c haben auf das Verhalten der Lösungen dabei einen wesentlich geringeren Einfluss als die Koeffizienten der höchste vorkommenden Ableitungen. Das wird sich in sogenannten Apriori Abschätzungen ausdrücken, in denen wir die niedrigeren Ableitungen durch die höheren Ableitungen abschätzen werden.

Neben den linearen gibt es auch nichtlineare partielle Differentialgleichungen, die mit den Methoder der elliptischen Theorie glöst werden können. Ein wichtiges Beispiel, dessen Untersuchung die elliptische Theorie wesentlich vorangetrieben hat, ist die

Minimalflächengleichung. $\nabla \cdot \dfrac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} = 0, \quad u : \Omega \to \mathbb{R}, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n$offen.

Die Graphen von Lösungen der Minimalflächengleichung sind sogenannte Minimalflächen. Der Flächeninhalt solcher Hyperflächen im $\mathbb{R}^{n+1}$ ändert sich unter infinitesimalen Deformationen nicht. Seifenhäute sind Beispiele solcher Minimalflächen. Das Randwertproblem der Minimalflächenbgleichung wird Plateauproblem genannt. Jesse Douglas erhielt für den Beweis der Existenz solcher Lösungen in den 1930er Jahren die erste Fieldsmedaille. Die Koeffizienten der zweiten Ableitung hängen dabei selber von der Lösung ab. Wir werden sehen, dass das Verständnis der Lösungen entscheidend davon abhängt, dass diese Koeffizienten in den richtigen Funktionenräumen liegen. Zur Vorbereitung werden wir in dem Kapitel 3 der Vorlesung solche Funktionenräume einführen und untersuchen. Dafür müssen wir den Beriff der Ableitung verallgemeinern. Fast alle diese Verallgemeinerungen basieren dabei auf den sogenannten Distributionen, mit denen wir uns im Abschnitt 1.3 beschäftigen werden.

Parabolische partielle Differentialgleichungen. Am Rand der Klasse der ellitpischen partiellen Differentialgleichungen liegen diejenigen, für die die Matrix (a_{ij}) nur semidefinit ist, also als Bilinearform nichtnegativ oder nichtpositiv ist. Auf diesen Grenzfall lassen sich viele Methoden der elliptischen Theorie mit leichten Modifikationen übertragen, so dass diese degenerierten ellitpischen Differentialgleichungen den elliptischen verwandt sind. Besonders gut untersucht ist die Unterklasse der parabolischen Differentialgleichungen, für die die Matrix (a_{ij}) neben lauter positiven (oder negtaiven) Eigenwerten nur einen Eigenwert Null hat. Das einfachste Beispiel ist die

Wärmeleitungsgleichung. $\dot{u} - \triangle u = 0.$

Die parabolischen Differentiagleichungen beschreiben im allgemeinen Diffusionsprozesse, d.h. eine Dynamik, die Inhomogenitäten (wie z.B. Temparaturunterschiede) ausgleicht. Die den stochastischen Prozessen zugrundeliegenden partiellen Differentialgleichungen haben diese Eigenschaften. In dieser Vorlesungen werden wir die Modifikationen, die notwendig sind um die ellitpsiche Theorie auf die parabolischen Differentialgleichungen zu übertragen, nicht kennenlernen. Auch hier gibt es ein nichtlineares Beispiel aus der geometrischen Analysis, dessen Untersuchung die elliptische Theorie entscheidend vorangetrieben hat (die Tensorfleder g und R werden gleich definiert):

Riccifluss. $\dot{g}_{ij} = -2R_{ij}.$

Diese Differentialgleichung beschreibt auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten einen diffusionsartigen Fluss der Riemannschen Metrik g. Er gleicht Inhomogenitäten und Isotropien der Metrik aus und führt nach langen Zeiten zu Metriken mit sehr großen Isometriegruppen. Richard Hamilton hat in den 70ger Jahren ein Programm entworfen,

um mit Hilfe dieses Flusses die Geometrisierungsvermutung von Thurston zu beweisen. Diese besagt, dass sich jede kompakte 3-Mannigfaltigkeit in Teile zerlegen lässt, auf denen eine Isometriegruppe transitiv wirkt und impliziert die Poincarevermutung. Hamilton versucht durch eine Kontrolle über das Langzeitverhalten des Ricciflusses auf kompakten 3-Mannigfaltigkeiten solche Metriken zu konstruieren. Der russische Mathematiker Grisha Perelman hat 2003 3 Arbeiten ins Netz gestellt und die letzten Hürden überwunden. Das war ein großer Erfolg der geometrischen Analysis.
Hyperbolische partielle Differentiagleichungen. Neben der elliptischen Familie mit ihren Randfällen ist die zweitwichtigste Klasse die der hyperbolischen partiellen Differentialgleichungen. In diesem Fall hat die Matrix (a_{ij}) einen Eigenwert von umgekehrten Vorzeichen als die restlichen Eigenwerte. Das einfachste Beispiel ist die

Wellengleichung. $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \triangle u = 0.$$

Diese hyperbolischen Differentiagleichugen beschreiben ganz allgemein die Ausbreitung von Wellen mit endlicher Geschwindigkeit und ihre Lösungen sind den Lösungen der Wellengleichung in vielerlei Hinsicht verwandt. Die Eigenschaften und die Lösungstheorie unterscheidet sich aber drastisch von der elliptischen Theorie. Eine wichtige Rolle spielen dabei alle Bahnkurven, die sich mit der durch die Gleichung vorgegebenen Geschwindigkeit ausbreiten. Angeregt wurde ihre Untersuchung durch die physikalische Theorie der elektromagnetischen Felder, also die

Maxwellgleichungen. $$\begin{array}{cc} \dot{E} - \nabla \times B = -4\pi j & \dot{B} + \nabla \times E = 0 \\ \nabla \cdot E = 4\pi\rho & \nabla \cdot B = 0. \end{array}$$

Hier sind die Ladungsverteilung ρ und die Stromverteilung j gegebene reelle bzw. $\mathbb{R}^3$-wertigen Funktionen auf der Raumzeit $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ und das elektrische Feld E und das Magnetfeld B die gesuchten $\mathbb{R}^3$-wertige Funktionen. Die Ladungserhaltung wird dabei so formuliert, dass die Änderung der in einem offenen Gebiet enthaltene Gesamtladung, durch den Zu- and Abfluss der Ladung durch den Rand des Gebietes betimmt ist. Mit dem Divergenzsatz, den wir im nächsten Abschnitt kennenlernen werden, folgt

$$\dot{\rho} + \nabla \cdot j = 0.$$

Auch im Fall der hyperbolischen Gleichung gibt es nichtlineare Versionen, deren Untersuchung die Theorie entscheidend vorangebracht hat:

Einsteins Feldgleichungen. $$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R = \kappa T_{ij}.$$

Hier ist der Energieimpulstensor einer gegebenen Massenverteilung auf der Raumzeit und g_{ij} ist die entsprechende gesuchte Metrik auf der Raumzeit. Diese Metrik g_{ij} ist eine Lorentzmetrik auf der Raumzeit, d.h. eine symmetrische Bilinearform auf dem Tangentialraum der Raumzeit mit der Signatur $(1,3)$. R_{ij} ist die dazugehörige Riccikrümmung und R die skalare Krümmung.

$$\Gamma^k_{ij} := \frac{1}{2}\sum_{l=0}^{3} g^{kl}\left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\right) \qquad \left(g^{ij}\right) := \left(g_{ij}\right)^{-1} \text{ inverse Metrik}$$

$$R_{ij} := \sum_{k=0}^{3} g^{kl}\left(\frac{\partial \Gamma^k_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^k_{ik}}{\partial x^j} + \sum_{l=0}^{3}\left(\Gamma^k_{lk}\Gamma^l_{ij} - \Gamma^k_{lj}\Gamma^l_{ik}\right)\right) \qquad R := \sum_{i,j=0}^{3} g^{ij}R_{ij}.$$

Integrable Systeme mit Laxoperatoren. Zum Abschluss wird eine Klasse von partiellen Differentielgleichungen vorgestellt, mit denen ich mich in der Forschung beschäftige. Das sind nichtlineare partielle Differentialgleichungen die einen besonders stabilen zeitlichen Verlauf beschreiben. Das drückt sich darin aus, dass sie in einem bestimmten Sinne maximal viele Erhaltungsgrößen haben. Die integrablen Systeme sind dabei ein Teilgebitet der hamiltonschen Mechanik, die sich aus der newtonschen Beschreibung der Planetenbewegungen entwickelt hat. Angestoßen durch die Beobachtung von einer Wasserwelle in einem schottischen Kanal durch einen englischen Lord Russell, hat sich in den letzten 50 Jahren ein überrraschender Zusammenhang mit einem anderen klassichen Gebiet der Mathematik ergeben, den Riemannschen Flächen, also den komplex eindimensionalen Mannigfaltigkeiten. Das einfachste Beispiel einer solchen partiellen Differentialgleichung ist die

Korteweg-de-Vries-Gleichung. $$4\dot{u} - 6u\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0.$$

Diese Gleichung besitzt eine sogenannte Laxdarstellung, d.h. sie lässt sich schreiben als

$$\dot{L} = [A, L] \qquad \text{mit} \qquad L := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + u \qquad A := \frac{\partial^3}{\partial x^3} + \frac{3u}{2}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{3}{4}\frac{\partial u}{\partial x}.$$

1.1 Gaußscher Satz

Definition 1.3. *(Zerlegung der Eins) Eine glatte Zerlegung der Eins einer Familie von offenen Mengen im $\mathbb{R}^n$ mit der Vereinigung $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ist eine abzählbare Familie $(h_l)_{l\in\mathbb{N}}$ von glatten Funktionen $h_l : \Omega \to [0, 1]$, so dass*

(i) *für jedes $x \in \Omega$ auf einer Umgebung von x nur endlich viele h_l ungleich Null sind.*

(ii) *Für alle $x \in \Omega$ gilt $\sum_{l=1}^{\infty} h_l(x) = 1$.*

(iii) *Jedes h_l außerhalb einer kompakten Teilmenge eines Elements verschwindet.*

Jede Familie von offenen Mengen in $\mathbb{R}^n$ besitzt eine glatte Zerlegung der Eins.

Definition 1.4. *Für $0 \leq k < n \in \mathbb{N}$ heißt ein Teilmenge $Y \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale stetig differenzierare Untermannigfaltigkeit, wenn für jedes $y \in Y$ eine stetig differenzierbare Abbildung $\Phi : U \to \mathbb{R}^n$ existiert, die eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^k$*

homöomorph auf eine in Y enthaltene offene Umgebung von y abbildet, und deren Ableitung Φ' auf U den Rang k hat.

Diese Untermannigfaltigkeiten können auch folgendermaßen charakterisiert werden:

Satz 1.5. *Für $0 \leq k < n \in \mathbb{N}$ ist eine Teilmenge $Y \subset \mathbb{R}^n$ genau dann eine stetig differenzierbare k-dimensionale Untermannigfaltigkeit, wenn jedes $y \in Y$ in einer offenen Teilmenge $O \subset \mathbb{R}^n$ enthalten ist mit einer C^1-Funktion $f : O \to \mathbb{R}^{n-k}$, deren Nullstellenmenge $Y \cap O$ ist, und deren Ableitung f' auf O den Rang $n-k$ hat.*

Proof. Sei $Y \subset \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare k-dimensionale Untermannigfaltigkeit und $\Phi : U \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbarer Homöomorphismus von einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^k$ auf eine offene Teilmnege von Y, deren Ableitung Φ' auf U den Rang k hat. Seien $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ und $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-k}$ die Projektionen auf die ersten k bzw. die letzten $n-k$ Komponenten von $\mathbb{R}^n$. Für alle $y \in Y$ können wir die Komponenten von $\mathbb{R}^n$ so permutieren, dass die Ableitung von $P \circ \Phi$ invertierbar ist. Mit dem Satz der inversen Funktion verkleinern wir dann U so, dass $P \circ \Phi$ ein C^1-Diffeomorphismus von U auf eine offene Teilmenge $V \subset \mathbb{R}^k$ ist. Die beiden Abbildungen

$$\begin{aligned} F^{-1} : U \times \mathbb{R}^{n-k} \to V \times \mathbb{R}^{n-k}, &\quad (x, z) \mapsto ((P(\Phi(x)), z + Q(\Phi(x))) \\ F : V \times \mathbb{R}^{n-k} \to U \times \mathbb{R}^{n-k}, &\quad (x, z) \mapsto ((P \circ \Phi)^{-1}(x), z - Q(\Phi((P \circ \Phi)^{-1}(x)))) \end{aligned}$$

sind dann stetig differenzierbar und invers zu einander. Deshalb sind beide C^1-Diffeomorphismen. Das Bild $\Phi[U]$ is die Nullstellenmenge von der Verkettung $f = Q \circ F$. Die Ableitung von f hat den Rang $n-k$. Deshalb erfüllt Y die Bedingung des Satzes.

Wenn umgekehrt $Y \subset \mathbb{R}^n$ die Bedingung des Satzes erfüllt, dann können wir die Komponenten von $\mathbb{R}^n$ so permutieren, dass die $(n-k)\times(n-k)$-Matrix $(\partial_{k+i} f_j)_{1 \leq i,j \leq n-k}$ bei dem entsprechenden $y \in O$ invertierbar ist. Wegen dem Satz der impliziten Funktion existieren offene Umgebungen U von $x = P(y)$ und W von $z = Q(y)$ zusammen mit eine stetig differenzierbaren Abbildung $g : U \to W$, so dass $U \times W \subset O$ und $Y \cap (U \times W)$ das Bild von $x \mapsto \Phi(x) = (x, g(x))$ ist. Die Ableitung Φ' hat auf $U \times W$ Rang k und Y ist eine stetig differenzierbare k-dimensionale Untermannigfaltigkeit. **q.e.d.**

Der Beweis zeigt auch, dass eine Teilmenge $Y \subset \mathbb{R}^n$ genau dann eine stetig differenzierbare Untermannigfaltigkeit ist, wenn eine Umgebung jedes $y \in Y$ nach einer geeigneten Permutation der Komponenten von $\mathbb{R}^n$ der Graph einer stetig differenzierbaren Funktion $g : U \to \mathbb{R}^{n-k}$ auf einer offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^k$ ist.

Korollar 1.6. *Sei $0 \leq k < n$ und $Y \subset \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare k-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Für zwei Abbildungen $\Phi : U \to \mathbb{R}^n$ und $\Psi : V \to \mathbb{R}^n$ wie in Definiton 1.4 mit $\Phi[U] \cap \Psi[V] \neq \emptyset$ existiert ein C^1-Diffeomorphismus $\Upsilon : \Psi^{-1}[\Phi[U] \cap \Psi[V]] \to \Phi^{-1}[\Phi[U] \cap \Psi[V]]$ so dass $\Psi(x) = \Phi(\Upsilon(x))$ für alle $x \in \Psi^{-1}[\Phi[U] \cap \Psi[V]]$ gilt.*

Beweis: Weil Φ und Ψ Homöomorphismen auf offene Teilmengen von Y sind, existiert eine Homöomorphismus $\Upsilon : \Psi^{-1}[\Phi[U] \cap \Psi[V]] \to \Phi^{-1}[\Phi[U] \cap \Psi[V]]$, so dass $\Psi(x) = \Phi(\Upsilon(x))$ für alle $x \in \Psi^{-1}[\Phi[U] \cap \Psi[V]]$ gilt. Wegen dem vorangehenden Satz gibt es auf einer in $\mathbb{R}^n$ offenen Umgebung O von jedem $y \in \Phi[U] \cap \Psi[V]$ eine stetig differenzierbare Funktion $f : O \to \mathbb{R}^{n-k}$, so dass $Y \cap O$ die Nullstellenmenge von f ist und f' auf O den Rang k hat. Dann ist sowohl das Bild von $\Phi'(\Phi^{-1}(y))$ also auch $\Psi'(\Psi^{-1}(y))$ gleich dem Kern von $f'(y)$. Also stimmen die beiden Bilder überein. Nach einer geeigneten Permutation der Komponenten von $\mathbb{R}^n$ sind dann sowohl $P \circ \Phi'(\Phi^{-1}(y))$ als auch $P \circ \Psi'(\Psi^{-1}(y))$ invertierbare lineare Abbildungen in $\mathcal{L}(\mathbb{R}^k)$. Dann folgt aus dem Satz der inversen Funktion, dass lokal $P \circ \Phi$ und $P \circ \Psi$ C^1-Diffeomorphismen sind. Weil lokal $P \circ \Phi = P \circ \Psi \circ \Upsilon$ gilt, ist dann $\Upsilon = (P \circ \Psi)^{-1} \circ P \circ \Phi$ ein C^1-Diffeomorphismus.**q.e.d.**

Definition 1.7. *Sei $0 \leq k < n$ und $Y \subset \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare k-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$. Für $f \in C_0(Y, \mathbb{R})$, wählen wir eine endliche Überdeckung des Trägers durch offene Mengen der Form $U \times W$ wie im Beweis von Satz 1.5 und eine entsprechende Zerlegung der Eins $(h_l)_{l \in \mathbb{N}}$. Wir definieren das Integral von f als*

$$\int_Y f \, \mathrm{d}\sigma = \sum_{l \in \mathbb{N}} \int_U h_l f \circ \Phi \sqrt{\det((\Phi')^T \Phi')} \, \mathrm{d}\mu.$$

Zur Motivation bemerken wir, dass das Volumen des n-dimensionalen Parallelotops, das von den Spaltenvektoren einer $k \times k$ Matrix A aufgespannt wird, gleich $\sqrt{\det(A^T A)}$ ist. Dann ist $A^T A$ die Matrix aller Skalarprodukte zwischen diesen Vektoren.

Lemma 1.8. *Das Integral $\int_Y f \, \mathrm{d}\sigma$ hängt weder von der Wahl der Überdeckung noch von der Wahl der Zerlegung der Eins ab.*

Beweis: Für zwei Überdeckungen von $\operatorname{supp} f$ durch Mengen $U \times W$ wie im Beweis von Satz 1.5 mit ensprechenden Zerlegungen der Eins, bilden die Schnittmengen von zwei Mengen (aus beiden Überdeckungen jeweils eine) auch eine Überdeckung durch solche Mengen und die Produkte von zwei Elementen (aus beiden Zerlegungen der Eins jeweils eine) eine entsprechende Zerlegung der Eins. Wegen der Bedingung (ii) an die Zerlegungen der Eins und der Linearität des Integrals genügt es dann den Fall zu betrachten, dass $\operatorname{supp} f$ in zwei Mengen $\Phi[U]$ und $\Psi[V]$ wie in Definition 1.4 enthalten ist. Wegen Korollar 1.6 gibt es dann einen C^1-Diffeomorphismus $\Upsilon : \Psi^{-1}[\Phi[U] \cap \Psi[V]] \to \Phi^{-1}[\Phi[U] \cap \Psi[V]]$ so dass $\Psi(x) = \Phi(\Upsilon(x))$ für alle $x \in \Psi^{-1}[\Phi[U] \cap \Psi[V]]$ gilt:

$$\int_{\Phi^{-1}[\Phi[U] \cap \Psi[V]]} f \circ \Phi \sqrt{\det((\Phi')^T \Phi')} \, \mathrm{d}\sigma = \int_{\Phi^{-1}[\Phi[U] \cap \Psi[V]]} f \circ \Psi \circ \Upsilon \sqrt{\det((\Psi' \circ \Upsilon')^T \Psi' \circ \Upsilon')} \, \mathrm{d}\sigma =$$

$$= \int_{\Phi^{-1}[\Phi[U] \cap \Psi[V]]} f \circ \Psi \circ \Upsilon \sqrt{\det((\Psi')^T \Psi')} |\det \Upsilon'| \, \mathrm{d}\sigma = \int_{\Psi^{-1}[\Phi[U] \cap \Psi[V]]} f \circ \Psi \sqrt{\det((\Psi')^T \Psi')} \, \mathrm{d}\sigma.$$

Im letzten Schritt haben wir Jacobis Transformationsformel benutzt. **q.e.d.**

Im Gaußschen Satz werden beschränkte offenen Teilmengen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit einem stetig differenzierbare Rand betrachtet. Der Rand $\partial\Omega$ ist dann eine einmal stetig differenzierbare $n-1$-dimensionale Untermannigfaltigkeit. In dem Beweis von Satz 1.5 haben wir gezeigt, dass nach einer geeigneten Permutation der Koordinaten bei jedem $y \in \partial\Omega$ der Rand der Graph einer stetig differenzierbaren Funktion $g : U \to (a, b)$ auf einer offenen Umgebung $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$ von $x = (y_1, \ldots, y_{n-1})$ ist. Dann hat die Menge Ω lokal die Form $\{(x, z) \in U \times \mathbb{R}^n \times (a, b) \mid z > g(x)\}$ bzw. $\{(x, z) \in U \times (a, b) \mid z > g(x)\}$. Im Gaußschen Satz wird die äußere Normale N auf $\partial\Omega$ benutzt. Das ist der Vektor, der auf der Tangentialebene des Randes senkrecht steht, der die Länge Eins hat und aus Ω heraus zeigt. In den beiden Fällen ist der Rand die Nullstellenmenge der Funktion

$$U \times (a, b) \to \mathbb{R}, \quad (x, z) \mapsto z - g(x).$$

Dann ist die Tangentialebende im Punkt $(x, (g(x))$ der Kern der Ableitung dieser Abbildung an dieser Stelle. Also steht der Gradient dieser Abbildung senkrecht auf der Tangentialabene. Ob der Gradient aus der Menge herauszeigt oder in die Menge hineinzeigt erkennt man an der letzten Komponente. Also ist die äußere Normale bei den Randpunkten $(x, g(x))$ der obigen Mengen Ω gegeben durch

$$N(x, g(x)) = \pm \frac{(\nabla^T g(x), -1)^T}{\sqrt{1 + (\nabla g(x))^2}} \quad \text{für} \quad \Omega = \{(x, z) \in U \times \mathbb{R}^n \times (a, b) \mid z \gtrless g(x)\}.$$

Andererseits gilt für die entsprechende Abbildung $\Phi(x) = (x, g(x))$ aus Definition 1.4

$$\det((\Phi'(x))^T \Phi'(x)) = \det \left(\begin{pmatrix} \mathbb{1} & \nabla g(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{1} \\ \nabla^T g(x) \end{pmatrix} \right) = 1 + (\nabla g(x))^2.$$

Die lineare Abbildung dieser Matrix wirkt auf dem ortogonalen Komplement von $\nabla g(x)$ nämlich wie die Identität und multipliziert $\nabla g(x)$ mit $1 + (\nabla g(x))^2$.

Satz 1.9. *(Gaußscher Satz oder Divergenzsatz) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene beschränkte Menge mit stetig differenzierbarem Rand und f eine auf $\overline{\Omega}$ stetige $\mathbb{R}^n$-wertige Funktion, mit sich stetig auf $\bar{\Omega}$ fortsetzenden ersten partiellen Ableitungen. Dann gilt:*

$$\int_\Omega \nabla \cdot f \, \mathrm{d}\mu = \int_{\partial\Omega} f \cdot N \, \mathrm{d}\sigma$$

Hierbei ist N die äußere Normale und $N \, \mathrm{d}\sigma$ das entsprechende Maß auf dem Rand $\partial\Omega$.

Beweis: Wir überdecken $\partial\Omega$ durch offenen Mengen $O \subset \mathbb{R}^n$ wie im Satz 1.5. In dem Beweis haben wir gesehen, dass wir nach einer geeigneten Permutation der Komponenten von $\mathbb{R}^n$ die entsprechende Funktion f so wählen können, dass sie von der Gestalt

$U \times (a,b) \to \mathbb{R}$ mit $(x,z) \mapsto z - g(x)$ ist. O.B.d.A. sei $\partial\Omega$ durch endlich viele offenen Mengen $U \times (a,b)$ überdeckt, so dass $\Omega \cap U \times (a,b) = \{(x,z) \mid z < g(x)\}$ gilt. Zusammen mit Ω erhalten wir eine endlich Überdeckung des Abschlusses von Ω. Dann wählen wir eine entsprechende Zerlegung der Eins. Wegen der Kompaktheit von $\bar{\Omega}$ und der lokalen Endlichkeit besteht diese Zerlegung der Eins nur aus endlich vielen Elementen. Wegen der Linearität genügt es die Aussage für jeden der Summenden einzeln zu zeigen.

Als erstes betrachten wir stetig differenzierbare Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, die außerhalb einer kompakten Teilmenge von Ω verschwinden. Durch den Wert Null außerhalb von Ω setzen sich diese Funktionen stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}^n$ fort. Wir wählen einen endlichen Quader, der Ω enthält. Dann verschwindet f auf dem Rand des Quaders. Wir integrieren beim i-tem Summanden von $\nabla \cdot f = \partial_1 f_1 + \ldots, +\partial_n f_n$ mit Fubini zuerst über die Koordinate x_i. Wegen dem Hauptsatz ergibt dieses Integral die Differenz der Funktionswerte von f_i an den Randpunkten der entsprechenden Intervalle, also Null. Damit verschwinden in diesem ersten Fall beide Seiten des Gaußschen Satzes.

Als zweites betrachten wir Funktionen f auf $\{(x,z) \in U \times (a,b) \mid z \leq g(x)\}$, die außerhalb einer kompakten Teilmenge verschwinden. Hierbei ist U eine offene beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}^{n-1}$ und $g : U \to (a,b)$ stetig differenzierbar. Wir betrachten die Summanden $\partial_i f_i$ mit $1 \leq i < n$ und $i = n$ getrennt. Im Fall 2a ist folgende Funktion

$$U \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \int\limits_a^{g(x)} f_i(x,z)\,\mathrm{d}z$$

stetig differenzierbar mit den stetigen partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \int\limits_a^{g(x)} f_i(x,z)\,\mathrm{d}z = \partial_i g(x) f_i(x,g(x)) + \int\limits_a^{g(x)} \partial_i f_i(x,z)\,\mathrm{d}z.$$

Außerdem hat obige Funktion kompakten Träger in U, weil f kompakten Träger hat. Dann folgt mit den Argumenten des ersten Falles, dass das Integral dieser partiellen Ableitung über U verschwindet. Daraus folgt auch in diesem Fall 2a der Gaußsche Satz:

$$\int\limits_U \int\limits_a^{g(x)} \partial_i f_i(x,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}^{n-1}x = -\int\limits_U f_i(x,g(x))\partial_i g(x)\,\mathrm{d}^{n-1}x = \int\limits_U f_i(x,g(x))N_i(x,g(x))\,\mathrm{d}\sigma.$$

Weil f auf $U \times \{a\}$ verschwindet folgt auch im letzten Fall 2b aus dem Hauptsatz:

$$\int\limits_U \int\limits_a^{g(x)} \partial_n f_n(x,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}^{n-1}x = \int\limits_U f_n(x,g(x))\,\mathrm{d}^{n-1}x = \int\limits_U f_n(x,g(x))N_n(x,g(x))\,\mathrm{d}\sigma. \quad \textbf{q.e.d.}$$

1.2 Existenz von Lösungen

Wir wollen zur Erläuterung ein Beispiel einer Differentialgleichung geben, das keine Lösung besitzt. Dieses Beispiel ist eine Vereinfachung (von Nirenberg) eines Beispieles von H. Lewy: Gegeben ist eine komplexwertige Funktion f auf einem Teilgebiet von $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ und gesucht ist eine komplexwertige Funktion u auf demselben Teilgebiet, die folgende lineare Differentialgleichung erster Ordnung erfüllt:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \imath x \frac{\partial u}{\partial y} = f(x, y).$$

Wir zeigen, dass es für eine glatte Funktion f, die folgende beiden Bedingungen erfüllt, in keiner Umgebung von $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ eine einmal stetig differenzierbare Lösung u gibt:

(i) $f(-x, y) = f(x, y)$

(ii) Es gibt eine Nullfolge $\varrho_n \downarrow 0$, so dass f auf einer Umgebung der Kreise $\partial B(0, \varrho_n)$ verschwindet, die Integrale $\int_{B(0,\varrho_n)} f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$ aber ungleich Null sind.

Wenn $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ eine glatte periodische Funktion ist, die auf einem Intervall aber nicht auf $\mathbb{R}$ verschwindet, dann ist $f(x) := \exp(-1/|x|)h(1/|x|)$ ein solches Beispiel. Wir bezeichen die euklidische Länge eines Vektors $x \in \mathbb{R}^n$ mit $|x|$.

1. Schritt: Wegen (i) ist mit $u(x, y)$ auch $-u(-x, y)$ und $w(x, y) = \frac{1}{2}(u(x, y) - u(-x, y))$ eine Lösung. Deshalb können wir $u(-x, y) = -u(x, y)$ annehmen.

2. Schritt: Jede solche Lösung u verschwindet auf den Kreisen $\partial B(0, \varrho_n)$. Um das einzusehen transformieren wir kleine Ringe A folgendermaßen auf Gebiete $\tilde{A}$ im $\mathbb{R}^2$:

$$A \to \tilde{A}, \qquad (x, y) \mapsto \begin{cases} (x^2/2, y) & \text{für } x \geq 0 \\ (-x^2/2, y) & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

Diese Abbildungen sind offenbar Homöomorphismen von A auf $\tilde{A}$. Auf dem Teilgebiet $\tilde{A}_+ = \left\{(s, y) \in \tilde{A} \mid s > 0\right\}$ ist die Funktion $\tilde{u}(s, y) = u(x^2/2, y)$ holomorph:

$$2\bar{\partial}\tilde{u} = \frac{\partial \tilde{u}(s, y)}{\partial s} + \imath \frac{\tilde{u}(s, y)}{\partial y} = \frac{dx}{ds}\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + \imath \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = \frac{1}{x}\left(\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + \imath x \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}\right) = 0.$$

Wegen dem 1. Schritt verschwindet $\tilde{u}$ für $s = 0$, und wegen dem Schwarzen Spiegelungsprinzip und dem Identitätssatz auf $\tilde{A}_+$, und wegen dem 1. Schritt auf $\tilde{A}$.

3. Schritt: Wegen dem Gaußschen Satz gilt

$$\begin{aligned} \int_{B(0,\varrho_n)} f\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y &= \int_{B(0,\varrho_n)} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \imath x \frac{\partial u}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_{B(0,\varrho_n)} \nabla \cdot \begin{pmatrix} u \\ \imath x u \end{pmatrix} \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \\ &= \int_{\partial B(0,\varrho_n)} \begin{pmatrix} u \\ \imath x u \end{pmatrix} \cdot N(x, y)\, \mathrm{d}\sigma(x, y) = 0, \end{aligned}$$

im Widerspruch zu (ii). Also gibt es keine einmal stetig differenzierbare Lösung.

Aus diesem Beispiel folgt auch, dass folgende reelle Differentialgleichung keine viermal differenzierbare Lösung hat:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+\imath x\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}-\imath x\frac{\partial}{\partial y}\right)^2\left(\frac{\partial}{\partial x}+\imath x\frac{\partial}{\partial y}\right)u=\left(\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+x^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u=f.$$

1.3 Distributionen

Bei der Untersuchung von partiellen Differentialgleichungen wollen wir einerseits möglichst viele Lösungen bestimmen und andererseits Bedingungen finden, so dass die Lösungen eindeutig werden. Die Anzahl oder sogar die Existenz kann davon abhängen, was wir als Lösung auffassen wollen. Wegen der Ableitungen, die in der partiellen Differentialgleichung vorkommen, muss die Lösung differenzierbar sein, und mit ihren Ableitungen die Differentialgleichung erfüllen. Der Begriff von differenzierbaren Funktionen lässt sich auf verschiedene Art erweitern. In diesem Abschnitt wollen wir sogenannte Distributionen einführen, die wohl die größte Klasse von verallgemeinerten differenzierbaren Funktionen darstellen, sich aber im Allgemeinen nicht mehr miteinander multiplizieren lassen. Im Fall von linearen Differentialgleichungen tauchen in der Differentialgleichung nur die gesuchte Funktion oder ihre Ableitungen auf, so dass für lineare partielle Differentialgleichungen schwache Lösungen wohldefiniert sind. Für nichtlineare partielle Differentialgleichungen werden wir sogenannte Sobolevräume einführen. Diese Sobolevräume lassen sich als Teilmengen der Distributionen auffassen, so dass die letzteren als die allgemeinsten differenzierbaren Funktionen gelten können.

Der Träger $\operatorname{supp} f$ einer Funktion f auf einer offenen Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ist der Abschluss von $\{x \mid f(x) \neq 0\}$ in Ω. $C_0^\infty(\Omega)$ bezeichnet die Algebra der glatten Funktionen mit kompaktem Träger in Ω. Jedes $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ definiert eine lineare Abbildung

$$F_f : C_0^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}, \qquad \phi \mapsto \int_\Omega f\phi \,\mathrm{d}\mu.$$

Verallgemeinerte Funktionen auf Ω sind solche Linearformen F auf $C_0^\infty(\Omega)$. Die Elemente von $C_0^\infty(\Omega)$, auf denen die verallgemeinert Funktionen ausgewertet werden, heißenTestfunktionen. Mithilfe von partieller Integration erhalten wir

$$\int_\Omega \partial_i f\phi \,\mathrm{d}^{\mathrm{n}}x = -\int_\Omega f\partial_i\phi \,\mathrm{d}^{\mathrm{n}}x.$$

Deshalb sind solche verallgemeinert Funktionen unendlich oft differenzierbar. Für eine beliebige Linearform F auf $C_0^\infty(\Omega)$ definieren wir als die partielle Ableitung

$$\partial_i F : C_0^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}, \qquad \phi \mapsto -F(\partial_i\phi).$$

Weil der Vektorraum der Testfunktionen unendlichdimensional ist, stellen wir an die Linearformen zusätzliche Stetigkeitsbedingungen, um ihn nicht unhandbar groß zum machen. Damit die stetigen Linearformen unendlich oft differenzierbar sind, müssen die partiellen Ableitungen stetige Operatoren auf dem topologischen Vektorraum $C_0^\infty(\Omega)$ bilden. Für jede kompakte Teilmenge $K \subseteq \Omega$ und jeden endlichen Multiindex α definieren wir folgende Halbnorm:

$$\|\cdot\|_{K,\alpha} : C_0^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}, \qquad \phi \mapsto \|\phi\|_{K,\alpha} := \sup_{x\in K} |\partial^\alpha \phi(x)|\,.$$

Wir nennen eine Folge ϕ_k konvergent in $C_0^\infty(\Omega)$, wenn alle $\operatorname{supp}\phi_k$ in einer kompakten Teilmenge $K \subset \Omega$ enthalten sind und ϕ_k bezüglich aller Halbnormen $\|\cdot\|_{K,\alpha}$ konvergiert. Die Stetigkeit von Linearformen auf $C_0^\infty(\Omega)$ äquivalent ist zu folgender Bedingung:

Definition 1.10. *Eine Distribution auf einer offenen Menge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ist eine Linearform F auf $C_0^\infty(\Omega)$ und für jede kompakte Teilmenge $K \subset \Omega$ endlich viele Multiindices $\alpha_1, \ldots, \alpha_M$ und positive Zahlen $C_1 > 0, \ldots, C_M > 0$, so dass folgendes gilt:*

$$|F(\phi)| \leq C_1\|\phi\|_{K,\alpha_1} + \ldots + C_M\|\phi\|_{K,\alpha_M} \qquad \text{für alle } \phi \in C_0^\infty(\Omega) \text{ mit } \operatorname{supp}\phi \subset K.$$

Der Raum dieser Distributionen wird mit $\mathcal{D}'(\Omega)$ bezeichnet.

Jedes Element $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ definiert auf natürliche Weise eine Distribution

$$F_f : C_0^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}, \qquad \phi \mapsto \int_\Omega f\phi \,\mathrm{d}\mu.$$

Für $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ mit Träger in der kompakten Teilmenge $K \subset \Omega$ und $f \in L^1(\Omega)$ gilt

$$|F_f(\phi)| \leq \sup_{x\in K} |\phi(x)| \|f\|_{L^1(\Omega)}.$$

Für $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ besitzt dann jede kompakte Teilmenge $K \subset \Omega$ eine endliche Überdeckung durch offene Mengen $O_1, \ldots, O_L$, auf denen die Einschränkungen von f für $l = 1, \ldots, L$ jeweils in $f|_{O_l} \in L^1(O_l)$ liegen. Daraus folgt dann die Stetigkeit von F_f:

$$|F_f(\phi)| \leq \sup_{x\in K} |\phi(x)| \sum_{l=1}^{L} \|f|_{O_l}\|_{L^1(O_l)}.$$

Unter dem Träger einer Distribution verstehen wir das Komplement der Vereinigung aller der offenen Mengen, so dass die Distribution auf allen Testfunktionen verschwindet, deren Träger in den offenen Mengen enthalten ist. Für $x \in \mathbb{R}^n$ bezeichne $|x|$ die euklidische Länge von x. Die Testfunktion

$$\phi(x) := \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right) & \text{für } |x| < 1 \\ 0 & \text{für } |x| \geq 1 \end{cases}$$

hat den Träger $\overline{B(0,1)}$ und ist nichtnegativ. Durch Umskalieren von x und ϕ und durch Translation lässt sich daraus für jeden Ball $B(x_0,\epsilon)$ eine eindeutige nichtnegative Testfunktion $\phi_{B(x_0,\epsilon)}$ konstruieren, deren Träger gleich $\overline{B(x_0,\epsilon)}$ ist, und mit $\int \phi_{B(x_0,\epsilon)}\,\mathrm{d}\mu = 1$. Also gibt es insbesondere für jede offene Menge eine nichtnegative Testfunktion, deren Träger in der offenen Menge enthalten ist. Weil jede stetige Funktion f auf Ω, die nicht identisch verschwindet, auf einem offenen Ball für ein $\epsilon > 0$ entweder größer als ϵ oder kleiner als $-\epsilon$ ist, gibt es ein $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ mit $\int_\Omega f\phi\,\mathrm{d}\mu \neq 0$.

Folgender Distribution auf $\Omega \ni 0$ entspricht keine Funktion in $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$:

$$\delta : C_0^\infty(\Omega) \to \mathbb{R} \qquad\qquad \phi \mapsto \phi(0).$$

Eine entsprechende Funktion müsste auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ verschwinden und ihr Integral müsste gleich eins sein. Eine solche Funktion wird Dirac'sche δ-Funktion genannt. Die Familie der Distributionen, die den Funktionen $\phi_{B(0,\epsilon)}$ entsprechen, konvergieren im Grenzwert $\epsilon \downarrow 0$ gegen diese Distribution. Der Träger dieser Distribution ist offenbar nur der Punkt $0 \in \Omega$. Auch alle partiellen Ableitungen dieser Funktion hängen nur von den Werten von der Testfunktionen und ihrer Ableitungen an der Stelle $0 \in \Omega$ ab.

Das Produkt einer Distribution F mit einer Funktion $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ist definiert als

$$gF : C_0^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}, \qquad\qquad \phi \mapsto F(g\phi).$$

Dieses Produkt ist offensichtlich verträglich mit der Einbettung von glatten Funktionen in die Distributionen und der Multiplikation von Funktionen. Allerdings ist schon das Produkt einer Distribution mit einer stetigen aber nicht differenzierbaren Funktion nicht mehr definiert, geschweige denn das Produkt zwischen beliebigen Distributionen.

Die Faltung definiert eine weitere Produktstruktur auf den Funktionen in $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$:

$$(g * f)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} g(x-y)f(y)\,\mathrm{d}^\mathrm{n}y = \int_{\mathbb{R}^n} g(y)f(x-y)\,\mathrm{d}^\mathrm{n}y.$$

Dieses Produkt ist abelsch und assoziativ (Übungsaufgabe). Wegen der Gleichung

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \phi(g*f)\,\mathrm{d}^\mathrm{n}x &= \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \phi(x)g(x-y)f(y)\,\mathrm{d}^\mathrm{n}y\,\mathrm{d}^\mathrm{n}x = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\phi(x)\int\limits_{\mathbb{R}^n}(\mathsf{T}_x\mathsf{P}g)(y)f(y)\,\mathrm{d}^\mathrm{n}y\,\mathrm{d}^\mathrm{n}x \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\phi(x)g(x-y)f(y)\,\mathrm{d}^\mathrm{n}x\,\mathrm{d}^\mathrm{n}y = \int_{\mathbb{R}^n}(\phi * \mathsf{P}g)f\,\mathrm{d}^\mathrm{n}y \\ &\text{mit } \mathsf{T}_x : C_0^\infty(\Omega) \to C_0^\infty(x+\Omega), \quad \phi \mapsto \mathsf{T}_x\phi, \text{ mit } (\mathsf{T}_x\phi)(y) = \phi(y-x) \\ &\text{und } \mathsf{P} : C_0^\infty(\Omega) \to C_0^\infty(-\Omega), \quad \phi \mapsto \mathsf{P}\phi, \text{ mit } (\mathsf{P}\phi)(y) = \phi(-y)\end{aligned}$$

ist die Faltung einer glatten Funktion g mit einer Distribution F definiert als

$$g*F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto F(\mathsf{T}_x\mathsf{P}g) \text{ oder als } g*F : C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}, \quad \phi \mapsto F(\phi * \mathsf{P}g).$$

Lemma 1.11. *Die Faltung einer Distribution mit einer glatten Funktion mit kompaktem Träger entspricht einer glatten Funktion, ist also eine Distribution im Bild der Einbettung der glatten Funktionen in die Distributionen. Der Träger dieser Funktion ist enthalten in der Summe des Trägers der Funktion mit dem Träger der Distribution.*

Beweis: Aus der Stetigkeit und Linearität folgt dann für jede Distribution $F \in \mathcal{D}'(\Omega)$:

$$g * F(\phi) = F(\mathsf{P}g * \phi) = \int_{\mathbb{R}^n} F(\mathsf{T}_x \mathsf{P}g)\phi(x)\,\mathrm{d}^{\mathrm{n}}x.$$

Augrund der Stetigkeit der Distribution bezüglich der Halbnormen $\|\cdot\|_{K,0}$ ist $x \mapsto F(\mathsf{T}_x\mathsf{P}g)$ stetig. Diese Funktionen sind sogar glatt, weil $\frac{\mathsf{T}(y+\epsilon h)-\mathsf{T}(y)}{\epsilon}\phi$ für $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ für $\epsilon \downarrow 0$ bezüglich der Halbnormen $\|\cdot\|_{K,\alpha}$ gegen $\mathsf{T}(y)\,(\sum_{i=1}^n h_i\partial_i\phi)$ konvergiert.

Wenn $x \mapsto F(T_xPg)$ in einer Umgebung eines Punktes x nicht verschwindet, dann ist $g(x-y)$ für ein y im Träger von F nicht Null. Also ist $x = y + (x-y)$ die Summe eines Elementes des Trägers von F und eines Elementes des Trägers von g. **q.e.d.**

Aufgrund dieses Lemmas ist sogar die Faltung einer Distribution F mit einer Distribution G mit kompaktem Träger definiert:

$$F * G : C_0^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}, \qquad \phi \mapsto F(\phi * \mathsf{P}G) \text{ mit } \qquad \mathsf{P}G(\phi) := G(\mathsf{P}\phi).$$

Die Faltung mit der Dirac'schen δ-Funktion ist gleich der ursprünglichen Funktion. Die Dirac'sche δ-Funktion ist also bezüglich der Faltung das Einselement. Wir hatten eine Familie von Testfunktionen $\phi_{B(0,\epsilon)}$ eingeführt, die im Grenzwert $\epsilon \downarrow 0$ gegen die Dirac'sche δ-Funktion konvergieren. Für jede Distribution F konvergieren die glatten Funktionen $f_\epsilon := \phi_{B(0,\epsilon)} * F$ im Grenzwert $\epsilon \downarrow 0$ in einem bestimmten Sinne gegen F. Eine solche Familie $(\lambda_\epsilon)_{\epsilon>0}$, die also gegen die Dirac'sche δ-Funktion konvergiert,

$$\lambda_\epsilon \geq 0 \qquad \operatorname{supp}\lambda_\epsilon \subset \overline{B(0,\epsilon)} \qquad \int_{\mathbb{R}^n} \lambda_\epsilon\,\mathrm{d}^{\mathrm{n}}x = 1,$$

heißt Mollifier. Damit werden auch Distributionen durch glatte Funktionen angenähert.

Lemma 1.12. *Sei $f \in C(\Omega)$ und $(\lambda_\epsilon)_{\epsilon>0}$ ein Mollifier. Dann konvergiert die Familie von glatten Funktionen $\lambda_\epsilon * f$ im Grenzwert $\epsilon \downarrow 0$ auf allen kompakten Teilmengen von Ω gleichmäßig gegen f. Wenn f glatt ist gilt dasselbe für alle Ableitungen von f.*

Beweis: Auf kompakten Mengen ist $f \in C(\Omega)$ gleichmäßig stetig. Weil Ω offen ist, ist jedes $x \in \Omega$ in einem Ball $B(x,\epsilon) \subset \Omega$ enthalten. Für hinreichend kleine ϵ hängt der Wert von $\lambda_\epsilon * f$ bei x nur von den Werten von f auf $B(x,\epsilon) \subset \Omega$ ab und ist wohldefiniert. Für solche hinreichend kleine ϵ gilt dann

$$|(\lambda_\epsilon * f)(x) - f(x)| = \left|\int_{B(x,\epsilon)} \lambda_\epsilon(x-y)(f(y)-f(x))\,\mathrm{d}^{\mathrm{n}}y\right| \leq \sup_{y\in B(x,\epsilon)} |f(y)-f(x)|.$$

Daraus folgt auf kompakten Mengen die gleichmäßige Konvergenz $\lim_{\epsilon\downarrow 0}\lambda_\epsilon * f = f$. Aufgrund der Definition der Faltung gilt für zwei glatte Funktionen f und g:

$$\frac{\partial(f*g)}{\partial x_i} = f * \frac{\partial g}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} * g.$$

Deshalb zeigen dieselben Argumente für glatte f, dass auch alle die Faltungen von λ_ϵ mit den partiellen Ableitungen von f auf kompakten Mengen gleichmäßig gegen die entsprechenden partiellen Ableitungen von f konvergieren. **q.e.d.**

Lemma 1.13. *(Fundamentallemma der Variationsrechnung) Für $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ gelte $F_f(\phi) \geq 0$ auf allen nichtnegativen Testfunktionen $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$. Dann ist f fast überall nichtnegativ. Insbesondere ist die Abbildung $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$, mit $f \mapsto F_f$ injektiv.*

Beweis: Weil die Aussage lokal ist, genügt es sie für $f \in L^1(\Omega)$ zu zeigen. Wir setzen f auf $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ gleich Null und können $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ annehmen. Für Mollifier $(\lambda_\epsilon)_{\epsilon>0}$ gilt

$$\begin{aligned}\|\lambda_\epsilon * f - f\|_1 &= \int_{\mathbb{R}^n}\left|\int_{B(0,\epsilon)} \lambda_\epsilon(y) f(x-y)\,\mathrm{d}^n y - f(x)\right| \mathrm{d}^n x \leq \\ &\leq \int_{B(0,\epsilon)}\int_{\mathbb{R}^n} \lambda_\epsilon(y)|f(x-y) - f(x)|\,\mathrm{d}^n x\,\mathrm{d}^n y \leq \sup_{y\in B(0,\epsilon)} \|f(\cdot - y) - f\|_1.\end{aligned}$$

Wenn f die charakteristische Funktion eines endlichen Quaders ist, dann konvergiert das Supremum auf der rechten Seite im Grenzwert $\epsilon \downarrow 0$ gegen Null. Wegen der Dreiecksungleichung konvergiert dieses Supremum auch für Linearkombinationen solcher Funktionen, also für Treppenfunktionen, im Grenzwert $\epsilon \downarrow 0$ gegen Null. Weil die Treppenfunktionen dicht in $L^1(\mathbb{R}^n)$ liegen, wird dieses Supremum auch für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ für hinreichend kleine ϵ beliebig klein. Deshalb konvergiert für alle $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ die Familie $(\lambda_\epsilon * f)_{\epsilon>0}$ für $\epsilon \downarrow 0$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$ gegen f. Dann existiert eine Nullfolge $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so dass $\|f_{n+1} - f_n\|_1 \leq 2^{-n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ für die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n = \lambda_{\epsilon_n} * f$ gilt. Wegen dem Satz von Beppo Levi konvergiert $|f_1| + \sum_{n\in\mathbb{N}} |f_{n+1} - f_n|$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$, und wegen Lebesgues Satz der beschränkten Konvergenz konvergiert dann die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fast überall gegen f. Offenbar ist $(\lambda_\epsilon * f)(x) = F_f(\lambda_\epsilon(x - \cdot)$. Deshalb folgt $(\lambda_\epsilon * f)(x) \geq 0$ aus der Bedingung $F_f(\phi) \geq 0$ für alle nichtnegativen Testfunktionen ϕ. Dann folgt aus dieser Bedingung, dass tatsächlich fast überall $f \geq 0$ gilt. Wenn f also im Kern der Abbildung $f \mapsto F_f$ liegt, muss fast überall $f \geq 0$ und $f \leq 0$ also $f = 0$ gelten. **q.e.d.**

Eine kurze und empfehlenswerte Einleitung in die Theorie der Distributionen ist das erste Kapitel von Lars Hörmander: “Linear Partial Differential Operators”.

1.4 Regularität von Lösungen

Unter der Regularität einer Lösung einer Differentialgleichung versteht man die lokalen Eigenschaften der entsprechenden Funktionen. Wir werden nur solche Lösungen betrachten, die mindestens Distributionen sind. In diesen enthalten sind messbare Funktionen bzw. allgemeiner L^p-Funktionen. Diese enthalten die Funktionen, deren erste oder n-te Ableitungen ebenfalls solche L^p-Funktionen sind. Die Räume solcher Funktionen werden Sobolevräume genannt. In diesen Funktionen sind die glatten Funktionen enthalten. Zuletzt kommen die analytischen Funktionen mit der höchsten Regularität.

1.5 Randwertprobleme

Bei der Untersuchung von Lösungen von partiellen Differentialgleichungen streben wir eine möglichst vollständige Charakterisierung aller Lösungen an. Im Allgemeinen haben partielle Differentialgleichungen unendlich viele Lösungen. Eine Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung ist eindeutig bestimmt durch die Vorgabe der ersten n Ableitungen an einem Punkt. Für partielle Differentialgleichungen streben wir eine analoge Charakterisierung an. Weil die Lösungen auf höherdimensionalen Gebieten definiert sind, liegt es nahe, dass die Vorgabe von Funktionswerten und eventuell einigen Ableitungen auf dem Rand des Gebietes, die Lösung eindeutig festlegt. Solche Vorgaben nennt man Randwertprobleme. In einem zweiten Schritt soll bestimmt werden für welche Randwerte eine Lösung existiert. Mit der Beantwortung beider Fragen sind alle Lösungen eindeutig durch die möglichen Randwerte bzw. Anfangswerte klassifiziert.

Ein Ziel der Vorlesung wird darin bestehen, die Existenz der Lösung des Randwertproblems der Minimalflächengleichung zu zeigen. Anhand dieser nichtlinearen partiellen Differentiagleichung läßt sich die Ausweitung der elliptischen Theorie auf immer größere Klassen von partiellen Differentialgleichungen gut nachvollziehen. Zunächst berechnen wir die Matrix der höchsten vorkommenden Ableitungen:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \frac{\nabla u}{\sqrt{1+(\nabla u)^2}} &= \frac{\triangle u}{\sqrt{1+(\nabla u)^2}} - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial_i u \partial_i \partial_j u \partial_j u}{(1+(\nabla u)^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+(\nabla u)^2}} \left(\triangle u - \frac{\sum_{i,j=1}^{n} \partial_i u \partial_j u \partial_i \partial_j u}{1+(\nabla u)^2} \right) = 0.\end{aligned}$$

Also ist die $n \times n$-Matrix der zweiten Ableitungen $A = (1+|a|^2)^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{1} - (1+|a|^2)^{-1} a \cdot a^T)$ mit dem Spaltenvektor $a = \nabla u$. Bis auf den globalen positiven Faktor $(1+|a|^2)^{-\frac{1}{2}}$ ist diese Matrix auf dem orthogonalen Komplement von a gleich $\mathbb{1}$ und a ist ein Eigenvektor mit Eigenwert $\frac{1}{1+|a|^2}$. Also ist A tatsächlich positiv definit.