Partielle Differentialgleichungen

Martin Schmidt
Volker Eing

5. Übung

11. März 2019

(abzugeben bis **18.3.19** um **16:00 Uhr** in den PDE-Briefkasten)

15. Ein Detail aus dem Beweis des Schwachen Maximumsprinzips.

Sei H eine reelle $n \times n$-Matrix mit

$$H = H^t \quad \text{und} \quad x^t H x \leq 0 \ \forall x.$$

Wir wollen zeigen, dass es dann eine Matrix D gibt, so dass $H = -D \cdot D^t$ gilt.

(a) *Zeige:* Jede reelle, symmetrische $n \times n$-Matrix H besitzt einen reellen Eigenwert λ. Betrachte hierzu die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^t H x$$

eingeschränkt auf die Sphähre $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ und zeige, dass f dort ein Maximum annimmt. Zeige, dass für $v \in \mathbb{R}^n$ mit $f(v) = \max_{x \in \mathbb{S}^{n-1}} f(x)$ gilt: $Hv = \lambda v$.
(6 Punkte)

(b) *Zeige,* dass für das orthogonale Komplement $W := \langle v \rangle^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n | \langle v, x \rangle = 0\}$ von v $H_{|W} \subset W$ gilt und beweise mithilfe von (a), dass es eine Matrix O und reelle Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ gibt, mit

$$H = O \cdot \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \cdot O^t.$$

(6 Punkte)

(c) *Zeige* mithilfe von (b), dass eine Matrix D existiert, so dass $H = -D \cdot D^t$ gilt. *(4 Punkte)*

(d) *Zeige*, dass der Differentialoperator L 2ter Ordnung mit

$$(Lu)(x) = \operatorname{div}(A \nabla u(x)),\ a_{ij} \equiv \text{const.}$$

auf $\mathbb{R}^n$ genau dann elliptisch ist, wenn eine invertierbare lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ existiert, so dass $L(u \circ \varphi) = (\triangle u) \circ \varphi$ gilt. *(4 Punkte)*

16. Differentialoperatoren in Divergenz- und Nicht-Divergenzform.

Seien $a_{ij}, \widetilde{a}_{ij}, b_i, \widetilde{b}_i$ und $c, \widetilde{c}$ differenzierbare Funktionen auf einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Ein Differentialoperator $L : C^2(\Omega) \to C(\Omega)$ 2ter Ordnung ist in Divergenzform gegeben, wenn sich L wie folgt schreiben lässt:

$$(Lu)(x) = \sum_{i=1}^n \partial_i \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}(x) \partial_j u(x) + b_i(x) u(x) \right) + c(x) u(x)$$

Ein Differentialoperator $\widetilde{L} : C^2(\Omega) \to C(\Omega)$ 2ter Ordnung ist in Nicht-Divergenzform gegeben, wenn sich $\widetilde{L}$ wie folgt schreiben lässt:

$$(\widetilde{L} u)(x) = \sum_{i,j=1}^n \widetilde{a}_{ij}(x) \partial_i \partial_j u(x) + \sum_{i=1}^n \widetilde{b}_i(x) \partial_i u(x) + \widetilde{c}(x) u(x)$$

Zeigen Sie, dass sich jeder Differentialoperator L 2ter Ordnung in Divergenzform auch in Nicht-Divergenzform und umgekehrt jeder Differentialoperator $\widetilde{L}$ 2ter Ordnung in Nicht-Divergenzform auch in Divergenzform schreiben lässt. *(8 Punkte)*

Bitte wenden.

17. Über das Transformationsverhalten von Differentialoperatoren zweiter Ordnung.

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und L ein Differentialoperator zweiter Ordnung auf Ω in Nicht-Divergenzform, d.h. es gibt stetige Funktionen a_{ij}, b_i, c in Ω, so dass L die Form

$$(Lu)(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\partial_i\partial_j u(x) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\partial_i u(x) + c(x)u(x) \quad \text{für } u \in C^2(\Omega), x \in \Omega \qquad (*)$$

hat.

Außerdem sei $\widetilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ eine weitere offene Teilmenge und $\varphi : \Omega \to \widetilde{\Omega}$ ein C^2-Diffeomorphismus, d.h. φ ist bijektiv, zweimal stetig differenzierbar, und $\varphi^{-1} : \widetilde{\Omega} \to \Omega$ ist ebenfalls zweimal stetig differenzierbar.

(a) Man zeige, dass durch $\widetilde{L}(\widetilde{u}) := L(\widetilde{u} \circ \varphi) \circ \varphi^{-1}$, d.h.

$$\widetilde{L}(\widetilde{u}) \circ \varphi = L(\widetilde{u} \circ \varphi)$$

für $\widetilde{u} \in C^2(\widetilde{\Omega})$ ein Differentialoperator zweiter Ordnung $\widetilde{L}$ auf $\widetilde{\Omega}$ definiert wird, d.h. dass es stetige Funktionen $\widetilde{a}_{k\ell}$, $\widetilde{b}_k, \widetilde{c}$ in $\widetilde{\Omega}$ mit

$$\widetilde{L}\widetilde{u} = \sum_{k,\ell=1}^{n} \widetilde{a}_{k\ell}\, \partial_k \partial_\ell \widetilde{u} + \sum_{k=1}^{n} \widetilde{b}_k\, \partial_k \widetilde{u} + \widetilde{c}\, \widetilde{u}$$

gibt. *(6 Punkte)*

(b) Es seien nun darüberhinaus Ω und $\widetilde{\Omega}$ beschränkt, und wir setzen voraus, dass φ, φ^{-1} sowie alle Ableitungen dieser beiden Funktionen sich stetig auf den Abschluß $\overline{\Omega}$ bzw. $\overline{\widetilde{\Omega}}$ fortsetzen lassen. Zeigen Sie, dass unter dieser Voraussetzung $\widetilde{L}$ genau dann elliptisch ist, wenn L elliptisch ist. *(6 Punkte)*

[Hinweis: Aus Symmetriegründen genügt es, nur eine Richtung zu zeigen.]

[Tipp. Man werte $(\widetilde{L}\widetilde{u})(\widetilde{x}) = \big(L(\widetilde{u} \circ \varphi)\big)(\varphi^{-1}(\widetilde{x}))$ für $\widetilde{u} \in C^2(\widetilde{\Omega})$ und $\widetilde{x} \in \widetilde{\Omega}$ mit Hilfe der Kettenregel aus.]

18. Hölder-stetige Funktionen.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen.
Diese Aufgabe zeigt, weshalb man keine Hölder-Räume $C^{0,\gamma}(\Omega)$ für $\gamma > 1$ betrachtet. Sei $\gamma > 1$ und $u \in C^{0,\gamma}(\Omega)$. *Zeige*:

(a) u ist differenzierbar und es gilt $\nabla u \equiv 0$. *(5 Punkte)*

(b) Ist Ω zusammenhängend, so gilt $u \equiv \text{const}$. *(5 Punkte)*