

22. Über den Dualraum von $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Sei $1 \leq p \leq \infty$. Der Banachraum $L^p(\mathbb{R}^n)$ ist mit der Norm

$$\|\cdot\| : L^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \mapsto \|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p d\mu \right)^{1/p}$$

ausgestattet. Wir wollen zeigen, dass für q mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ die Abbildung

$$j : L^q(\mathbb{R}^n) \rightarrow (L^p(\mathbb{R}^n))' = \mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}^n), \mathbb{R}), \quad g \mapsto j(g) \text{ mit } j(g)(f) = \int_{\mathbb{R}^n} fg d\mu$$

eine lineare Isometrie ist, d.h. es gilt $\|g\|_q = \|j(g)\|$. Man kann damit zeigen, dass für $1 \leq p < \infty$ der Dualraum von $L^p(\mathbb{R}^n)$ isometrisch isomorph zu $L^q(\mathbb{R}^n)$ ist.

- (a) Zeige mithilfe der Hölderschen Ungleichung, dass $j : L^q(\mathbb{R}^n) \rightarrow (L^p(\mathbb{R}^n))'$ Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante $L = 1$ ist. (3 Punkte)
- (b) Gib für gegebenes g eine Funktion f an, so dass $\|fg\|_1 = \|f\|_p \cdot \|g\|_q$ gilt. (4 Punkte)
- (c) Zeige mithilfe von (b), dass auch $\|g\|_q \leq \|j(g)\|$ für alle $g \in L^q(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$ gilt und folgere daraus, dass j eine Isometrie ist. (6 Punkte)

23. Über den Satz von Lax-Milgram.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und sei $L : C_0^2(\Omega) \rightarrow C_0(\Omega)$ der elliptische Operator in Divergenzform, der durch

$$(Lu)(x) = -\operatorname{div}(A(x)\nabla u(x)) + c(x)u(x)$$

gegeben ist. Sei $K > 0$ und $c(x) \geq K \quad \forall x \in \Omega$. Zeige, dass L die Ungleichung

$$\langle Lu, u \rangle_{L^2(\Omega)} \geq C \cdot \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)}^2 \quad (\text{für eine Konstante } C > 0)$$

erfüllt.

(10 Punkte)

Bitte wenden.

24. Über Sobolevräume.

(a) Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die Funktion

$$x \mapsto \begin{cases} 1+x & \text{für } -1 \leq x \leq 0 \\ 1-x & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- (i) Bestimme die erste Ableitung der Distribution $F : C_0^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, $\phi \mapsto F(\phi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\phi(x)dx$. (4 Punkte)
- (ii) Zeige, dass die zweite Ableitung der Distribution $F(\phi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\phi(x)dx$ eine Linearkombination von Dirac-Distributionen ist. (4 Punkte)
- (iii) Zeige: $f \in W^{1,1}(\mathbb{R})$, aber $f \notin W^{2,1}(\mathbb{R})$. (4 Punkte)
- (b) Sei $\Omega = \mathbb{R}^n$ und $u \in W_{\text{loc}}^{2,1}(\mathbb{R}^n)$ so, dass $\partial^\alpha u = 0$ für alle α mit $|\alpha| = 2$ im schwachen Sinne gilt. Zeige, dass u affin ist, d.h. $u(x) = a \cdot x + b$ f.ü. mit $a \in \mathbb{R}^n$ und $b \in \mathbb{R}$. (5 Punkte)
- [Tipp. Bezeichne mit e_i den i -ten Einheitsvektor. Zeige, dass $u_{e_i} \in W_{\text{loc}}^{1,1}(\mathbb{R}^n)$ sowie $\nabla u_{e_i} = 0$ f.ü. für alle i gilt und benutze Proposition 3.22. Mit einem ähnlichen Argument folgt dann die Behauptung.]

25. Über den Sobolev'schen Einbettungssatz.

Zeige, dass $W^{1,1}((0,1)) \hookrightarrow C([0,1])$ eine stetige Einbettung ist. (10 Punkte)

[Tipp. Man zeige, dass $\|u\|_\infty \leq \|u\|_1 + \|u_1\|_1$ gilt. Hierfür betrachte man für $(u, u_1) \in W^{1,1}((0,1))$ die Funktion $U := \int_{x_0}^x u_1(t) dt$ und zeige: $U \in W^{1,1}((0,1)) \cap C([0,1])$ und $U - u \equiv \text{const}$. Damit folgere man, dass $|u|$ ein Minimum bei einem $x_0 \in [0,1]$ annimmt. Außerdem zeige man $|u(x) - u(x_0)| \leq \|u_1\|_1$ um anschließend mit der Dreiecksungleichung eine Abschätzung für $\|u\|_\infty$ zu erhalten.]