Partielle Differentialgleichungen

Martin Schmidt
Volker Eing

11. Übung

6. Mai 2019

(abzugeben bis **13.5.19** um **16:00 Uhr** in den PDE-Briefkasten)

35. Eine Differentialgleichung mit vielen schwachen Lösungen.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen, und L der (nicht-elliptische) Differentialoperator auf Ω, definiert durch

$$Lu := \partial_1(\partial_2 u) - \partial_2(\partial_1 u)\ .$$

Zeige, dass für jedes $u \in W^{1,2}(\Omega)$ im schwachen Sinne $Lu = 0$ gilt. *(7 Punkte)*

36. Divergenz und Rotation.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann heißt ein Vektorfeld $f = (f_1, \dots, f_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ mit $f_k \in L^2(\Omega)$, $k \in \{1, \dots, n\}$, eine schwache Lösung der Differentialgleichung $\nabla \cdot f = 0$, falls

$$\int_\Omega (f \cdot \nabla\phi)\, d\mu = 0 \quad \text{für alle} \quad \phi \in W_0^{1,2}(\Omega)$$

gilt.

Sei nun $n = 3$. Dann ist die *Rotation* eines Vektorfeldes $u = (u_1, u_2, u_3) : \Omega \to \mathbb{R}^3$ mit $u_k \in W^{1,2}(\Omega)$, $k \in \{1, 2, 3\}$, durch

$$\nabla \times u := (\partial_2 u_3 - \partial_3 u_2,\ \partial_3 u_1 - \partial_1 u_3,\ \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1)$$

definiert.

Zeige, dass die Rotation $f := \nabla \times u$ von u eine schwache Lösung der Differentialgleichung $\nabla \cdot f = 0$ ist. *(8 Punkte)*

37. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} \partial_j(a_{ij}\partial_i u) + \sum_{i=1}^{n} b_i \partial_i u + cu$$

ein elliptischer Operator mit Elliptizitätskonstante Λ und beschränkten, messbaren Koeffizientenfunktionen a_{ij}, b_i, c, die durch Λ beschränkt sind, vgl. Def. 4.1. Weiter sei a, definiert durch

$$a(u, v) := \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\partial_i u \partial_j v + \sum_{i=1}^{n} b_i(\partial_i u)v + cuv \right) dx,$$

die assoziierte Bilinearform auf $W_0^{1,2}(\Omega)$. Zeige, dass es Konstanten $\beta > 0$ und $\gamma \geq 0$ gibt, die nur von Λ abhängen, so dass

$$\beta \|u\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega)} \leq a(u, u) + \gamma \|u\|^2_{L^2(\Omega)}$$

für alle $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ gilt. *(8 Punkte)*

[Tipp: Die Young'sche Ungleichung $xy \leq \frac{1}{2}(\frac{1}{\epsilon}x^2 + \epsilon y^2)$ für alle $x, y \geq 0$ und alle $\epsilon > 0$ mag hilfreich sein.]

Bitte wenden.

38. Über den Satz von Friedrichs im Inneren.

Wir betrachten die offenen, reellen Intervalle $I := (-2,2)$ und $J := (-1,1)$. Es sei $a \in L^\infty(I) \setminus W^{1,2}(J)$ mit $a \geq 1$, und

$$u : I \to \mathbb{R},\ t \mapsto u(t) := \int_0^t \frac{1}{a(x)}\,\mathrm{d}x\ .$$

(a) Zeige $u \in W^{1,2}(I)$ und $u \notin W^{2,2}(J)$. *(6 Punkte)*

(b) Zeige, dass u eine schwache Lösung der Differentialgleichung

$$(au')' = 0 \quad \text{auf } I$$

ist. *(4 Punkte)*

(c) Warum steht das Ergebnis von (a), (b) nicht im Widerspruch zum Satz von Friedrichs im Inneren? *(2 Punkte)*

39. Über die Cacciopoli-Ungleichung am Rand.

Man *beweise* die Cacciopoli-Ungleichung am Rand 4.7, indem man den Beweis aus dem Skript durch Adaptierung des Beweises der Cacciopoli-Ungleichung 4.5 zu Ende führt. *(10 Punkte)*