Partielle Differentialgleichungen

Martin Schmidt
Volker Eing

10. Übung

29. April 2019

(abzugeben bis **6.5.19** um **16 Uhr** in den PDE-Briefkasten)

33. Über schwache Lösungen elliptischer Differentialgleichungen.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u \in W^{1,2}(\Omega)$.

(a) Sei $f \in W_0^{1,2}(\Omega)^*$, L ein elliptischer Differentialoperator gemäß Definition 4.1 mit

$$Lu \geq f \quad \text{und} \quad Lu \leq f. \tag{$*$}$$

Zeige: Dann gilt für alle $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$: $\mathcal{L}(u,v) = -\langle f, v\rangle$. *(5 Punkte)*

(b) **(i)** *Zeige*: Lu definiert folgende Distribution:

$$C_0^\infty(\Omega) \ni \phi \mapsto -\mathcal{L}(u,\phi).$$

(5 Punkte)

(ii) *Zeige*: Gilt $(*)$, so folgt $Lu = f$ im Sinne von Distributionen. *(5 Punkte)*

(c) Sei nun $u \in W^{1,2}_{\text{loc}}(\Omega)$, $f \in L^2_{\text{loc}}(\Omega)$, so dass $\triangle u \geq f$ und $\triangle u \leq f$ im schwachen Sinne gilt. *Zeige*, dass für $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ im Sinne von Distributionen

$$\triangle(\phi u) = (\triangle\phi)u + 2\nabla\phi \cdot \nabla u + f\phi$$

gilt. *(6 Punkte)*

34. Schwache Lösungen der Poisson-Gleichung.

Im folgenden betrachten wir ein Beispiel für Funktionen $u, f \in C_0(\Omega)$, so dass $\triangle u = f$ im schwachen Sinne, aber $u \notin C^2(\Omega)$. Sei $B(0,\frac{1}{2}) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < \frac{1}{4}\}$ und $u(x,y) := (x^2 - y^2)\log|\log(r)|$ mit $r = (x^2+y^2)^{1/2}$.

(a) *Zeige*: $u \in C^2(B(0,\frac{1}{2})\backslash\{0\})$ und $\lim\limits_{r\to 0} u(x,y) = 0$, d.h. u lässt sich stetig auf $B(0,\frac{1}{2})$ fortsetzen. *(5 Punkte)*

(b) *Zeige*, dass auf $B(0,\frac{1}{2})\backslash\{0\}$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}u(x,y) &= 2x\log|\log(r)| + (x^3 - y^2x)\frac{1}{r^2\log(r)},\\
\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,y) &= 2\log|\log(r)| + (5x^2-y^2)\frac{1}{r^2\log(r)} - (x^4 - x^2y^2)\frac{2\log(r)+1}{r^4(\log(r))^2}
\end{aligned}$$

gilt. *(6 Punkte)*

(c) *Zeige*: $\frac{\partial^2}{\partial y^2}u(x,y) = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(y,x)$ und damit

$$\triangle u = (x^2-y^2)\left(\frac{4}{r^2\log(r)} - \frac{1}{r^2(\log(r))^2}\right).$$

Folgere daraus $\lim\limits_{r\to 0}\triangle u(x,y) = 0$. *(6 Punkte)*

(d) Sei $g \in C(B(0, \frac{1}{2}))$ die stetige Fortsetzung von $\triangle u$ auf $B(0, \frac{1}{2})$. *Zeige*, dass $\triangle u = g$ schwach in $B(0, \frac{1}{2})$. Hierfür zeige man für $\phi \in C_0^\infty(B(0, \frac{1}{2}))$ die Formel

$$\int_{B(0,\frac{1}{2})\setminus B(0,\varepsilon)} u \triangle \phi \, \mathrm{d}\mu = \int_{B(0,\frac{1}{2})\setminus B(0,\varepsilon)} g\phi \, \mathrm{d}\mu + \int_{\partial B(0,\varepsilon)} (u\nabla\phi - \phi\nabla u) \cdot N \, \mathrm{d}\sigma.$$

(6 Punkte)

(e) Sei $\psi \in C_0^\infty(B(0, \frac{1}{2}))$ mit $\psi(x, y) = 1$ in einer Umgebung von 0 und sei

$$f := \psi g + 2\nabla\psi \cdot \nabla u + (\triangle\psi)u \in C(B(0, \tfrac{1}{2})).$$

Zeige mithilfe von Aufg. 33(c), dass $\triangle(\psi u) = f$ im schwachen Sinne gilt. *(6 Punkte)*