**4. Ableitung der Inversenbildung.**

Sei $a < b$ und $A : (a, b) \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ eine differenzierbare Abbildung des reellen Intervalls $(a, b)$ in den Raum der stetigen, linearen Abbildungen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Für jedes $t \in (a, b)$ sei $A(t)$ in $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ invertierbar. Zeige, dass dann auch die Abbildung

$$A^{-1} : (a, b) \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n),\ t \mapsto (A(t))^{-1}$$

differenzierbar ist, und dass

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A^{-1}(t) = -A^{-1}(t) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A(t) \cdot A^{-1}(t)$$

gilt. *(6 Punkte)*

**5. Über Distributionen.**

**(a)** Zeigen Sie, dass

$$F : C_0^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ \phi \mapsto \int_{\mathbb{R}} x^3 \cdot \phi''(x)\mathrm{d}x$$

eine Distribution auf $\mathbb{R}$ ist, und bestimmen Sie eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$F(\phi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot \phi(x)\mathrm{d}x \quad \text{für alle } \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}).$$

*(4 Punkte)*

**(b)** Zeigen Sie, dass die Dirac-Distribution

$$\delta : C_0^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ \phi \mapsto \phi(0)$$

in der Tat eine Distribution auf $\mathbb{R}$ ist und beweisen Sie, dass es *keine* stetige Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\delta(\phi) = \int_{\mathbb{R}} g(x) \cdot \phi(x)\mathrm{d}x \quad \text{für alle } \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$$

gibt. *(2+4 Punkte)*

**(c)** Bestimmen Sie die Ableitung $F'$ bzw. $\delta'$ der beiden Distributionen aus (a) und (b). *(2+2 Punkte)*

**6. Über die Faltung.**

**(a)** Zeigen Sie, dass die Faltung von $C_0^\infty$-Funktionen auf dem $\mathbb{R}^n$ eine bilineare, kommutative und assoziative Verknüpfung ist. *(2+3+4 Punkte)*

**(b)** Zeigen Sie, dass bei der Faltung von Funktionen mit *Distributionen* mit nicht-kompaktem Träger (auf $\mathbb{R}$) die Faltung selbst in den Fällen, in denen sie wohldefiniert ist, nicht assoziativ zu sein braucht. [Tipp: Wir bezeichnen mit 1 die Einsfunktion auf $\mathbb{R}$, mit $\delta'$ die Ableitung der Dirac-Distribution (siehe Aufgabe 5(c)) und mit $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die sog. *Heaviside-Funktion*, d.h. $H(x) := 1$ für $x \geq 0$ und $H(x) := 0$ für $x < 0$. Dann berechne man $1 * (\delta' * H)$ und $(1 * \delta') * H$.] *(7 Punkte)*