Partielle Differentialgleichungen

Martin Schmidt
Volker Eing

12. Übung

14. Mai 2019

(abzugeben bis **21.5.19** um **12:00 Uhr** in den PDE-Briefkasten)

40. Über die endliche Differenz.

Sei $u \in W^{1,2}(B(0,1))$ eine schwache Lösung von

$$L_0 u := \sum_{i,j=1}^{n} \partial_i(a_{ij}\partial_j u) = f \text{ in } B(0,1)$$

mit $a_{ij} \in L^\infty(B(0,1))$ und $f \in L^2(B(0,1))$. *Zeige*, dass die endliche Differenz

$$\partial_l^h u(x) := \frac{u(x+he_l) - u(x)}{h} \quad \text{für } x \in B(0, 1-|h|)$$

eine schwache Lösung von

$$L_0 \partial_l^h u(x) = \partial_l^h f(x) - \sum_{i,j=1}^{n} \partial_i(\partial_l^h a_{ij}\partial_j u(x+he_l)),\ x \in B(0, 1-|h|)$$

ist. *(10 Punkte)*

41. Eine Interpolationsungleichung.

Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum, der $C^1(B(0,2))$ enthält, d.h. es existiert eine stetige, injektive Abbildung $I : C^1(B(0,2)) \hookrightarrow X$. *Zeige*, dass ein $C(n) < \infty$ existiert, so dass

$$\|u\|_{C^2(B(0,2))} \le C(n)\left(\|D^2 u\|_{L^\infty(B(0,2))} + \|I(u)\|_X\right)$$

gilt. *(10 Punkte)*

[Tipp. Zeige, dass die Einbettungen $C^2(B(0,2)) \to C^1(B(0,2)) \hookrightarrow X$ die Voraussetzungen des Lemmas von Ehrling 3.3 erfüllen, d.h. zeige, dass die Abbildung $T : C^2(B(0,2)) \to C^1(B(0,2))$ kompakt ist und schreibe $\|u\|_{C^2(B(0,2))} = \|D^2 u\|_{L^\infty(B(0,2))} + \|u\|_{C^1(B(0,2))}$.]

42. Äquivalente Normen.

Sei $U \subset C^2(B(0,2))$ der Unterraum, der durch $U := \{u \in C^2(B(0,2)) \mid u(0) = 0, \nabla u(0) = 0\}$ gegeben ist. *Zeige*, dass auf U die Norm $\|D^2 u\|_{L^\infty(B(0,2))}$ äquivalent zu der Norm $\|u\|_{C^2(B(0,2))}$ ist. *(10 Punkte)*

[Tipp. Es gilt $u(x) - u(0) = \int_0^1 \nabla u(t \cdot x) \cdot x \, \mathrm{d}t$.]

43. Über die innere Schauderabschätzung.

An welcher Stelle und wie muss der Beweis der inneren Schauderabschätzung 4.11 angepasst werden, um für $u \in C^{2,\alpha}(B(0,2))$ die Abschätzung

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(B(0,1))} \le C(\Lambda, n, \alpha)\left(\|Lu\|_{C^{0,\alpha}(B(0,2))} + \|u\|_{L^1(B(0,2))}\right)$$

zu erhalten? *(10 Punkte)*