Partielle Differentialgleichungen

Martin Schmidt
Volker Eing

6. Übung

18. März 2019

(abzugeben bis **25.3.19** um **16:00 Uhr** in den PDE-Briefkasten)

19. Über den Raum der Hölder-stetigen Funktionen, Part 2.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$.

(a) Gib für $0 < \alpha < \beta \leq 1$ eine Funktion u an, für die gilt: $u \in C^{0,\alpha}(\Omega)$, aber $u \notin C^{0,\beta}(\Omega)$. *(3 Punkte)*

(b) Diese Teilaufgabe zeigt, weshalb man $C^{0,\alpha}(\Omega)$ nur für offene Teilmengen Ω betrachtet. Sei $0 < \alpha \leq 1$ und $u \in C^{0,\alpha}(\Omega)$. *Zeige*:

(i) u ist gleichmäßig stetig. *(4 Punkte)*

(ii) Es gibt eine eindeutige Funktion $\widetilde{u} \in C^{0,\alpha}_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ mit $\widetilde{u}|_\Omega = u$. *(4 Punkte)*

(iii) Es gilt:

$$\sup_{x \neq y \in \overline{\Omega}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha} \leq \sup_{x \neq y \in \Omega} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha}$$

(4 Punkte)

20. Über kompakte Operatoren.

Seien X, Y Banachräume. Eine lineare, stetige Abbildung $T : X \to Y$ heißt kompakt, wenn für jede beschränkte Folge $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ in X eine Teilfolge $(x_{m_l})_{l \in \mathbb{N}}$ existiert, für die $(Tx_{m_l})_{l \in \mathbb{N}}$ konvergiert.

(a) *Zeige*, dass eine lineare, stetige Abbildung $T : X \to Y$ genau dann kompakt ist, wenn das Bild der offenen Einheitskugel $B(0,1) = \{x \in X \mid \|x\| < 1\}$ von X unter T relativ-kompakt ist, d.h. $\overline{T[B(0,1)]}$ ist kompakt. *(5 Punkte)*

(b) Sei X ein Banachraum und $\mathbb{1}_X : X \to X$ die identische Abbildung. *Zeige*: Ist X unendlich-dimensional, so ist $\mathbb{1}_X$ nicht kompakt. *(10 Punkte)*
[Tipp: Man überdecke $\overline{B(0,1)}$ mit endlich vielen offenen Kugeln mit Radius $\frac{1}{2}$, etwa $\overline{B(0,1)} \subset \bigcup_{i=1}^n B(a_i, \frac{1}{2})$. Sei V der durch $a_1, \ldots, a_n$ erzeugte endlich-dimensionale Unterraum von X. Man konstruiere zu $x \in X$ rekursiv eine Folge $(x_k)_k \subseteq V$ und zeige, dass diese Folge gegen x konvergiert. Hieraus folgere man $X = V$. Generell darf verwendet werden, dass auf endlich-dimensionalen normierten $\mathbb{K}$-Vektorräumen (mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) alle Normen äquivalent sind (dies ist letztlich eine Folgerung daraus, dass solche Räume isomorph zu $\mathbb{K}^n$ sind und in $\mathbb{K}^n$ alle Normen äquivalent sind).]

21. Ein Detail aus dem Beweis vom Schauder'schen Fixpunktsatz.

Seien K und $\tilde{K}$ beschränkte, abgeschlossene, konvexe Teilmengen vom $\mathbb{R}^n$, deren Inneres nichtleer sind. Zeige, dass K und $\tilde{K}$ homöomorph sind. *(10 Punkte)*