Martin Schmidt
Volker Eing

Partielle Differentialgleichungen
8. Übung

1. April 2019

(abzugeben bis **8.4.19** um **16:00 Uhr** in den PDE-Briefkasten)

26. Der Divergenzsatz für Lipschitz-stetige Vektorfelder.

Sei $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit Rand $\partial\Omega \in C^{0,1}$. Wir wollen zeigen, dass für $f = (f_1, \ldots, f_n) \in (C^{0,1}(\Omega))^n$ ebenso der Divergenzsatz erfüllt ist, d.h. es gilt

$$\int_\Omega \nabla \cdot f \,\mathrm{d}\mu = \int_{\partial\Omega} f \cdot N \,\mathrm{d}\sigma. \tag{$*$}$$

Hierbei ist die rechte Seite wie in Definition 1.7 definiert. Konkret heisst das: Wir wählen eine endliche offene Überdeckung durch Kartengebiete $\{V_l\}_{l=1}^N$ und entsprechende Diffeomorphismen $\Phi_l : U_l \to V_l$, mit offenen Teilmengen $U_l \subset \mathbb{R}^{n-1}$, sowie eine entsprechende Teilung der Eins $(h_l)_{l=1}^N$, sodass gilt

$$\int_{\partial\Omega} f \cdot N \mathrm{d}\sigma = \sum_{l=1}^N \int_{U_l} h_l (f \cdot N) \circ \Phi_l \sqrt{\det(\Phi_l')^t \Phi_l'} \mathrm{d}\mu. \tag{$**$}$$

(a) *Zeige*: $\partial\Omega$ ist genau dann stetig differenzierbar ist, wenn bis auf Permutation der Koordinaten, Φ_l von der Form $\Phi_l(y) = (y, \varphi_l(y))$, mit $\varphi_l \in C^1(U_l, \mathbb{R})$ ist. *(4 Punkte)*

(b) *Zeige*: Ist $\partial\Omega$ stetig differenzierbar und haben die Φ_l die Form wie in (a), so stimmt $(**)$ mit

$$\int_{\partial\Omega} f \cdot N \,\mathrm{d}\sigma = \sum_{l=1}^N \int_{U_l} h_l f(y, \varphi_l(y)) \cdot (\nabla_y \varphi_l(y), -1) \,\mathrm{d}^{n-1}y \tag{$***$}$$

überein. *(4 Punkte)*

(c) Sei $A \in O(n, \mathbb{R})$ eine Orthogonalmatrix und f glatt.

Zeige: Für $f_A = A \cdot f \circ A^{-1}$ erfüllt der Normalenvektor N_A auf dem transformierten Gebiet $\Omega_A = A[\Omega]$ die Gleichung $N_A(x) = A \cdot N(A^{-1}x)$ und es gilt der Divergenzsatz $(*)$ für (f_A, Ω_A) genau dann, wenn er für (f, Ω) gilt. *(5 Punkte)*

(d) Sei $\varphi \in C^{0,1}(B^{n-1}(0,\rho))$ mit $\|\varphi\|_\infty < M$ und $f \in \left(W_0^{1,\infty}(B^{n-1}(0,\rho) \times (-M, M))\right)^n$. Dann gilt

$$\int_{B^{n-1}(0,\rho)} \int_{\varphi(y)}^M \nabla \cdot f(y,t) \,\mathrm{d}^{n-1}y \, dt = \int_{B^{n-1}(0,\rho)} f(y, \varphi(y)) \cdot (\nabla_y \varphi, -1) \,\mathrm{d}^{n-1}y.$$

[Tipp: Approximationssatz 3.33] *(5 Punkte)*

(e) *Zeige*, dass für $f = (f_1, \ldots, f_n) \in (C^{0,1}(\Omega))^n$ der Divergenzsatz $(*)$ gilt. *(6 Punkte)*

[Tipp: Zeige zuerst, dass die Aussage in (c) auch für $f \in (C^{0,1}(\Omega))^n$ und $\partial\Omega \in C^{0,1}$ gilt. Danach benutze man (d)]

27. Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, $v \in W^{1,2}(\Omega)$. *Zeige*, dass

$$\int_\Omega u_{e_i} v_{e_j} \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega u_{e_j} v_{e_i} \,\mathrm{d}\mu$$

gilt. *(8 Punkte)*

[Tipp. Approximiere u durch Funktionen aus $C_0^\infty(\Omega)$.]

28. Weiteres über Soboleväume.

Sei $n \geq 3$ und $\Omega = B(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < 1\}$ sowie $u \in C^1(\Omega \backslash \{0\})$ derart, dass

$$\int_{\Omega \backslash \{0\}} |u(x)|^2 \, \mathrm{d}\mu < \infty \quad \text{und} \quad \int_{\Omega \backslash \{0\}} |\nabla u(x)|^2 \, \mathrm{d}\mu < \infty$$

gilt. *Zeige*, dass $u \in W^{1,2}(\Omega)$ und $u_{e_j}(x) = \partial_j u(x)$ für $x \neq 0$ gilt. *(10 Punkte)*

[Tipp. Sei $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$. Zeige, dass es eine Folge $\phi_n \in C_0^\infty(\Omega \backslash \{0\})$ gibt, so dass $\phi_n \to \phi$ in $W^{1,2}(\Omega)$. Hierzu wähle man $\phi_n(x) := \psi(n|x|) \cdot \phi(x)$ mit $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit $\psi(r) = 1$ für $r \geq 1$ und $\psi(r) = 0$ für $r \leq \frac{1}{2}$.]

29. Eine Ungleichung für Funktionen aus $W_0^{2,2}(\Omega)$.

Sei $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt sowie $u \in W_0^{2,2}(\Omega)$. *Zeige* die folgende Ungleichung:

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \cdot \|\triangle u\|_{L^2(\Omega)}^{1/2}.$$

(8 Punkte)

[Tipp. Betrachte $u \in C_0^\infty(\Omega)$ und integriere $\int_\Omega |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}\mu$ partiell.]