Partielle Differentialgleichungen

Martin Schmidt

Volker Eing

9. Übung

09. April 2019

(abzugeben bis **30.4.19** um **11 Uhr** in den PDE-Briefkasten)

30. Rechnen mit Sobolevfunktionen.

(a) Sei $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1\}$ und $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$ derart, dass $\eta(x) = 1$ für $|x| \leq \frac{1}{2}$. Sei $u(x) = \left(\log \frac{1}{|x|}\right)^{1/4} \cdot \eta(x)$. *Zeige*, dass $u \in W^{1,2}(\Omega)$. *(6 Punkte)*

(b) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u, v \in W^{1,2}(\Omega)$.

(i) *Zeige*, dass für $w(x) := \min\{u(x), v(x)\}$ auch $w \in W^{1,2}(\Omega)$ liegt und *bestimme* die schwache Ableitung von w. *(6 Punkte)*

(ii) *Zeige* mit (i), dass für $r(x) = \max\{u(x), v(x)\}$ auch $r \in W^{1,2}(\Omega)$ liegt. *(4 Punkte)*

(c) Sei $\mathbb{1}_\Omega : \Omega \to \{0, 1\}$ die Indikatorfunktion einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. *Zeige*: Ist $u \in W^{1,2}(\Omega)$, so ist auch $w := \min\{u, \mathbb{1}_\Omega\} \in W^{1,2}(\Omega)$. *Bestimme* außerdem die Ableitung von w. *(6 Punkte)*

(d) $L^\infty(\Omega) \cap W^{1,2}(\Omega)$ liegt dicht in $W^{1,2}(\Omega)$. *(4 Punkte)*

[Tipp. Für $u \in W^{1,2}(\Omega)$ betrachte man die Folge $u_n := \max\{-n \cdot \mathbb{1}_\Omega, \min\{u, n \cdot \mathbb{1}_\Omega\}\}$ und zeige $\lim\limits_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{W^{1,2}(\Omega)} = 0$.]

31. Unstetige Funktionen im Sobolevraum $W^{1,p}(\Omega)$.

Sei $1 \leq p < \infty$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. *Zeige*: Ist $p < n$, so enthält $W^{1,p}(\Omega)$ unstetige Funktionen. *(4 Punkte)*

32. Ein anderer Zugang zu Sobolevungleichungen.

Sobolevungleichungen setzen die "Größe" von ∇u mit der von u in Beziehung. Deshalb wollen wir u durch seinen Gradienten ausdrücken.

(a) Sei $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ und seien $(r, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}^{n-1}$ Polarkoordinaten in $\mathbb{R}^n$. *Zeige*:

$$u(x) = -\frac{1}{n\omega_n} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_0^\infty \partial_r u(x + r\theta)\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\theta.$$

(5 Punkte)

[Tipp. Es gilt $u(x) = -\int_0^\infty \partial_r u(x + r\theta)\, \mathrm{d}r$.]

(b) Sei $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. *Zeige*

$$u(x) = \frac{1}{n\omega_n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\langle x - y, \nabla u(y)\rangle}{|y - x|^n}\, \mathrm{d}y$$

und folgere daraus die Ungleichung $|u(x)| \leq \frac{1}{n\omega_n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\nabla u(y)|}{|y-x|^{n-1}}\, \mathrm{d}y$. *(5 Punkte)*

[Tipp. Benutze (a), setze $y := x + r\theta$ und verwende den Transformationssatz.]

Schöne Osterferien!