

10. Übung

29. Über Quader, Treppenfunktionen und charakteristische Funktionen.

(a) Seien Q_1, Q_2 zwei Quader des \mathbb{R}^d .

(i) Zeige: $Q_1 \cap Q_2$ ist die leere Menge oder ein Quader des \mathbb{R}^d . (2 Punkte)

(ii) Beweise oder widerlege: $Q_1 \cup Q_2$ ist ein Quader des \mathbb{R}^d . (1 Punkt)

(b) Wie in der Vorlesung definieren wir zu einer jeden Menge $M \subset \mathbb{R}^d$ die *charakteristische Funktion* $\chi_M : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ durch $\chi_M(x) = 1$ für $x \in M$ und $\chi_M(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R}^d \setminus M$. Es seien nun A, B zwei Teilmengen des \mathbb{R}^d . Zeige:

(i) $\chi_{A \cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$ (2 Punkte)

(ii) $\chi_{A \cup B} + \chi_{A \cap B} = \chi_A + \chi_B$ (2 Punkte)

(c) Es seien $f, g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ zwei Treppenfunktionen. Zeige, dass dann auch

$$f + g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) + g(x) \quad \text{und} \quad f \cdot g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) \cdot g(x)$$

Treppenfunktionen sind.

(2 Bonuspunkte)

30. Nullmengen.

(a) Die Teilmenge

$$H := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0\}$$

des \mathbb{R}^n heißt eine Hyperebene. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Betrachten Sie die offenen Quader

$$Q_k := (-k, k) \times \dots \times (-k, k) \times (-a_k, a_k)$$

mit $a_k := \varepsilon 2^{-k-1} (2k)^{-n+1}$ für jedes $k \in \mathbb{N}$. Zeige, dass H eine Nullmenge ist.

(2 Punkte)

(b) Sei $f : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und deren Graph sei gegeben durch

$$G(f) := \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}^{n-1}\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Zeige, dass $G(f)$ eine Nullmenge ist.

(4 Punkte)

Tipp: Begründe zunächst, warum es ausreicht, die Funktion f auf einem kompakten Quader $Q \subset \mathbb{R}^{n-1}$ mit Kantenlänge 1 zu betrachten, d.h. $|a_i - b_i| = 1$ für $i = 1, \dots, n-1$. Um zu zeigen, dass $G(f)|_Q$ eine Nullmenge ist zerlege man diesen Quader in endlich viele Teilquader Q_k , auf denen man die Schwankung $\sup_{x,y \in Q_k} |f(x) - f(y)|$ kontrollieren kann.

31. Lesbegue-integrierte Funktionen.

(a) Zeige, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 3 & \text{falls } x \in [0, 2] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}), \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Lesbegue-integriert (Kapitel 12), aber auf dem Intervall $[0, 2]$ nicht Riemann-integriert (Kapitel 8) ist und berechne $\int f d\mu$ im Sinne der Lebesgueschen Theorie.

(2 Punkte + 2 Bonuspunkte + 1 Punkt)

(b) Zeige, dass die Funktion

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} n & \text{falls } x \in \left(\frac{1}{(n+1)!}, \frac{1}{n!}\right] \text{ für } n \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Lesbegue-integriert ist.

(2 Punkte)

(c) Berechne $\int g d\mu$ für die Funktion g aus (b).

(2 Bonuspunkte)

[Tipp: Man benutze die Reihendarstellung von e .]

32. Das Cantorsche Diskontinuum.

Wir definieren rekursiv eine Folge $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Teilmengen von \mathbb{R} durch

$$C_0 := [0, 1] \quad \text{und} \quad C_{n+1} := \frac{1}{3} C_n \cup \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} C_n\right) \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0.$$

Dann heißt $C := \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$ das *Cantorsche Diskontinuum*.

(a) Skizziere C_n für $n = 0, 1, 2, 3$.

(2 Punkte)

(b) Zeige, dass C eine kompakte Nullmenge in \mathbb{R} ist.

(8 Punkte)

Tipp: Man zeige der Reihe nach:

(1) Für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $C_{n+1} \subset C_n \subset [0, 1]$.

(2) C_n ist kompakt für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ und daher ist auch C kompakt.

(3) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist C_n eine disjunkte Vereinigung von endlich vielen endlichen Quadern von \mathbb{R} und die Summe der Maße dieser Quader beträgt $(\frac{2}{3})^n$.

(4) C ist eine Nullmenge.

Hierbei werden die Schritte (1)-(3) induktiv gezeigt.

(c) Zeige, dass C überabzählbar ist.

(5 Bonuspunkte)

[Tipp: Zeige zunächst, dass $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{3^{i+1}} \in C$ für jede Folge $(a_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ mit $a_i \in \{0, 2\}$ gilt und konstruiere sodann mithilfe der Darstellung reeller Zahlen zur Basis 2 eine injektive Abbildung $[0, 1] \rightarrow C$.]

Die Lösungen sind bis Donnerstag, den 9. Mai 2024, um 10:00 Uhr in die beschrifteten Briefkästen in A5 einzuwerfen oder per Mail an eure Tutoren zu senden.