

# Übung 10

## Lebesgue-Integrierbarkeit

2. Mai 2024

**Aufgabe 27** Sei  $N \subset \mathbb{R}^n$  eine Nullmenge. Zeige, dass dann auch  $N \times \mathbb{R}^m$  eine Nullmenge im  $\mathbb{R}^{n+m}$  ist.

**Aufgabe 28** Sei  $X \subset \mathbb{R}$  abzählbar. Zeige explizit unter Verwendung der Definition, dass  $X$  eine Nullmenge ist.

## Aufgabe 29

Sei  $k \in \mathbb{N}_0$  und

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } x \notin (0, 1) \\ k & \text{für } x \in [10^{-(k+1)}, 10^{-k}). \end{cases}$$

Entscheide, ob  $f$  Lebesgue-integrierbar ist und bestimme gegebenenfalls  $\int f \, d\mu$ .

## Aufgabe 30

Sei  $f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$  Lebesgue-integrierbar und  $\int f d\mu = 0$ . Zeige dann, dass  $f = 0$  fast überall.

[Tipp: Betrachte das Maß der Mengen  $f^{-1}[[\frac{1}{k}, \infty))$ ]]