Universität Mannheim
Fakultät für Wirtschaftsmathematik
Lehrstuhl für Mathematik III

Seminararbeit zum Thema:

Topologische Konjugation und Strukturelle Stabilität

- in zeitdiskreten dynamischen Systemen -

Vorgelegt von:

Melina Arnold
Matrikelnummer: 1620313

Seminar: Ausgewählte Themen gewöhnlicher Differenzialgleichungen
und dynamischer Systeme
Fachsemester: 6
Studiengang: Wirtschaftsmathematik

Abgabe: 06.04.2020

Lehrkraft: Prof. Dr. Martin U. Schmidt

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Diese Seminararbeit baut auf dem Buch *Differentiable Dynamical Systems - An Introduction to Structural Stability and Hyperbolicity* von Lan Wen auf, das eine allgemeine Einführung in grundlegende Konzepte der hyperbolischen Theorie auf zeitdiskreten dynamischen Systemen mit inhaltlichem Schwerpunkt auf struktureller Stabilität bietet. In dieser Seminararbeit wird Kapitel *§1.2 Topological conjugacy and structural stability* genauer beleuchtet werden.

In Abschnitt *2 Topologische Konjugation* dieser Arbeit wird zunächst der grundlegende Begriff der *topologischen Konjugation* eingeführt und grundlegende Eigenschaften zweier topologisch konjugierter Homöomorphismen genauer untersucht werden. Als bedeutendstes Resultat werden wir an dieser Stelle zeigen, dass zwei beliebige orientierungserhaltende Homöomorphismen auf einem kompakten Intervall [a,b], ohne Fixpunkte in (a,b), stets topologisch konjugiert sind.

Aufbauend auf den Ergebnissen aus dem vorherigen Abschnitt, werden in Abschnitt *3 Strukturelle Stabilität* nun Diffeomorphismen, statt allgemeineren Homöomorphismen, betrachtet werden. Wir wollen untersuchen, wann ein dynamisches System auf einem kompakten Intervall strukturell stabil ist.

2 Topologische Konjugation

Zunächst werden in diesem Abschnitt einige grundlegende Begriffe, wie topologische Konjugation definiert und Eigenschaften konjugierter Homöomorphismen genauer untersucht, bevor zentrale Lemma dieser Seminararbeit bewiesen werden können.

Definition 2.1 (Homöomorphismus) Seien X ein topologischer Raum, dann heißt eine Abbildung $f : X \to X$ genau dann Homöomorphismus, wenn gilt:

- f ist bijektiv
- f ist stetig
- die Umkehrfunktion f^{-1} ist stetig

Definition 2.2 (Topologische Konjugation) Sei X ein kompakter metrischer Raum, dann heißen zwei Homöomorphismen $f : X \to X$ und $g : X \to X$ topologisch konjugiert zueinander, wenn ein Homöomorphismus $h : X \to X$ existiert, so dass $h \circ f = g \circ h$ gilt.
h heißt dann die (topologische) Konjugation von f nach g

Korollar 2.3 Die Relation zweier zueinander konjugierter Homöomorphismen ist eine Äquivalenzrelation.

Beweis: Zu zeigen sind die drei Eigenschaften einer Äquivalenzrelation.

- Reflexivität: Sei $I_X : X \to X$ die Identität, dann gilt: $I_x f = f I_x = f$
- Symmetrie: Aus Definition 2.2 folgt: $h \circ f = g \circ h \Rightarrow f = h^{-1} \circ g \circ h$
  Diese Umformung setzen wir nun für f ein, dann gilt: $f \circ h^{-1} = h^{-1} \circ g \circ h \circ h^{-1} = h^{-1} \circ g$
- Transitivität: Seien f, g, h, i, k Homöomorphismen in X und seien weiterhin $h \circ f = g \circ h$ und $k \circ g = i \circ k$, dann gilt: $k \circ h \circ f = k \circ g \circ h = i \circ k \circ h$

Für die Iterationen der Homöomorphismen f und g ergibt sich dann direkt aus der obigen Definition:
Proposition 2.4 Ist h eine Konjugation von $f : X \to X$ nach $g : X \to X$, dann ist h auch eine Konjugation von f^n nach g^n.

Beweis:

$$
\begin{aligned}
h \circ f = g \circ h &\Rightarrow h \circ f \circ h^{-1} = g \\
&\Rightarrow (hfh^{-1})(hfh^{-1})...(hfh^{-1}) = g^n \\
&\Rightarrow hf^n h^{-1} = g^n \\
&\Rightarrow hf^n = g^n h
\end{aligned}
$$

□

Proposition 2.5 Eine topologische Konjugation h erhält Orbits und periodische Sets.

Beweis:
Es soll zunächst gezeigt werden, dass eine topologische Konjugation h Orbits erhält, d.h. $h(Orb(x,f)) = Orb(h(x),g)$.
Zur Erinnerung: der positive Orbit eines Punktes x_0 wurde wie folgt definiert:
$Orb^+(x_0) = \{f^n(x_0) : n \geq 1\}$
Seien nun X, f, g und h wie zuvor definiert und sei zudem $x_0 \in X$, dann gilt mit Lemma 2.1:
$h(Orb^+(x_0)) = \{h \circ f^n(x_0) : n \geq 1\} = \{g^n \circ h(x_0) : n \geq 1\} = Orb^+(h(x_0), g)$
analog für $Orb^-(x_0)$
Zunächst folgt der Beweis, dass h Fixpunkte erhält, also $Fix(g) = h(Fix(f))$.

" $\supseteq$ " Sei $x_0 \in X$ ein Fixpunkt von f, d.h. $f(x_0) = x_0$ und sei $y_0 := h(x_0)$, dann gilt:
$g(y_0) = g \circ h(x_0) = h \circ f(x_0) = h(x_0) = y_0$
$\Rightarrow Fix(g) \supseteq h(Fix(f))$

" $\subseteq$ " Sei nun y_0 ein Fixpunkt von g, d.h. $g(y_0) = y_0$ und $h^{-1}(y_0) := x_0$, dann gilt:
$f(x_0) = f \circ h^{-1}(y_0) = h^{-1} \circ g(y_0) = h^{-1}(y_0) = x_0$
$\Rightarrow Fix(g) \subseteq h(Fix(f))$

Nun bleibt noch zu zeigen, dass h auch periodische Punkte mit $n \geq 2$ erhält.
Sei $x_0 \in X$ ein Punkt mit Periode $k \geq 2$ für f und sei $y_0 := h(x_0)$, dann gilt:
$f^k(x_0) = x_0$ und $f^m(x_0) \neq x_0$ für $m < k$
Dann gilt auch:
$g^k(y_0) = g^k \circ h(x_0) = h \circ f^k(x_0) = h(x_0) = y_0$ und für $m < k$ gilt:
$g^m(y_0) = g^m \circ h(x_0) = h \circ f^m(x_0) \neq h(x_0) = y_0$

□

Bemerkung 2.6 Eine topologische Konjugation h erhält nicht nur Orbits und periodische Sets, sondern auch das ω-Limit Set, das Set der Kettenrekurrenzen und die nichtwandernde Menge,d.h.

$$h(\omega(x,f)) = \omega(h(x),g), \;\; h(CR(f)) = CR(g), \;\; h(\Omega(f)) = \Omega(g)$$

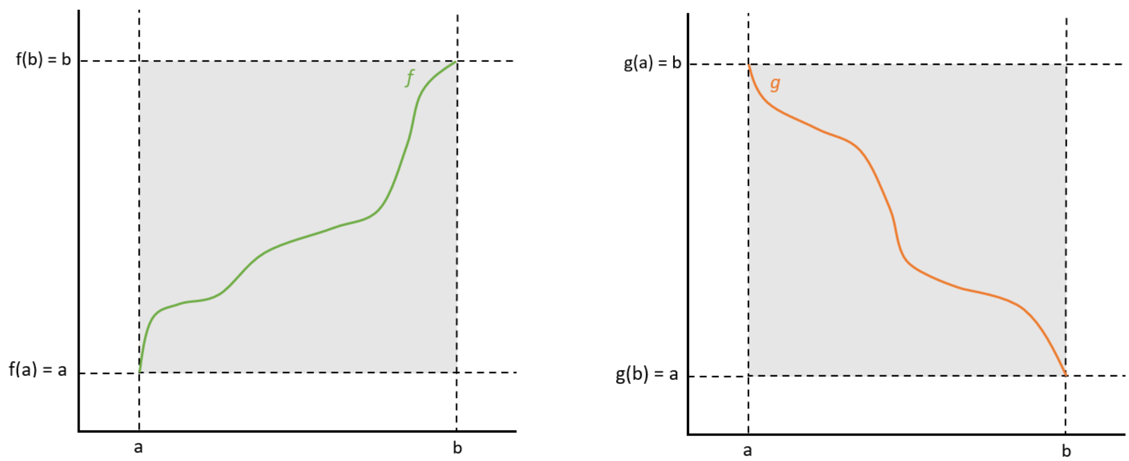
Im Folgenden werden zur Vereinfachung nur noch Intervall-Homöomorphismen der Form $f : [a,b] \to [a,b]$ betrachtet. Zunächst soll der Begriff des orientierungserhaltenden Homöomorphismus eingeführt und einige zugrundeliegende Eigenschaften, wie beispielsweise die Rekurrenz, dieser Homöomorphismen genauer untersucht werden.

Definition 2.7 (orientierungserhaltender Homöomorphismus) Ein Homöomorphismis $f : [a,b] \to [a,b]$ heißt orientierungserhaltend, wenn er streng wachsend ist und die beiden Endpunkte des Intervalls fixiert.
Analog heißt ein Homöomorphismus orientierungsumkehrend, wenn er streng fallend ist und die Endpunkte des Intervalls vertauscht. *(Siehe Figure 1)*

Lemma 2.8 Ein Homöomorphismus $f : [a,b] \to [a,b]$ ist entweder orientierungserhaltend oder orientierungsumkehrend.

Beweis:
Sei f ein Homöomorphismus auf $[a,b]$. Dann ist f per Definition injektiv und somit entweder streng monoton wachsend oder fallend auf $[a,b]$. Sei f nun streng monoton wachsend, dann muss $f(a) = a$ und $f(b) = b$ gelten, da f sonst nicht surjektiv ist. Analog, falls f streng fallend ist.

$\square$



(a) orientierungserhaltend

(b) orientierungsumkehrend

Abbildung 1: Intervall-Homöomorphismus

Korollar 2.9 Ein orientierungserhaltender Homöomorphismus kann niemals zu einem orientierungsumkehrenden Homöomorphismus konjugiert sein.

Beweis:
Sind zwei Homöomorphismen auf dem Intervall $[a,b]$ konjugiert zueinander, so gilt dies auch auf dem Rand $\partial([a,b])$. Auf diesem hat ein orientierungserhaltender Homöomorphismus genau zwei Fixpunkte, nämlich $f(a) = a$ und $f(b) = b$. Ein orientierungsumkehrender Homöomorphismus hat hingegen keine Fixpunkte auf dieser Menge. Da eine topologische Konjugation nach Lemma 2.5 Fixpunkte erhält, folgt, dass die Homöomorphismen nicht zueinander konjugiert sein können.

Proposition 2.10 Für einen beliebigen orientierungserhaltenden Intervall-Homöomorphismus $f : [a,b] \to [a,b]$ gilt:

$$CR(f) = Fix(f)$$

Beweis:
" $\subseteq$ " schon bekannt aus Kapitel 1.1
" $\supseteq$ " Sei $x \notin Fix(f)$, $f(x) > x$ und $\epsilon := \frac{|f(x)-x|}{2}$, $\forall \epsilon > 0$:
nach der Definition der Kettenrekurrenz gilt dann für $x_0 = x$:
$f(x_0) - x_0 = 2\epsilon$ und $|x_1 - f(x_0)| < \epsilon$

$$x_1 - x_0 = \underbrace{f(x_0) - x_0}_{=2\epsilon} + \underbrace{x_1 - f(x_0)}_{>-\epsilon} > 2\epsilon - \epsilon = \epsilon$$

Somit gilt $x_1 > x_0$ und da f streng monoton steigend ist folgt $f(x_1) > f(x_0)$.
Für x_2 gilt dann:

$$x_2 - x_0 = \underbrace{f(x_1) - x_0}_{>f(x_0)-x_0=2\epsilon} + \underbrace{x_2 - f(x_1)}_{>-\epsilon} > \epsilon$$

Induktiv kann man nun mit der Eigenschaft der Monotonie von f zeigen:
$x_n - x_0 > \epsilon \Rightarrow x_n \neq x_0$
Hieraus folgt, dass keine ϵ-Kette von x nach x existiert.

Falls $f(x) < x$ und ϵ wie oben definiert, gilt:

$$x_0 - x_1 = \underbrace{x_0 - f(x_0)}_{=2\epsilon} + \underbrace{f(x_0) - x_1}_{>-\epsilon} > 2\epsilon - \epsilon = \epsilon$$

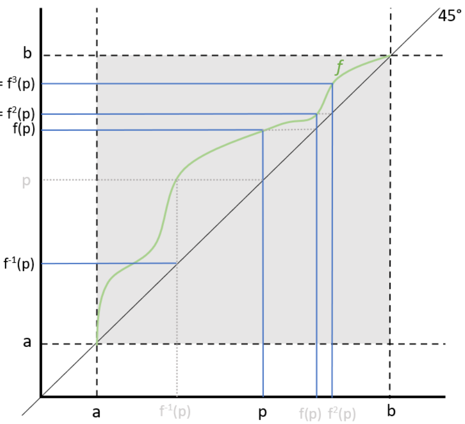
Analog zu dem obigen Vorgehen kann man nun induktiv zeigen:
$x_0 - x_n > \epsilon \Rightarrow x_n \neq x_0$

□

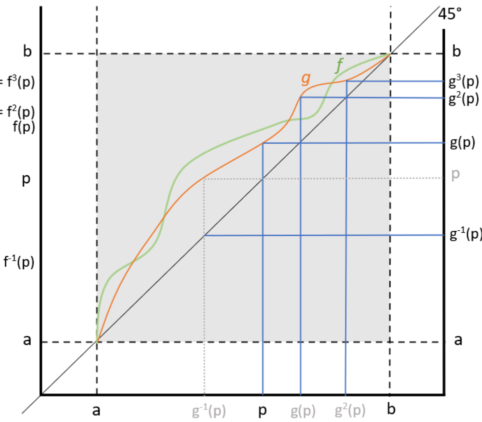
Wir wollen nun die letzte und auch wichtigste Aussage dieses Abschnitts beweisen, die eine tragende Rolle in Kapitel *3 Strukturelle Stabilität* und darüber hinaus hat.

Satz 2.11 Zwei beliebige orientierungserhaltende Homöomorphismen auf dem Intervall $[a, b]$, ohne Fixpunkte in (a, b), sind topologisch konjugiert.

Beweis:
Vorüberlegungen: Seien f und g zwei orientierungserhaltende Homöomorphismen auf $[a, b]$ ohne Fixpunkte in (a, b). Weiter seien $f(x) > x,\ g(x) > x\ \forall x \in (a, b)$. Dann gelangen wir aus der Darstellung beider Homöomorphismen, analog zu Abbildung 1, zu einer neuen Darstellungsform der Intervall-Homöomorphismen. Hierfür wird zunächst ein beliebiger Punkt $p \in (a, b)$ betrachtet. Abbildung 2 (a) zeigt nun graphisch, wie $f^n(p)\ \forall n \in \mathbb{Z}$ iterativ bestimmt werden kann, da $f^{n+1}(p) = f(f^n(p))$. Analog für $g^n(p)$ in Abbildung 2 (b). *(Siehe Figure 2)* Nun können diese Punkte wie in Abbildung 3 gezeigt, in einer vereinfachten Grafik zusammen gefasst werden. *(Siehe Figure 3)*



(a) Homöomorphismus f



(b) Homöomorphismus g

Abbildung 2: Iterative Ermittlung der Punkte $f^n(p)$ und $g^n(p)$

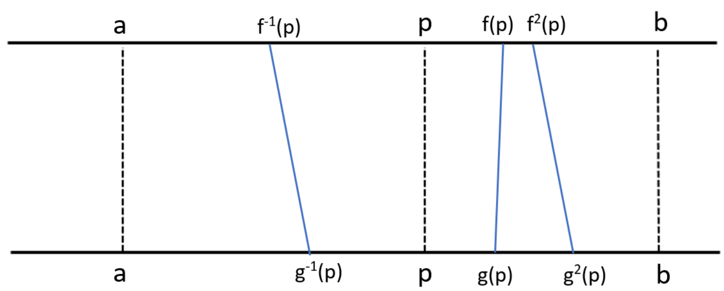


Abbildung 3: Vereinfachte Darstellung der beiden Homöomorphismen

Es gelte nun weiterhin $f(x) > x,\ g(x) > x\ \forall x \in (a, b)$.
Definiere einen beliebigen Homöomorphismus

$$h_0 : [p, f(p)] \to [p, g(p)]$$

für ein beliebiges $p \in (a, b)$ und mit $h_0(p) = p$ und $h_0(f(p)) = f(p)$.
Definiere weiter

$$h_n : [f^n(p), f^{n+1}(p)] \to [g^n(p), g^{n+1}(p)]$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$ mit $h_n = g^n \circ h_0 \circ f^{-n}$
Wir wollen diese Abbildungsvorschrift nun genauer untersuchen. Es gilt:

$$h_n(f^n(p)) = g^n(h_0(f^{-n}(f^n(p)))) = g^n(h_0(p)) = g^n(p)$$
$$h_n(f^{n+1}(p)) = g^n(h_0(f^{-n}(f^{n+1}(p)))) = g^n(h_0(f(p))) = g^{n+1}(p)$$

Die Abbildung f^{-n} bildet den Definitionsbereich von h_n also wieder auf den Definitionsbereich von h_0 ab, dessen Bildbereich gerade wieder dem Definitionsbereich von g^n entspricht.

Grafisch entspricht h_n nun folgender Darstellung:

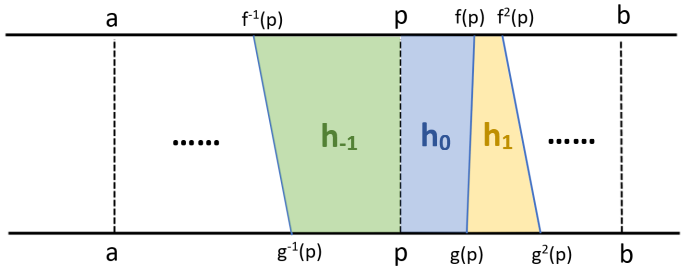


Abbildung 4: Darstellung der konstruierten Abbildung h_n

Die Abbildung h_0 kann vollkommen frei gewählt werden, unter der Voraussetzung, dass h_0 streng monoton und stetig ist. Die Abbildung h_n hingegen wird durch die Homöomorphismen f und g und die Wahl von h_0 festgelegt.

Offenbar ist h_n als Verkettung von Homöomorphismen selbst wieder ein Homöomorphismus. Nun bleibt zu zeigen, dass das Zusammenfügen aller h_n wieder einen Homöomorphismus $h : [a, b] \to [a, b]$ ergibt, der zusätzlich $h \circ f = g \circ h$ erfüllt. Hierfür wollen wir in einem ersten Schritt zeigen, dass f und g tatsächlich auf das gesamte Intervall $[a, b]$ abbilden.

Da f monoton wachsend und beschränkt ist, ist f folglich konvergent. Für $n \to \infty$ gilt aufgrund der Eindeutigkeit des Grenzwertes dann $\lim_{n\to\infty} f^{n+1}(p) = \lim_{n\to\infty} f^n(p)$ für ein beliebiges $p \in (a, b)$.
Sei $y \coloneqq \lim_{n\to\infty} f^n(p)$, dann gilt:

$$f(y) = f(\lim_{n\to\infty} f^n(p)) = \lim_{n\to\infty} f^{n+1}(p) = \lim_{n\to\infty} f^n(p) = y$$

Die zweite Gleichheit gilt aufgrund der Stetigkeit von f.
Da nun $f(y) = y$ ein Fixpunkt ist, folgt sofort $\lim_{n\to\infty} f^n(p) = b$, denn f ist orientierungserhaltend auf $[a, b]$, ohne Fixpunkte in (a, b).
Analog lässt sich zeigen, dass $\lim_{n\to\infty} f^{-n}(p) = a$. Diese Aussagen gelten ebenso für den orientierungserhaltenden Homöomorphismus g auf $[a, b]$.

Im nachfolgenden Abschnitt wird gezeigt, dass das Zusammenfügen der h_n zu h tatsächlich einen Homöomorphismus auf $[a, b]$ ergibt.

Mit dem obigen Zwischenresultat erhalten wir direkt:

$$\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} h_n[f^n(p), f^{n+1}(p)] = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} [g^n(p), g^{n+1}(p)] = (a, b)$$

Und seien weiterhin $h(a) = a$ und $h(b) = b$, so gilt $h : [a, b] \to [a, b]$.
Die Bijektivität von h folgt sofort aus der Bijektivität der h_n.
Die Stetigkeit von h ist zum einen durch die Stetigkeit der h_n, zum anderen durch die

Übereinstimmung der rechts- und linksseitigen Grenzwerte zwischen den einzelnen Punkten gegeben. (siehe Figure 4). Analog folgt die Stetigkeit für h^{-1}.
Die Stetigkeit von den h an den Randpunkten a und b ist ebenfalls leicht einzusehen. Wie bereits zuvor gezeigt, gilt:

$$\lim_{n\to\infty} f^n(p) = \lim_{n\to\infty} g^n(p) = b$$

und

$$\lim_{n\to\infty} f^{-n}(p) = \lim_{n\to\infty} g^{-n}(p) = a$$

Des weiteren ist h streng monoton wachsend, da für $p \in (a, b)$ gilt:

$$h_n : [f^n(p), f^{n+1}(p)] \to [g^n(p), g^{n+1}(p)]$$

und

$$h_{n+1} : [f^{n+1}(p), f^{n+2}(p)] \to [g^{n+1}(p), g^{n+2}(p)]$$

Da laut Voraussetzung f und g streng monoton wachsend sind, folgt die Monotonie von h sofort. Wäre h nun in a, b nicht stetig, so müsste es eine Umgebung $\delta > 0$ um $f(a) = g(a) = a$ geben, so dass für ein beliebiges $p \in (a, b)$ gilt:
$\exists\ \delta > 0$ mit $\lim_{n\to\infty} |f^n(p) - a| < \delta$, s.d. $\forall\ \epsilon > 0$ gilt
$\lim_{n\to\infty} |h(f^n) - h(a)| = \lim_{n\to\infty} |g^n(p) - a| > \epsilon$.
Da aber $\lim_{n\to\infty} g^n(p) = a$, existiert eine solche Umgebung nicht. Analog folgt die Stetigkeit in dem Punkt b.

Im letzten Beweisschritt wird nun gezeigt, dass $h \circ f = g \circ h$ erfüllt ist.

Sei $v \in [f^n(p), f^{n+1}(p)]$, dann ist $f(v) \in [f^{n+1}(p), f^{n+2}(p)]$. Außerdem gilt

$$g \circ h|_{\ [f^n(p), f^{n+1}(p)]} = g \circ h_n \to [g^n(p), g^{n+1}(p)]$$

Hieraus folgt:
$h \circ f(v) = h_{n+1} \circ f(v) = g^{n+1} \circ h_0 \circ f^{-(n+1)} \circ f(v) = g \circ \underbrace{g^n \circ h_0 \circ f^{-n}}_{=h_n} \circ f^{-1} \circ f(v)$

$= g \circ h_n(v) = g \circ h(v)$

Somit folgt die Behauptung.

Blicken wir nochmals zurück auf die Vorüberlegung. Dort wurde angenommen, dass $f(x) > x,\ g(x) > x\ \forall x \in (a, b)$ gilt. Mit wenigen Anpassung ist der obige Beweis auch auf die anderen drei Fälle übertragbar. Dieses Vorgehen wird im Folgenden exemplarisch für den Fall $f(x) < x,\ g(x) > x\ \forall x \in (a, b)$ skizziert.
Definiere einen beliebigen Homöomorphismus

$$h_0 : [p, f^{-1}(p)] \to [p, g(p)]$$

für ein beliebiges $p \in (a, b)$ und mit $h_0(p) = p$ und $h_0(f^{-1}(p)) = g(p)$.

Definiere weiter

$$h_n : [f^{-n}(p), f^{-(n+1)}(p)] \to [g^n(p), g^{n+1}(p)]$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$ mit $h_n = g^n \circ h_0 \circ f^n$
Der neu definierte Homöomorphismus bildet nun wie folgt ab:

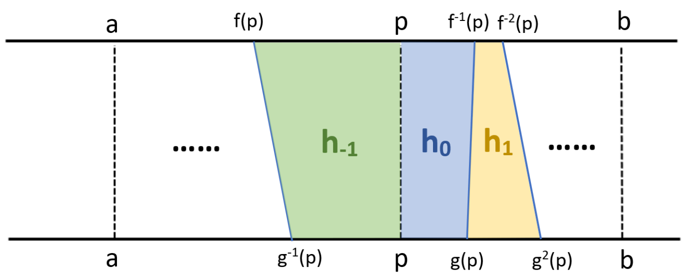


Abbildung 5: Angepasste Konstruktion der Abbildung h_n

Der restliche Beweis verläuft ganz analog zu den Beweisschritten für den ersten Fall; ebenso für die anderen beiden Fälle.

$\square$

3 Strukturelle Stabilität

Im nachfolgenden Abschnitt soll die strukturelle Stabilität eines Diffeomorphismus auf einem kompakten Intervall untersucht werden. Hierfür werden zunächst einige neue Definitionen eingeführt und diverse Eigenschaften eines Diffeomorphismus genauer untersucht.

Definition 3.1 (Diffeomorphismus) Seien U und V offene Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, dann heißt eine Abbildung $f : U \to V$ Diffeomorphismus, wenn gilt:

- f ist bijektiv
- f ist stetig differenzierbar
- f^{-1} ist stetig differenzierbar

Eine Verallgemeinerung hiervon stellt der C^k-Diffeomorphismus dar, mit der Eigenschaft, dass f und f^{-1} k-mal stetig differenzierbar sind, für $k \in \mathbb{N}_0$.

Bemerkung 3.2 Jeder Diffeomorphismus ist ein Homöomorphismus. Die Umkehrung gilt nicht.

Definition 3.3 (strukturelle Stabilität) Sei $[a, b]$ ein kompaktes Intervall und $f \in \mathrm{Diff}^r([a, b])$. f heißt dann C^r strukturell stabil, wenn es eine C^r Umgebung U von f in $\mathrm{Diff}^r([a, b])$ gibt, so dass jedes $g \in U$ topologisch zu f konjugiert ist.
In anderen Worten bedeutet dies also, dass das System sein Verhalten unter kleinen Störungen nicht ändert. Wird ein Diffeomorphismus in einer kleinen Umgebung gestört, ist er immer noch konjugiert und verändert sein Verhalten nicht grundlegend, so dass er, bzw. alle kleinen Störungen, immer noch mit dem ursprünglichen System identifiziert werden können.

Bemerkung 3.4 Die Umgebung der Topologie von C^r auf dem kompakten Intervall $[a, b]$ lässt sich durch die folgende Norm, die diese Topologie induziert, beschreiben. Wir fordern hierbei direkt, dass sich die Ableitungen stetig auf $[a, b]$ fortsetzen lassen.

$$\|f\|_{C^r} = \sum_{j=0}^{r} \sup_{a \leq x \leq b} |f^j(x)|$$

Korollar 3.5 Ist f C^r strukturell stabil, so ist f auch C^{r+1} strukturell stabil. Deshalb ist C^1 strukturelle Stabilität die stärkste strukturelle Stabilität.

Beweis:
Es gilt $C^{r+1} \subset C^r$. Sei f also ein C^{r+1}-Diffeomorphismus, so ist jede Umgebung bezüglich der Topologie des C^{r+1} von f in einer Umgebung bezüglich der Topologie des C^r um diesen Diffeomorphismus f einhalten. $\square$

Satz 3.6 Sei $f : [a,b] \to [a,b]$ ein orientierungserhaltender Diffeomorphismus, ohne Fixpunkte in (a,b). Für jedes $r \geq 1$ gilt, f ist genau dann C^r strukturell stabil, wenn $f'(a) \neq 1$ und $f'(b) \neq 1$

Beweis:

" $\Rightarrow$ " Mit Korollar 3.4 folgt, dass es ausreichend ist, den Beweis für $r = 1$ zu führen.
Wir wollen nun mit Hilfe von Satz 2.11 zeigen, dass es eine C^1 Umgebung von f in $\text{Diff}^1([a,b])$ gibt, so dass jedes g in dieser Umgebung zu f topologisch konjugiert ist.

Sei zunächst $f'(a) > 1$, so existieren aufgrund der Stetigkeit von f' ein $k_1 \in (a,b)$ und $\epsilon > 0$, so dass $f'(x) - 1 \geq \epsilon \ \forall x \in [a, k_1]$.
Analog findet man für den Fall $f'(a) < 1$ ein k_2, so dass $f'(x) \leq 1 - \epsilon \ \forall x \in [a, k_2]$.
Für $k := min\{k_1, k_2\}$ gilt dann also,

$$|f'(x) - 1| \leq \epsilon \ \forall x \in [a, k]$$

. Analog existiert für $f'(b) \neq 1$ ein $l \in (a,b)$ und $\epsilon > 0$, so dass

$$|f'(x) - 1| \leq \epsilon \ \forall x \in [l, b]$$

Sei nun $g \in C^1([a,b])$ und orientierungserhaltend mit

$$|f'(x) - g'(x)|_\infty < \frac{\epsilon}{2}$$

dann gilt $g'(x) > 1 + \frac{\epsilon}{2} > 1 \ \forall x \in [a, k]$.
Nach dem Mittelwertsatz gilt dann

$$\frac{g(x) - g(a)}{x - a} = \frac{g(x) - a}{x - a} > 1 \ \forall x \in (a, k)$$

deshalb folgt $g(x) > x \ \forall x \in (a, k]$.
Sei nun $U := [a, k)$, dann ist g auf U orientierungserhaltend und hat einen eindeutigen Fixpunkt mit $g(a) = a$. Entsprechend lässt sich eine Umgebung $V := (l, b]$ konstruieren, auf der g ebenfalls orientierungserhaltend ist mit dem eindeutigen Fixpunkt $g(b) = b$.

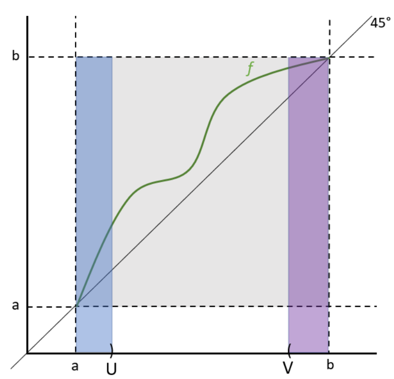


Abbildung 6: Veranschaulichung der gewählten Umgebungen U und V

In in einem zweiten Schritt wird nun gezeigt, dass eine C^1 Umgebung von f existiert, so dass g in dieser Umgebung keine Fixpunkte auf $[a, b] - U - V$ besitzt.
Da f nach Voraussetzung nur die Fixpunkte $f(a) = a$ und $f(b) = b$ besitzt, gilt

$$\min_{x \in [a,b]-U-V} |f(x) - x| > 0$$

Und mit Hilfe der Dreiecksungleichung gilt

$$|f(x) - x| = |f(x) - g(x) + g(x) - x| \leq |f(x) - g(x)| + |g(x) - x|$$

Hieraus folgt:

$$|g(x) - x| \geq \underbrace{|f(x) - x|}_{\epsilon} - \underbrace{|f(x) - g(x)|}_{\leq\ \epsilon/2} \geq \frac{\epsilon}{2} > 0.$$

Es gilt also, dass g in der gewählten Umgebung orientierungserhaltend ist und keine weiteren Fixpunkte besitzt. Nach Satz 2.11 sind g und f topologisch konjugiert zu einander. Somit ist f C^1 strukturell stabil.

" $\Leftarrow$ " Die Rückrichtung wollen wir nun anhand eines Gegenbeispiels beweisen.
Zu zeigen ist hierbei, dass C^r nicht strukturell stabil ist, wenn $f'(a) = 1$ oder $f'(b) = 1$
Zur Vereinfachung seien zunächst $f'(a) = 1$, $a = 0$ und $b = 1$. Darüber hinaus sei o.B.d.A. $f(x) > x$. Sei eine C^∞ Funktion wie folgt definiert:
$\alpha : [0, 1] \to [0, 1]$:

$$\alpha(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, 1/3] \\ 0 & x \in [2/3, 1] \end{cases}$$

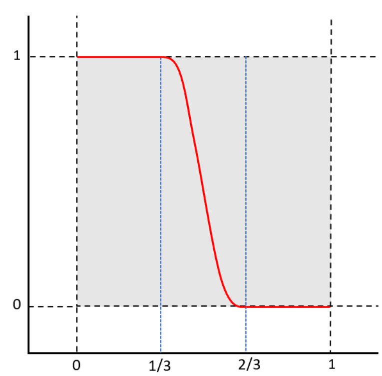


Abbildung 7: Konstruktion des Diffeomorphismus α

Für alle $\epsilon > 0$ sei $g(x) = g_\epsilon(x) := f(x) - \epsilon\alpha(x)x$. Wenn ϵ hinreichend klein wird, ist g ein orientierungserhaltender Diffeomorphismus und konvergiert für $\epsilon \to 0$ gegen f.
Da $g(0) = f(0) - \epsilon \underbrace{\alpha(0)}_{=1} *0 = f(0) = 0$ und $g(1) = f(1) - \epsilon \underbrace{\alpha(1)}_{=0} = f(1) = 1$, hat g ebenfalls zwei Fixpunkte bei 0 und 1.
Des weiteren gilt für $x \in [0, 1/3]$, dass $g'(x) = f'(x) - \epsilon$ und somit $g'(1) = 1 - \epsilon$.

Das heißt, $\exists x \in (0, 1/3]$ mit $g(x) < x$.
Umgekehrt folgt für $x \in [2/3, 1]$, dass $g(x) = f(x)$ und deshalb auch $g(x) > x$.
Dann hat g aber mindestens noch einen weiteren Fixpunkt und ist nach Korollar 2.9 nicht zu f konjugiert.

$\square$

4 Quellen

1. https://www.spektrum.de/lexikon/mathematik/ck-diffeomorphismus/1561
(Definition, C^k Diffeomorphismus)

2. Wen, L: Differentiable Dynamical Systems: an introduction to structural stability and hyperbolicity