Halbgruppentheorie von Differentialoperatoren

Felix Reinbott

26.02.2020

1 Einführung

1.1 Motivation

Ziel dieses Vortrages ist es, einen abstrakten Zugang zu linearen partiellen Differentialgleichungen zu finden. Dafür sei im folgenden X ein Banachraum über Funktionen, $u \in X$ und $A\colon D(A) \to X$ eine lineare Abbildung. Die allgemeine Form der Anfangswertprobleme zu diesen partiellen Differentialgleichungen sei gegeben durch:

$$\frac{d}{dt}u(x,t) = Au(x,t) \quad (x,t) \in \Omega \times \left[0,T\right] \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n \tag{1}$$

$$u(x,0) = g(x) \quad x \in \Omega \tag{2}$$

$$u(x,t) = 0 \quad (x,t) \in \partial\Omega \times \left[0,T\right] \tag{3}$$

Es ist "einfach" zu sehen, dass zum Beispiel die Wärmeleitungsgleichung in diesen Rahmen fällt.

Bemerkung 1. *Um den Zusammenhang zwischen der Funktion $u(x,t)$ und dem Anfangswert $g(x)$ deutlich zu machen wird folgende Notation eingeführt. Wir lassen wir lassen das Argument x der Funktion weg und wenden den Fokus dem Argument t zu. Nun schreiben wir $u(t)$ folgendermaßen*

$$u(t) := S(t)u \quad t \geq 0 \tag{4}$$

Bei erneuter Betrachtung von (1) sehen wir nun, dass wir die Gleichung auch als eine gewöhnliche Differentialgleichung auf dem Banachraum X verstehen können

$$\dot{u}(t) = Au(t) = AS(t)u \quad u(0) = u \tag{5}$$

1.2 Grundlagen

Im Folgenden werden die grundlegenden Definitionen und Schreibweisen eigeführt.

Definition 2. *Sei X ein reller Banachraum und sei eine Familie $\{S(t)\}_{t>0}$ von beschränkten linearen Operatoren die von X nach X abbilden mit den folgenden Eigenschaften gegeben:*

$$\text{(i)} \quad S(0) = \mathbb{1}_X \tag{6}$$

$$\text{(ii)} \quad S(t_1 + t_2) = S(t_2) \circ S(t_1) \quad \forall t_1, t_2 \geq 0 \tag{7}$$

$$\text{(iii)} \quad \lim_{t \to t_0} S(t)u = S(t_0)u \quad \forall t_0 \geq 0, \quad \forall u \in X \tag{8}$$

so heißt die Familie der Operatoren eine Halbgruppe. Gilt zusätzlich noch, dass:

$$\|S(t)\| \leq 1 \quad \forall t \geq 0 \tag{9}$$

so heißt die Halbgruppe Kontraktionshalbgruppe.

Bemerkung 3. *Um die Motivation der Halbgruppen besser zu verstehen wenden wir uns dem Beispiel der Wärmeleitungsgleichung zu. Die Gleichung hat folgende Form*

$$\dot{u} - \Delta_x u = 0 \tag{10}$$

Als kleine Erinnerung hier noch einmal die Definition des Laplaceoperators auf $C^2(\mathbb{R}^d)$. Der Operator ist nichts anderes als die Spur der Hessematrix und kann ggf. auch auf Sobolevräumen definiert werden.

$$\Delta : C^2(\mathbb{R}^d) \to C(\mathbb{R}^d) \quad u \mapsto \Delta u := \sum_{i=1}^{d} \frac{d^2 u}{dx_i^2}$$

Mit Vorwissen aus der Vorlesung "Introduction to partial differential equations" ist die Fundamentallösung und der Wärmeleitungskern bekannt. Hier gilt das Interesse insbesondere dem Wärmeleitungskern

$$p(x, y, t) = \frac{1}{\sqrt{(4\pi t)^{\frac{d}{2}}}} \, exp\Big(- \frac{|x-y|^2}{4t}\Big)$$

Folgende Funktion löst also für den Anfangswert $f \in C_b(\mathbb{R}^d)$ die Wärmeleitungsgleichung mit $u(x,0) = f(x)$

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^d} p(x,y,t) f(y)\, dy$$

Dies ist mithilfe der Eigenschaften der Konvolution bezüglich Ableitungen leicht zu sehen. Weiterhin beobachten wir für

$$S(t)f := \int_{\mathbb{R}^d} p(\,\cdot\,,y,t) f(y)\, dy$$

folgende Eigenschaften:

$$\begin{aligned}
&\lim_{t \to 0_+} S(t)f = f \quad \textit{bekannt aus Introduction to PDE} \\
&S(t_1 + t_2)f = S(t_1)S(t_2)f
\end{aligned}$$

Wobei die zweite Eigenschaft folgendermaßen gezeigt werden kann

$$\begin{aligned}
S(t_1 + t_2)f(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{(4\pi(t_1+t_2))^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t_1+t_2)}} f(y)\, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{(4\pi t_1)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{|x-z|^2}{4t_1}} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{(4\pi t_2)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{|z-y|^2}{4t_2}} f(y)\, dy\, dz \\
&= S(t_1)S(t_2)f(x)
\end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit ist eine einfache Schlussfolgerung aus der Jacobi'schen Transformationsformel. Die technische Ausarbeitung des letzten Schrittes wird hier dem Leser überlassen. Wir bereiten nun die Untersuchung solcher Halbgruppen vor.

2 Eigenschaften von Halbgruppen und Infinitesimalgeneratoren

Definition 4. *Sei $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ eine Halbgruppe von Operatoren und seien:*

$$D(A) \colon = \Big\{ u \in X \colon \quad \lim_{t\to 0_+} \frac{S(t)u-u}{t} \quad \text{existiert in } X \Big\} \tag{11}$$

$$Au \colon = \lim_{t\to 0_+} \frac{S(t)u-u}{t} \quad u \in D(A) \tag{12}$$

Man nennt $A : D(A) \to X$ den Infinitesimalgenerator von $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ und $D(A)$ den Definitionsbereich von A.

Satz 5. *Sei $u \in D(A)$, so gilt für eine Halbgruppe $\{S(t)\}_{t\geq 0}$*

(i) $S(t)u \in D(A)$ *für alle* $t \geq 0$

(ii) $AS(t)u = S(t)Au$ *für alle* $t \geq 0$

(iii) Die Abbildung $t \mapsto S(t)u$ *ist differenzierbar für alle* $t \geq 0$

(iv) $\frac{d}{dt}S(t)u = AS(t)u$ *für alle* $t > 0$

Beweis. (i) und (ii) Sei $u \in D(A)$, so gilt

$$\begin{aligned} AS(t)u = \lim_{s\to 0_+} \frac{S(s)S(t)u - S(t)u}{s} &\overset{(7)}{=} \lim_{s\to 0_+} \frac{S(t)S(s)u - S(t)u}{s} \\ \overset{(8)}{=} S(t) \lim_{s\to 0_+} \frac{S(s)u-u}{s} &\overset{(Def A)}{=} S(t)Au \end{aligned}$$

Da nun $S(t)Au$ wohldefiniert ist, folgt, dass $S(t)u \in D(A)$ sein muss. Andererseits wurde oben auch gezeigt, dass (ii) aus der Definition der Halbgruppe folgt.

(iii) und (iv): Betrachte wieder $u \in D(A), t, h > 0$. So gilt

$$\begin{aligned} &\lim_{h\to 0_+} \left(\frac{S(t)u - S(t-h)u}{h} - S(t)Au \right) \\ &\overset{(7)}{=} \lim_{h\to 0_+} \left(S(t-h)\frac{S(h)u-u}{h} - S(t)Au \right) \\ &= \lim_{h\to 0_+} \left(S(t-h)\left(\frac{S(h)u-u}{h} - Au\right) + \big(S(t-h)-S(t)\big)Au \right) \\ &\overset{(8)}{=} S(t)\big(Au-Au\big) + \big(S(t)-S(t)\big)Au \\ &= 0 \end{aligned}$$

Hierbei wurde in der zweiten Gleichheit eine additive Null mit $S(t-h)Au$ eingefügt. Es folgt also für die links- und rechtsseitigen Grenzwerte mit der obigen Eigenschaft

$$\lim_{h\to 0_+} \frac{S(t)u - S(t-h)u}{h} = S(t)Au$$
$$\lim_{h\to 0_+} \frac{S(t+h)u - S(t)u}{h} = S(t) \lim_{h\to 0_+} \frac{S(h)u - u}{h} = S(t)Au$$

Das die links- und rechtsseitigen Grenzwerte übereinstimmen folgt aus der Stetigkeit von $t \mapsto S(t)$ und der Definition von A.

□

Bemerkung 6. *Der Satz formalisiert also unsere Beobachtung aus dem Beispiel oben, dass im Falle einer solchen Halbgruppeneigenschaft für eine lineare partielle Differentialgleichung eine Auswertung einer Lösung zum Zeitpunkt $t+s \in \mathbb{R}_+$ mit Anfangswert u_0 gerade gleich zu der Lösung ausgewertet zu Zeitpunkt t mit Anfangswert u_s sein muss.*

Definition 7. *Ein Operator A heißt abgeschlossen, wenn für jeden Folge $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in D(A)$ mit $u_k \to u$ gilt, dass $Au_k \to h$ mit $h \in D(A)$ und $h = Au$.*

Satz 8. *Sei A der Infinitesimalgenerator einer Halbgruppe $S(t)$, so gilt*

(i) Der Definitionsbereich $D(A)$ ist dicht in X

(ii) A ist ein abgeschlossener Operator

Beweis. (i) Sei $u \in X$ und definiere $u^{(t)} := \int_0^t S(s)u\,ds$. Mit der Stetigkeit von $S(t)$ für $t \to 0_+$ und L'Hospital folgt, dass $\frac{u^{(t)}}{t} \to u$ für $t \to 0_+$. Wir zeigen jetzt

$$u^{(t)} \in D(A) \quad \forall t > 0 \tag{13}$$

Für $r > 0$ folgt dies mit der Betrachtung von

$$
\begin{aligned}
\frac{S(r)u^{(t)} - u^{(t)}}{r} &= \frac{1}{r}\left(S(r)\left(\int_0^t S(s)u\,ds\right) - \left(\int_0^t S(s)u\,ds\right)\right) \\
&= \frac{1}{r}\left(\int_0^t S(r+s)u - S(s)u\,ds\right) \\
&= \frac{1}{r}\left(\int_r^{t+r} S(s)u\,ds - \int_0^t S(s)u\,ds\right) \\
&= \frac{1}{r}\left(\int_t^{t+r} S(s)u\,ds - \int_0^r S(s)u\,ds\right) \\
&\to (S(t) - \mathbb{1}_X)u \quad r \to 0_+
\end{aligned}
$$

Wobei in der vorletzten Gleichheit die oberen und unteren Integralgrenzen der beiden Terme vertauscht werden. Nun genügt der obige Grenzwert der Definiton von $D(A)$ und es folgt, dass $u(t) \in D(A)$. Wir schließen aus der Eigenschaft (6), dass für $t \in \mathbb{R}_+$ jede Funktion in X beliebig gut durch $u^{(t)}$ approximiert werden kann. Da $u^{(t)} \in D(A)$ folgt also $D(A)$ liegt dicht in X.

(ii) Sei nun $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $D(A)$ und gelte

$$u_k \to u, \quad Au_k \to v \quad \text{in X.}$$

So ist zu zeigen, dass

(a) $v = Au$

(b) $u \in D(A)$

Nutze hierfür Satz (5) und betrachte:

$$S(t)u_k - u_k = Au_k^{(t)}$$

und für $k \to \infty$ folgt

$$S(t)u - u = \int_0^t S(s)vds$$

Als nächstes betrachten wir wieder den Differenzenquotienten und bilden den Grenzwert für $t \to 0_+$ so folgt

$$Au = \lim_{t \to 0_+} \frac{S(t)u - u}{t} = \lim_{t \to 0_+} \frac{1}{t} \int_0^t S(s)v ds = v$$

Da v wohldefiniert ist muss $u \in D(A)$ liegen und somit folgt, dass $v = Au$ gelten muss. Somit gilt sowohl (a) als auch (b) und A ist ein abgeschlossener Operator

$\square$

Definition 9. *Sei $A : D(A) \to X$ ein beschränkter Operator der eine Abbildung von $D(A) \subset X$ nach X definiert. Die Menge*

$$\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} \colon (\lambda \mathbb{1}_X - A) \text{ ist invertierbar}\} \tag{14}$$

heißt Resolventenmenge. Weiterhin heißt der Operator definiert durch

$$\lambda \in \rho(A), \quad R_\lambda \colon D(A) \to X, \quad u \mapsto R_\lambda u := (\lambda \mathbb{1}_X - A)^{-1} u \tag{15}$$

Resolventenoperator. Nach dem Satz des Abgeschlossenen Graphen ist so $R_\lambda : X \to D(A) \subset X$ ein beschränkter linearer Operator.

Mit dem Folgenden Satz werden wir wichtige Eigenschaften des Resolventenoperators zeigen. Insbesondere stellt sich dabei heraus, dass der Resolventenoperator gerade die Laplacetransformation der Halbgruppe zu dem entsprechenden Anfangswert ist.

Satz 10. *(i) die Resolventenoperatoren kommutieren, es gilt also*

$$R_\lambda R_\mu = R_\mu R_\lambda \tag{16}$$

(ii) (Resolventengleichung)
Seien $\lambda, \mu \in \rho(A)$, so gilt

$$R_\lambda - R_\mu = (\mu - \lambda) R_\lambda R_\mu \tag{17}$$

(iii) Falls $\lambda \in \mathbb{R}_+$, so so gilt $\lambda \in \rho(A)$, sowie

$$R_\lambda u = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t) u \, dt \quad u \in D(A) \tag{18}$$

Woraus weiterhin folgt $\|R_\lambda\| \leq \frac{1}{\lambda}$.

Beweis. Wir zeigen zuerst (i) durch direktes Ausrechnen

$$\begin{aligned} R_\lambda^{-1}R_\mu^{-1} &= \lambda\mu\mathbb{1}_X - \lambda A - \mu A + A^2 \\ &= R_\mu^{-1}R_\lambda^{-1} \end{aligned}$$

und somit folgt aus der Definition des Resloventenoperators und (16)

$$\begin{aligned} R_\lambda - R_\mu &= R_\mu^{-1}R_\mu R_\lambda - R_\lambda^{-1}R_\lambda R_\mu \\ &= \big(R_\mu^{-1} - R_\lambda^{-1}\big)R_\lambda R_\mu \\ &= \big((\mu\mathbb{1}_X - A) - (\lambda\mathbb{1}_X - A)\big)R_\lambda R_\mu \\ &= \big(\mu - \lambda\big)R_\lambda R_\mu \end{aligned}$$

womit (ii) gezeigt ist. Nun wenden wir uns der Darstellung des Resolventenoperators als die Laplace Transformation zu. Sei dafür $\lambda > 0$ und $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ eine Kontraktionshalbgruppe, also $\|S(t)\| \leq 1$ Somit ist das Integral aus (18) wohldefiniert, da gilt

$$\begin{aligned} \left|\int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)u\,dt\right| \leq \int_0^\infty \left|e^{-\lambda t}\right| \|S(t)\|\,\|u\|_X\,dt \qquad &\leq \|u\|_X \int_0^\infty e^{-\lambda t}\,dt \\ = \frac{1}{\lambda}\|u\|_X \quad < \quad +\infty \end{aligned}$$

Wir definieren nun $\tilde{R}_\lambda u := \int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)u\,dt$ und zeigen, dass $\tilde{R}_\lambda = R_\lambda$ sowie $\{\lambda > 0\} \subset \rho(A)$. Für den ersten Teil beginnen wir mit dem Differenzenquotienten für beliebiges $u \in X$ und $h > 0$

$$\begin{aligned} \frac{S(h)\tilde{R}_\lambda u - \tilde{R}_\lambda u}{h} =& \frac{1}{h}\left(\int_0^\infty e^{-\lambda t}\big(S(t+h)u - S(t)u\big)dt\right) \\ =& \frac{1}{h}\left(\int_0^\infty e^{-\lambda t}\big(S(t+h) + e^{-\lambda(-h)}S(t) - e^{-\lambda(-h)}S(t) - S(t)\big)u\,dt\right) \\ =& \frac{1}{h}\left(\int_0^\infty -e^{-\lambda(t-h)}S(t)u\,dt + \int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t+h)u\,dt\right. \\ &\left. + \int_0^\infty \big(e^{-\lambda(t-h)} - e^{-\lambda t}\big)S(t)u\,dt\right) \\ =& \frac{1}{h}\left(\int_0^\infty -e^{-\lambda(t-h)}S(t)u\,dt + \int_h^\infty e^{-\lambda(t-h)}S(t)u\,dt\right. \\ &\left. + \int_0^\infty \big(e^{-\lambda(t-h)} - e^{-\lambda t}\big)S(t)u\,dt\right) \\ =& -\frac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^h e^{-\lambda t}S(t)u\,dt + \left(\frac{e^{\lambda h} - 1}{h}\right)\int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)u\,dt \end{aligned}$$

Wir betrachten nun die beiden Integralterme einzeln und definieren deshalb

$$I_\lambda(h) := -e^{\lambda h}\frac{1}{h}\int_0^h e^{-\lambda t} S(t) u \, dt \tag{19}$$

$$J_\lambda(h) := \left(\frac{e^{\lambda h}-1}{h}\right)\int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t) u \, dt \tag{20}$$

Nun folgt für (19)

$$\begin{aligned}\left|-\frac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^h e^{-\lambda t} S(t) u \, dt + u\right| =& \left|\frac{1}{h}\right| \left|\int_0^h \big(-e^{-\lambda(t-h)} S(t) + \mathbb{1}_X\big) u \, dt\right| \\ \leq& \left|\frac{1}{h}\right| \left|h\right| \sup_{t\in[0,h]} \left|e^{-\lambda(t-h)} S(t) - \mathbb{1}_X\right| \|u\| \\ \to& \, 0 \quad \text{für } h \to 0_+\end{aligned}$$

Nun gilt für (20) mit L'Hospital

$$\lim_{h\to 0_+}\left(\frac{e^{\lambda h}-1}{h}\right)\int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t) u \, dt = \lim_{h\to 0_+} \lambda \frac{e^{\lambda h}}{1}\tilde{R}_\lambda u = \lambda \tilde{R}_\lambda u$$

Es folgt also aus (19) und (20) für die Grenzwertbetrachtung $h \to 0_+$ dass folgendes gilt

$$\lim_{h\to 0_+}\frac{S(h)\tilde{R}_\lambda u - \tilde{R}_\lambda u}{h} = A\tilde{R}_\lambda u = -u + \lambda \tilde{R}_\lambda u \tag{21}$$

Mit der Defnition von A folgt also

$$\big(\lambda \mathbb{1}_X - A\big)\tilde{R}_\lambda u = u \quad \forall u \in X \tag{22}$$

Auf der anderen Seite gilt nun für $u \in D(A)$

$$\begin{aligned}A\tilde{R}_\lambda u =& A\int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t) u \, dt \\ =& \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t) A u \, dt \\ =& \tilde{R}_\lambda A u\end{aligned}$$

Also haben wir unter betrachtung von (22)

$$\tilde{R}_\lambda\big(\lambda \mathbb{1}_X - A\big)u = u \quad \forall u \in D(A)$$

Somit ist für $\lambda > 0$ $\tilde{R}_\lambda$ links- und rechtsinvers zu $\big(\lambda \mathbb{1}_X - A\big)$ also invers. Es folgt aus der Definition der Resolventenmenge $\{\lambda \in \mathbb{R}\colon \lambda > 0\} \subset \rho(A)$ und abschließend $\tilde{R}_\lambda = \big(\lambda \mathbb{1}_X - A\big)^{-1} = R_\lambda$ und alle Aussagen sind gezeigt.

□

Beispiel 11. *("Heat Semigroup" auf* $\mathbb{R}^d$*)*
Sei $C_b\mathbb{R}^d$ *der Raum der stetigen beschränkten Funktionen auf* $\mathbb{R}^d$ *sowie*

$$P_t f(x) := \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} f(y)\,dy \tag{23}$$

Wir betrachten nun den Resolventenoperator angewandt auf f *und* P_t*. Dieser kann aufgrund der expliziten Form von* P_t *folgendermaßen geschrieben werden*

$$R_\lambda f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^\infty \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{d}{2}}} e^{-\lambda t} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} f(y)\,dt\,dy \tag{24}$$

Als kleine Erinnerung hier noch einmal die Definition des Laplaceoperators auf $C^2(\mathbb{R}^d)$

$$\Delta : C^2(\mathbb{R}^d) \to C(\mathbb{R}^d) \quad u \mapsto \Delta u := \sum_{i=1}^d \frac{d^2 u}{dx_i^2}$$

Dies erlaubt uns eine interessante Interaktion zwischen dem Laplaceoperator und dem Resolventenoperator zu Beobachten. Beachte hier, dass Δ *durch die Ableitung nach der Zeit ersetzt werden kann, da wir mit der Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung arbeiten.*

$$\begin{aligned}
\Delta_x R_\lambda f(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^\infty e^{-\lambda t} \Delta_x \left(\frac{1}{(4\pi t)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} \right) f(y)\,dt\,dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{(4\pi t)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} \right) f(y)\,dt\,dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \left[e^{-\lambda t} \left(\frac{1}{(4\pi t)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} \right) \right]_0^\infty f(y) \\
&+ \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{(4\pi t)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} \right) f(y)\,dt\,dy \\
&= -f(x) + \lambda R_\lambda f(x)
\end{aligned}$$

Aus den obigen Umformungen folgt insbesonere dass unter Betrachtung der Indentität aus (22)*, dass gilt:*

$$\begin{aligned} & \Delta_x R_\lambda f(x) = -f(x) + \lambda R_\lambda f(x) && (25) \\ \Leftrightarrow \quad & \Delta_x R_\lambda f(x) = \quad A R_\lambda f(x) && (26) \end{aligned}$$

Also gilt insbesondere für alle $u \in D(A)$ *mithilfe der Bijektivität aus dem obigen Satz* (10)

$$Au = \Delta_x u \tag{27}$$

3 der Satz von Hille-Yosida

Bemerkung 12. *In diesem Kapitel erarbeiten wir einen Satz, der es erlaubt die Generatoren von Kontraktionshalbgruppen zu Charakterisieren. Dabei werden wir im wesentlichen auf die Betrachtungen der Eigenschaften dieser Halbgruppen zurückgreifen.*

Satz 13. *(Hille-Yosida)*
Sei $A\colon D(A) \to X$ ein abgeschlossender linearer Operator und $D(A)$ sei dicht in X. So ist A der Infinitesimalgenerator einer Kontraktionshalbgruppe $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ genau dann, wenn gilt

$$(0, \infty) \subset \rho(A) \tag{28}$$

$$\|R_\lambda\| \leq \frac{1}{\lambda} \quad \lambda > 0 \tag{29}$$

Beweis. "$\Rightarrow$": folgt aus Satz (10)
"$\Leftarrow$": Sei A ein abgeschlossener Operator definiert auf $D(A)$ dicht in X. und gelte für A 28 und (29). Im folgenden werden wir eine Kontraktionshalbgruppe mit A als Infinitesimalgenerator konstruieren. Sei dafür $\lambda > 0$ und definiere

$$A_\lambda := -\lambda \mathbb{1}_X + \lambda^2 R_\lambda = \lambda A R_\lambda \tag{30}$$

Wir zeigen nun folgende Approximationseigenschaft für A

$$\lim_{\lambda\to\infty} A_\lambda u = Au \quad u \in D(A) \tag{31}$$

Dafür betrachten wir

$$\begin{aligned} \|\lambda R_\lambda u - u\| = \|(\lambda R_\lambda - \mathbb{1}_X)u\| &\overset{(21)}{=} \|AR_\lambda u\| \\ &\leq \|R_\lambda\|\|Au\| \overset{(18)}{\leq} \frac{1}{\lambda}\|Au\| \\ &\to 0 \quad \text{für } \lambda \to \infty \end{aligned}$$

Nun nutzen wir, dass $D(A)$ dicht in X liegt und folgern, dass $\lambda R_\lambda u \to u$ für alle $u \in X$ gilt. Wir betrachten nun die Definition von A_λ und sehen

$$A_\lambda u = \lambda A R_\lambda u = \lambda R_\lambda A u$$

Es folgt also das Zwischenresultat 31. Im nächsten Schritt definieren wir einen Kandidaten $S_\lambda(t) := e^{tA_\lambda}$ für die zu A_λ gehörige Halbgruppe und zeigen:

(i) $S_\lambda(t)$ ist eine Kontraktionshalbgruppe

(ii) $S_\lambda(t)$ wird tatsächlich von A_λ erzeugt

(iii) der Grenzwert von $S_\lambda(t)$ für $\lambda \to \infty$ ist wohldefiniert

Wir zeigen (i) Kontraktionshalbgruppe und benutzen wieder 18.
$S_\lambda(t)$ ist mit den Eigenschaften der Exponentialfunktion, sowie der Beschränktheit und Linearität von A direkt eine Halbgruppe. Es bleibt also die Kontraktionseigenschaft zu zeigen

$$\begin{aligned}
\|S_\lambda(t)\| = \|e^{tA_\lambda}\| &\overset{Def.}{=} \|e^{t(-\lambda \mathbb{1}_X + \lambda^2 R_\lambda)}\| \\
&\leq e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k} t^k}{k!} \|R_\lambda\|^k \leq e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k t^k}{k!} = 1
\end{aligned}$$

Als nächstes (ii)

$$\begin{aligned}
\frac{S_\lambda(h)u - u}{h} &= \frac{e^{tA_\lambda} - \mathbb{1}_X}{h} u \\
&= \frac{1}{h} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{h^k}{k!} A_\lambda^k \right) u \\
&\to A_\lambda u \quad \text{für } h \to 0_+
\end{aligned}$$

Es folgt zusätzlich $D(A) = X$, da der Resloventenoperator bijektiv von X nach X Abbildet und A abgeschlossen ist.

(iii) Wohldefiniertheit des Grenzwerts für $\lambda \to \infty$
Zuerst die Eindeutigkeit des Grenzwertes. Seien dafür $\lambda, \mu > 0$. Aus 16 folgt insbesondere $A_\lambda A_\mu = A_\mu A_\lambda$ und somit außerdem $A_\mu S_\lambda(t) = S_\lambda(t) A_\mu$ für alle $t > 0$. Wir benötigen dafür folgende leicht einzusehende Indentität

$$S_\lambda(t) - S_\mu(t) = \big[S_\mu(t-s) S_\lambda(s) \big]_0^t \tag{32}$$

und berechnen die Ableitung der Stammfunktion

$$\frac{d}{ds}\big(S_\mu(t-s)S_\lambda(s)\big) = (A_\lambda - A_\mu) S_\mu(t-s) S_\lambda(s) \tag{33}$$

$$\begin{aligned}
S_\lambda(t)u - S_\mu(t)u &\overset{(32)}{=} \int_0^t \frac{d}{ds}\big(S_\mu(t-s)S_\lambda(s)\big)\, ds \\
&\overset{(33)}{=} \int_0^t (A_\lambda - A_\mu) S_\mu(t-s) S_\lambda(s) u \, ds
\end{aligned}$$

Damit folgt also insbesondere

$$\|S_\lambda(t)u - S_\mu(t)u\| \leq t\|A_\lambda u - A_\mu u\| \to 0 \quad \lambda, \mu \to \infty$$

und der Grenzwert von $S_\lambda(t)$ ist eindeutig. Wir definieren also

$$S(t)u := \lim_{\lambda\to\infty} S_\lambda(t)u \quad \forall t \geq 0, u \in D(A) \tag{34}$$

Insbesondere ist die Konvergenz gleichmäßig für alle kompakten Teilmengen von $[0, \infty)$ Ein Argument über die Darstellung als Grenzwert liefert, dass $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ eine Kontraktionshalbgruppe auf X ist. Es bleibt zu zeigen, dass A der Infinitesimalgenerator von $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ ist. Wir bezeichnen den Infinitesimalgenerator der Kontraktionshalbgruppe als B und zeigen $A = B$. Wir betrachten zuerst folgende Abschätzung

$$\|S_\lambda(s)A_\lambda u - S(s)Au\| \leq \|S_\lambda(s)\|\|A_\lambda u - Au\| + \|\|S_\lambda(s) - S(s)\|\,\|Au\| \to 0$$

Für$\lambda \to \infty, u \in D(A)$. Also folgt insbesondere aus dem Ausdruck

$$S_\lambda(t)u - u = \int_0^t S_\lambda(s)A_\lambda u\,ds$$

mit einer Grenzwertbildung, dass

$$S(t)u - u = \int_0^t S(s)Au\,ds \quad u \in D(A). \tag{35}$$

Somit gilt für den Definitionsbereich nun $D(A) \subset D(B)$ und weiterhin

$$Bu = \lim_{t\to 0_+} \frac{S(t)u - u}{t} = Au \quad u \in D(A)$$

Nun folgt aus der Vorraussetzung, dass für $\lambda > 0, \lambda \in \rho(A) \cap \rho(B)$

$$\big(\lambda \mathbb{1}_X - B\big)\big(D(A)\big) = \big(\lambda \mathbb{1}_X - A\big)\big(D(A)\big) = X$$

Also stimmen die Operatoren A und B auf $D(A)$ überein. Es folgt nun mit der Bijektivität von R_λ, dass die Definitionsbereiche sogar übereinstimmen müssen, also folgt sogar $A = B$ und A ist gerade der Infinitesimalgenerator der Kontraktionshalbgruppe $\{S(t)\}_{t\geq 0}$.

□

4 Ausblick

Der Satz selbst hat weitreichende Konsequenzen für parabolische und hyperbolische lineare partielle Differenzialgleichungen und erlaubt es die Existenz von Lösungen für die entsprechenden Anfangswertprobleme im wesentlichen auf die Eigenschaften der Resolventenmenge und des zugehörigen Resolventenoperators zurückzuführen. Über die Dichtheit von $D(A)$ und der abgeschlossenheit von A lässt sich also die Fundamentallösung einder gewöhnlichen Differentialgleichung verallgemeinern und erlaubt es statt beschränlten Operatoren auch unbeschränkte Operatoren wie eben gerade Differentialoperatoren für A zu verwenden. Dies wird hier allerdings nicht mehr ausgeführt.

References

[1] Partial differential equations, L. Evans. American Mathematical Society, Providence, R.I., (2010)

[2] Partial Differential Equations, J. Jost, Springer-Verlag New York, Springer Science+Business Media LLC, 2013