Universität Mannheim
Fakultät für Wirtschaftsinformatik und Wirtschaftsmathematik
Lehrstuhl für Geometrische Analysis

Masterseminar
bei
Prof. Dr. Martin U. Schmidt

Der Zusammenhang zwischen Wärmeleitungsgleichung und Brownscher Bewegung

Veniamin Gvozdik

Abstract

In diesem Vortrag werden wir den Zusammenhang zwischen Wärmeleitungsgleichung und Brownscher Bewegung kennen lernen. Als erstes besprechen wir kurz die Wärmeleitungsgleichung und die Theorie der Halbgruppen. Danach definieren wir Brownsche Bewegung und die korrespondierte Halbgruppe. Als letztes zeigen wir, dass diese Halbgruppe bis zur Reparametrisierung mit der Wärmeleitungshalbgruppe übereinstimmt. Die Quelle für diesen Vortrag ist Kapitel 8 von Jost (2013).

1 Vorbereitung

Definition 1.1. (Wärmeleitungsgleichung) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen , $(0,T) \subset \mathbb{R}^+$ und $\Omega_T := \Omega \times (0,T)$.

Dann ist das Anfangswertproblem der Wärmeleitungsgleichung gegeben durch:

$$u_t(x,t) - \Delta u(x,t) = f(x,t), \quad (x,t) \in \Omega_T$$
$$u(x,0) = u_0(x)$$

Wobei man $\Delta u(x,t) := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i^2}$ Laplace Operator nennts.

Definition 1.2. (Fundamentalösung der Wärmeleitungsgleichung) Fundamentalösung der Wärmeleitungsgleichung ist gegeben durch

$$\Phi(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{\frac{-|x|^2}{4t}} & \text{für } x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}^n, t < 0 \end{cases}$$

Bemerkung. Wenn f eine zweimal stetig und beschränkt differenzierbare Funktion auf $\mathbb{R}^n \times [0,\infty)$ und u_0 eine stetige und beschränkte Funktion auf $\mathbb{R}^n$ sind, dann ist die Lösung der Wärmeleitungsgleichung gegeben durch :

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t) u_0(y) d^n y + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t-\tau) f(y,\tau) d^n y d\tau$$

Definition 1.3. (Stetige Halbgruppe) Sei B ein Banachraum und für $t > 0$ seien $T_t : B \to B$ stetige lineare Operatoren mit folgenden Eigenschaften:

i) $T_0 = \mathrm{Id}$

ii) $T_{t_1+t_2} = T_{t_1} \circ T_{t_2}$, für alle $t_1, t_2 \geq 0$

iii) $\lim_{t \to t_0} T_t \nu = T_{t_0} \nu$, für alle $t_0 \geq 0$ und für alle $\nu \in B$

Dann heißt dei Familie $\{T_t\}_{t \geq 0}$ eine <u>stetige Halbgruppe</u> (von Operatoren)

Definition 1.4. (Kontraktive Halbgruppe) Eine stetige Halbgruppe $\{T_t\}_{t\geq 0}$ auf dem Banachraum B mit einer Norm $||\cdot||$ heißt kontraktiv, wenn für alle $\nu \in B$ und für alle $t \geq 0$ gilt:

$$||T_t\nu|| \leq ||\nu||$$

Definition 1.5. (Infinitesimaler Generator der Halbgruppe) Sei $\{T_t\}_{t\geq 0}$ eine steige Halbgruppe auf einem Banachraum B. Sei ferner

$$D(A) := \{\nu \in B : \lim_{t\searrow 0} \tfrac{1}{t}(T_t - \mathrm{Id})\nu \ \text{ existiert}\} \subset B$$

Ein linearer Operator

$$A : D(A) \to B,\ \nu \mapsto A\nu := \lim_{t\searrow 0} \tfrac{1}{t}(T_t - \mathrm{Id})\nu$$

heißt infinitesimaler Generator der Halbgruppe $\{T_t\}_{t\geq 0}$.

Satz 1.6. *($D(A)$ liegt dicht in B) Sei $\{T_t\}_{t\geq 0}$ eine kontraktive steige Halbgruppe mit einem infinitesimalen Generator A. Dann liegt $D(A)$ dicht in B.*

Satz 1.7. *(Hille–Yosida) Sei B ein Banachraum und $A : D(A) \to B$ ein linearer Operator, wobei $D(A)$ eine dichte Teilmenge von B. Wenn die Resolvente $R(n, A) = (nId - A)^{-1}$ existiert $\forall n \in \mathbb{N}$ und*

$$||(Id - \tfrac{1}{n}A)^{-1}|| \leq 1,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Dann generiert A eine eindeutige kontraktive Halbgruppe.

Jetzt werden wir eine Technik kennen lernen, die uns hilft, aus einer L^1 Funktion eine C^∞ Funktion zu bekommen.

Definition 1.8. (Mollifier) Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in L^1(U)$ und $\varepsilon > 0$ beliebig.

i) $U_\varepsilon := \{x \in U : d(x, \partial U) > \varepsilon\}$ (wenn $U = \mathbb{R}^n$, dann ist $U_\varepsilon := \mathbb{R}^n$)

ii)
$$\eta(x) = \begin{cases} C_n \exp(\frac{1}{|x|^2-1}) & x \in B_1(0) \\ 0 & x \in \mathbb{R}^n \setminus B_1(0) \end{cases}$$

C_n ist eine Konstante, die von der Dimension abhängt, sodass $\int_{\mathbb{R}^n} \eta(x)dx = 1$ gilt.

iii) $\eta_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n}\eta(\frac{x}{\varepsilon})$ Diese Funktion nennt man standard mollifier.

iv) $f_\varepsilon : U_\varepsilon \to \mathbb{R}$,

$$x \mapsto f_\varepsilon(x) := (\eta_\varepsilon * f)(x) = \int_U \eta_\varepsilon(x - y)f(y)dy = \varepsilon^{-n} \int_U \eta(\tfrac{x-y}{\varepsilon})f(y)dy$$

Bemerkung. Man kann zeigen, dass $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow f_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$

2 Konstruktion des infinitesimalen Generators der Brownscher Bewegung

In diesem Abschnitt werden wir eine bestimmte Halbgruppe, die durch Brownsche Bewegung erzeugt wird, definieren. Sie beschreibt genau die Lösungen der Wärmeleitungsgleichung zu einem gegebenen Anfangswert. Wir werden sehen, dass der Laplaceoperator die Halbgruppe, die die Lösungen der Wärmeleitungsgleichung zu einem gegeben Anfangswert beschreibt, erzeugt. Andererseits lässt sich diese Halbgruppe durch bestimmte Eigenschaften vollständig charakterisieren. Die räumliche Homogenität drückt sich darin aus, dass die Koeffizienten der Wärmeleitungsgleichung nicht vom Ort abhängen. Die zeitliche Homogenität sieht man dadurch, dass die Koeffizienten der Wärmeleitungsgleichung nicht von der Zeit anhängen. Die Kontraktionseigenschaft sorgt dafür, dass alle λ mit positivem Realteil in der Resolventenmenge des Laplaceoperators liegen.

Bevor wir aber mit der Theorie anfangen, besprechen wir das folgende Gedankenexperiment. Wir betrachten ein Teilchen, das sich in einer messbaren Teilmenge $S \subset \mathbb{R}^n$ bewegt. Zum Zeitpunkt t befindet sich es im Punkt $x \in S$. Mit $P(x, t; s, E)$ bezeichnen wir die Wahrscheinlichkeit, dass das Teilchen zum Zeitpunkt $s \geq t$ in $E \subset S$ landet.

In unserem Fall gilt dann auch, dass $P(x, t; s, S) = 1$ und $P(x, t; s, \emptyset) = 0$. Zusätzlich möchten wir auch, dass diese Wahrscheinlichkeit unabhängig von der Position des Teilchens ist. Das heißt, dass unser Prozess die Markoveigenschaft besitzt, bzw. dass Chapman-Kolmogorov Gleichungen gelten.

Weiterhin möchten wir annehmen, dass unser Prozess nur von $s - t$ abhängt, bzw. homogen ist. Dann bekommt man, dass $P(x, t; s, E) = P(x, 0, s-t, E) =: P(s-t, x, E)$.

Somit haben wir die Definition von einem Markovprozess konstruiert.

Definition 2.1. (Markovprozess) Sei $\mathcal{B}$ eine σ-additive Menge der Teilmegen von S mit $S \in \mathcal{B}$. Sei ferner $P(t, x, E)$: $\mathbb{R}^+ \times S \times \mathcal{B} \to [0, 1]$ ein Operator, der folgende Bedingungen erfüllt:

i) $P(t, x, E) \geq 0$, $P(t, x, S) = 1$

ii) $P(t, x, E)$ ist σ-additiv bezüglich $E \in \mathcal{B}$ für alle t, x

iii) $P(t, x, E)$ ist $\mathcal{B}$-messbar bezüglich x für alle t, E

iv) $P(t + \tau, x, E) = \int_S P(\tau, y, E)P(t, x, y)dy$ für alle $t, \tau > 0, x, E$
(Chapman-Kolmogorov Gleichungen)

Dann nennt man $P(t, x, E)$ einen Markovprozess auf $(S, \mathcal{B})$

Bemerkung. Den Ausdruck $P(t, x, y)$ sollte man als eine Wahrscheinlichkeitsdichte verstehen.

Definition 2.2. ($T_t f$) Sei $L^\infty(S)$ der Raum von beschränkten Funktionen auf S. Für $f \in L^\infty(S)$ und $t > 0$ definiert man einen Integraloperator:

$$(T_t f)(x) := \int_S P(t,x,y)f(y)dy$$

Lemma 2.3. *(Halbgruppeneigenschaft von $T_t f$) Die Chapman-Kolmogorov Gleichungen impliziren die Halbgruppeneigenschaft für T_t, d.h.*

$$T_{t+s} = T_t \circ T_s \text{ für } t,s > 0$$

Beweis. Sei $f \in L^\infty(S)$ beliebig. Dann gilt für beliebige $t,s > 0$

$$(T_{t+s}f)(x) = \int_S P(t+s,x,y)f(y)dy = \int_S[\int_S P(s,z,y)P(t,x,z)dz]f(y)dy =$$
$$= \int_S P(t,x,z)[\int_S P(s,z,y)f(y)dy]dz = \int_S P(t,x,z)[(T_s f)(z)]dz = (T_t \circ T_s f)(x)$$

Daraus folgt $T_{t+s} = T_t \circ T_s$ für $t,s > 0$ □

Lemma 2.4. *(Kontraktionseigenschaft von T_t) Sei $f \in L^\infty(S)$ beliebig, dann besitzt T_t die Kontraktionseigenschaft d.h.*

$$\sup_{x\in S} |T_t f(x)| \leq \sup_{x\in S} |f(x)|$$

Beweis. Aus der Definition 2.1 (i) wissen wir, dass $P(t,x,E) \geq 0$ und $\int_S P(t,x,y)dy = 1$. Daher gilt
$\sup_{x\in S} |T_t f(x)| = \sup_{x\in S} |\int_S P(t,x,y)f(y)dy| \leq \sup_{x\in S} |f(x)|$ □

Um eine stetige Halbgruppe von Operatoren zu bekommen, brauchen wir zusätzliche Eigenschaften für unseren Prozess.

Ab jetzt betrachten wir nur den Fall $S = \mathbb{R}^d$

Definition 2.5. (räumlich homogen) Ein Markovprozess $P(t,x,E)$ nennt man räumlich homogen, wenn für alle Translationen $i : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ gilt,

$$P(t,i(x),i(E)) = P(x,t,E)$$

Definition 2.6. (Brownsche Bewegung) Ein räumlich homogener Markovprozess $P(t,x,E)$ heißt Brownsche Bewegung, wenn für alle $\varrho > 0$ und für alle $x \in \mathbb{R}^d$ gilt,

$$\lim_{t\searrow 0} \frac{1}{t} \int_{|x-y|>\varrho} P(t,x,y)dy = 0$$

Satz 2.7. *(Kontraktive Halbgruppe) Sei B ein Banachraum von beschränkten und gleichmäßig stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}^d$ zusammen mit der Supremumsnorm. Sei ferner $P(t,x,E)$ eine Brownsche Bewegung zusammen mit dem Integraloperator*

$$(T_t f)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} P(t,x,y)f(y)dy \quad \text{für } t > 0,$$
$$T_0 f = f.$$

Dann definiert $\{T_t\}_{t\geq 0}$ eine kontraktive Halbgruppe auf B.

Beweis. Wir werden den Beweis in 4 Schritte aufteilen.

Schritt 1 (Halbgruppeneigenschaft und Konraktionseigenschaft)

Halbgruppeneigenschaft, bzw. Konraktionseigenschaft von $\{T_t\}_{t\geq 0}$ folgen aus dem Lemma 2.3, bzw Lemma 2.4.

Wir müssen noch Stetigkeit von $\{T_t\}_{t\geq 0}$ nachweisen.

Schritt 2 ($iT_t = T_t i$)

Sei i eine Translation vom Euklidischen Raum und $f \in B$ beliebig. Definiere

$$if(x) := f(ix)$$

Wegen $d(iy) = dy$ und räumlicher Homogenität gilt:

$$iT_t f(x) = T_t f(ix) = \int_{\mathbb{R}^d} P(t, ix, y) f(y) dy = \int_{\mathbb{R}^d} P(t, ix, iy) f(iy) d(iy) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} P(t, ix, iy) f(iy) dy = \int_{\mathbb{R}^d} P(t, x, y) f(iy) dy = T_t \; if(x)$$

Das bedeutet nichts anderes, als:

$$iT_t = T_t i$$

Schritt 3 ($T_t f$ ist gleichmäßig stetig bzgl. x)

Seien $x, y \in \mathbb{R}^d$ zwei beliebige Punkte. Wir können eine Translation $i : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ finden, sodass $ix = y$. Dann folgt aus $iT_t = T_t i$, dass

$$|(T_t f)(x) - (T_t f)(y)| = |(T_t f)(x) - (T_t f)(ix)| = |(T_t f)(x) - (iT_t f)(x)| = |(T_t(f - if)(x)|$$

Nach Voraussetzung ist f gleichmäßig stetig. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig, dann existiert ein $\delta > 0$, sodass gilt: $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Weil $ix = y$ folgt sofort, dass $|z - iz| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(iz)| < \varepsilon$ für $z \in \mathbb{R}$. Deswegen ist $T_t f$ auch gleichmäßig stetig, nämlich:

$$|T_t(f - if)(x)| = |\int_{\mathbb{R}^d} P(t, x, z)(f(z) - f(iz)) dz| < \sup_z |f(z) - f(iz)| < \varepsilon$$

Wie man auch sieht, diese Abschätzung hängt nicht von t ab.

Schritt 4 ($T_t f$ ist stetig bzgl. t)

Seien $t \geq s$, $x \in \mathbb{R}^d$, $\varrho > 0$ und $f \in B$ beliebig. Definiere $\tau := t - s$ und $g := T_s f$. Weil $T_t f$ gleichmäßig stetig ist und $\int_{\mathbb{R}^d} P(t, x, y) dy = 1$ gilt:

$$|(T_t f(x) - T_s f(x)| = |(T_\tau g(x) - g(x)| = |\int_{\mathbb{R}^d} P(\tau, x, y) g(y) dy - g(x)| =$$

$$= |\int_{\mathbb{R}^d} P(\tau, x, y) g(y) dy - \int_{\mathbb{R}^d} P(\tau, x, y) g(x) dy| = |\int_{\mathbb{R}^d} P(\tau, x, y)(g(y) - g(x)) dy| =$$

$$= |\int_{|x-y|\leq\varrho} P(\tau, x, y)(g(y) - g(x)) dy + \int_{|x-y|>\varrho} P(\tau, x, y)(g(y) - g(x)) dy| \leq$$

$$\leq |\int_{|x-y|\leq\varrho} P(\tau, x, y)(g(y) - g(x)) dy| + |\int_{|x-y|>\varrho} P(\tau, x, y)(g(y) - g(x)) dy| \leq$$

$$\leq \underbrace{|\int_{|x-y|\leq\varrho} P(\tau, x, y)(g(y) - g(x)) dy|}_{(I)} + \underbrace{2 \sup_{z\in\mathbb{R}} |f(z)| \int_{|x-y|>\varrho} P(\tau, x, y) dy}_{(II)}$$

Jetzt kann man für ein gegebenes $\varepsilon > 0$ ein $\varrho > 0$ finden, sodass $(I) < \varepsilon/2$ und dann für dieses ϱ ein τ finden, sodass $(II) < \varepsilon/2$. Wegen der räumlichen Homogenität kann man so ein τ unabhängig von x und y wählen. Somit haben wir die Stetigkeit von $T_t f$ bzgl. t gezeigt.

$\square$

Satz 2.8. *(Infinitesimaler Generator der Brownscher Bewegung) Sei $P(t, x, E)$ eine unter allen Isometrien invariante Brownsche Bewegung, d.h.*

$$P(t, i(x), i(E)) = P(x, t, E) \text{ für alle Isometrien } i : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d \ ,$$

Dann ist der infinitesimale Generator der durch diesen Prozess definierten kontraktiven Halbgruppe gegeben durch:

$$A = c\Delta,$$

wobei $c > 0$ und Δ ist Laplace Operator.
Diese Halbgruppe stimmt bis zur Reparametrisierung mit der Wärmeleitungshalbgruppe überein, d.h.

$$P(t, x, y) = \frac{1}{(4\pi ct)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4ct}}.$$

Beweis. Wir werden den Beweis in sechs Schritte aufteilen.

Behauptung (1) : $D(A)$ liegt dicht in B.

Sei B ein Banachraum von beschränkten und gleichmäßig stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}^d$ zusammen mit der Supremumsnorm. Nach dem Satz 2.7 ist $\{T_t\}_{t \geq 0}$ eine kontraktive Halbgruppe auf B. Deswegen folgt aus dem Satz 1.6, dass $D(A)$ dicht in B liegt.

Behauptung (2) : $D(A) \cap C^\infty(\mathbb{R}^d)$ liegt auch dicht in B.

Wir wissen, dass $D(A) \subset B$, deswegen folgt sofort, dass $D(A) \cap C^\infty(\mathbb{R}^d) \subset B$.
Jetzt müssen wir nachweisen, dass es für alle $f \in B$ und für alle $r > 0$ ein $f_r \in D(A) \cap C^\infty(\mathbb{R}^d)$ existiert, sodass $||f - f_r||_\infty < r$. Dafür benutzen wir Mollification Technik. Sei $f \in D(A)$, dann ist $f_r(x) = r^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \eta(\frac{x-y}{r}) f(y) dy$. Definiere $z := \frac{x-y}{r}$, dann ist $f_r(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \eta(z) f(x - zr) dz$.
Wir haben angenommen, dass unser Prozess translationsinvariant ist. Deswegen wissen wir, dass wenn $f(x) \in D(A)$, dann muss auch $(i_{rz} f)(x) := f(x - rz) \in D(A)$ für alle $r > 0$, $z \in \mathbb{R}^d$, weil

$$A(i_{rz}f)(x) = \lim_{t \searrow 0} \tfrac{1}{t} \Big(\textstyle\int_{\mathbb{R}^d} P(t, x, y)(i_{rz}f)(y) dy - (i_{rz}f)(x) \Big) =$$
$$= \lim_{t \searrow 0} \tfrac{1}{t} \Big(\underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} P(t, x - rz, y - rz) f(y - rz) d(y - rz)}_{(*)} - f(x - rz) \Big) = Af(x - rz)$$

Jetzt approximieren wir das Integral $(*)$ mit den Treppenfunktion von der Form $\sum_\nu c_\nu f(x - rz_\nu)$.

Dann wissen wir, dass wenn $\lim_{t\searrow 0}\frac{1}{t}\Big(\int_{\mathbb{R}^d}P(t,x,y)f(y)dy-f(x)\Big)$ existiert, muss auch $f_r(x)$ diese Bedingung erfüllen , deswegen liegt $f_r\in D(A)$.

Weil $f_r\in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ für $r>0$ und konvergiert für $r\to 0$ gleichmäßig gegen f, folgt dass $D(A)\cap C^\infty(\mathbb{R}^d)$ dicht in B liegt.

Behauptung (3) : Es existiert eine Funktion $\varphi\in D(A)\cap C^\infty(\mathbb{R}^d)$, sodass gilt

$$\sum_{j,k=1}^d x_jx_k\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j\partial x_k}(0)\geq\sum_{j=1}^d x_j^2,\text{ für alle } x\in\mathbb{R}^d$$

Um das zu zeigen, nehmen wir eine Funktion $\psi\in B$ mit

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x_j\partial x_k}(0)=2\delta_{jk}=\begin{cases}2 & \text{für } j=k\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

Weil $D(A)\cap C^\infty(\mathbb{R}^d)$ dicht in B liegt, existiert eine Folge $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset D(A)\cap C^\infty(\mathbb{R}^d)$, die gleichmäßig gegen ψ konvergiert.

Jetzt wenden wir Mollification Technik auf $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und erhalten, dass:
$\frac{\partial^2(f_n)_r}{\partial x_j\partial x_k}(0)=\frac{\partial^2(r^{-d}\int_{\mathbb{R}^d}\eta(\frac{x-y}{r})f_n(y)dy)}{\partial x_j\partial x_k}\Big|_{x=0}=r^{-d}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{\partial^2\eta(\frac{x-y}{r})}{\partial x_j\partial x_k}\Big|_{x=0}f_n(y)dy\to_{n\to\infty}$
$\to_{n\to\infty} r^{-d}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{\partial^2\eta(\frac{x-y}{r})}{\partial x_j\partial x_k}\Big|_{x=0}\psi(y)dy$

Jetzt können wir die Ableitung nach x mit der Ableitung nach y ersetzen. η hat einen kompakten Träger, deswegen wenn wir den obigen Term zwei mal partiell integrieren, erhalten wir, dass
$r^{-d}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{\partial^2\eta(\frac{x-y}{r})}{\partial x_j\partial x_k}\Big|_{x=0}\psi(y)dy=r^{-d}\int_{\mathbb{R}^d}\eta(\frac{x-y}{r})\frac{\partial^2\psi(y)}{\partial x_j\partial x_k}dy\to_{r\to 0}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_j\partial x_k}(0)=2\delta_{jk}$

Deswegen können wir $\varphi=(f_n)_r$ für passende $n\in\mathbb{N}$ und $r>0$ setzten, um $x_jx_k\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j\partial x_k}(0)\geq\sum_{j=1}^d x_j^2$, für alle $x\in\mathbb{R}^d$ zu bekommen. Wegen der Euklidischen Invarianz gibt es für jedes $x_o\in\mathbb{R}^d$ eine solche Funktion φ, die folgende Bedingung erfüllt:

$$(x_j-x_{0,j})(x_k-x_{0,k})\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j\partial x_k}(x_0)\geq\sum_{j=1}^d(x_j-x_{0,j})^2,\text{ für alle } x\in\mathbb{R}^d$$

Behauptung (4) : Für alle $x_0\in\mathbb{R}^d$, $j,k\in\{1,\ldots,d\}$, $r>0$, $t>0$, $x_0=(x_{0,1},\ldots x_{0,d})$ gilt:

$$(a)\int_{|x-x_0|\leq r}(x_j-x_{0,j})P(t,x_0,x)dx=0$$

$$(b)\int_{|x-x_0|\leq r}(x_j-x_{0,j})^2P(t,x_0,x)dx=\int_{|x-x_0|\leq r}(x_k-x_{0,k})^2P(t,x_0,x)dx$$

$$(c)\int_{|x-x_0|\leq r}(x_j-x_{0,j})(x_k-x_{0,k})P(t,x_0,x)dx=0,\text{ für } j\neq k$$

Wähle $j \in \{1, \dots, d\}$ und betrachte eine Euklidische Isometrie $i : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, die wie folgt definiert ist:

$$\begin{aligned} i(x_j - x_{0,j}) &= -(x_j - x_{0,j}), \\ i(x_k - x_{0,k}) &= x_k - x_{0,k}, \quad \text{für } k \neq j \end{aligned}$$

Diese Abbildung ist die Spiegelung an einer Hyperebene im Punkt x_0 in die Richtung, die orthogonal zu der j-te Koordinate ist.

Wegen der Invarianz von P, bekommt man, dass $\int_{|x-x_0|\le r}(x_j - x_{0,j})P(t, x_0, x)dx = \int_{|x-x_0|\le r} i(x_j - x_{0,j})P(t, i(x_0), i(x))dx = -\int_{|x-x_0|\le r}(x_j - x_{0,j})P(t, x_0, x)dx$

Also gilt $\int_{|x-x_0|\le r}(x_j - x_{0,j})P(t, x_0, x)dx = 0$

Wegen der Invarianz von P, bzgl. aller Drehungen auf $\mathbb{R}^d$, bekommen wir, dass: $\int_{|x-x_0|\le r}(x_j - x_{0,j})^2 P(t, x_0, x)dx = \int_{|x-x_0|\le r}(x_k - x_{0,k})^2 P(t, x_0, x)dx$ für alle $x_0 \in \mathbb{R}^d$, $j, k = 1, \dots, d$, $r > 0$, $t > 0$

Analog wie bei (a) bekommt man, dass $\int_{|x-x_0|\le r}(x_j - x_{0,j})(x_k - x_{0,k})P(t, x_0, x)dx = 0$, für $j \neq k$, wenn $x_0 \in \mathbb{R}^d$, $j, k \in \{1, \dots, d\}$, $r > 0$, $t > 0$

Behauptung (5) : $A\varphi(x_0)$ existiert für ein $\varphi \in D(A) \cap C^2(\mathbb{R}^d)$.

Sei $\varphi \in D(A) \cap C^2(\mathbb{R}^d)$ und $\tau \in [0, 1)$ beliebig.

$A\varphi(x_0) = \lim_{t\searrow 0} \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}^d} P(t, x_0, x)(\varphi(x) - \varphi(x_0))dx =$

$\lim_{t\searrow 0} \frac{1}{t}(\int_{|x-x_0|\le\varepsilon} P(t, x_0, x)(\varphi(x) - \varphi(x_0))dx + \underbrace{\int_{|x-x_0|>\varepsilon} P(t, x_0, x)(\varphi(x) - \varphi(x_0))dx}_{=0 \quad \text{Brownsche Bewegung}}) =$

$= \lim_{t\searrow 0} \frac{1}{t} \int_{|x-x_0|\le\varepsilon} P(t, x_0, x)(\varphi(x) - \varphi(x_0))dx$

Nach der Anwendung der Taylor Entwicklung, erhalten wir, dass $A\varphi(x_0)$ existiert und nichts anderes ist, als

$A\varphi(x_0) = \lim_{t\searrow 0} \frac{1}{t} \int_{|x-x_0|\le\varepsilon} P(t, x_0, x)(\varphi(x) - \varphi(x_0))dx =$

$= \lim_{t\searrow 0} \frac{1}{t} \int_{|x-x_0|\le\varepsilon}((x - x_0) \cdot \nabla\varphi(x_0))P(t, x_0, x)dx +$
$+ \lim_{t\searrow 0} \frac{1}{t} \int_{|x-x_0|\le\varepsilon} \frac{1}{2}[(x - x_0)^T \mathrm{Hesse}_\varphi(x + \tau(x - x_0))(x - x_0)]P(t, x_0, x)dx =$

$$= \lim_{t\searrow 0} \underbrace{\frac{1}{t} \int_{|x-x_0|\le\varepsilon} [\sum_{j=1}^{d}(x_j - x_{0,j})\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}(x_0)] \; P(t, x_0, x)dx}_{(I)} +$$

$$\lim_{t\searrow 0} \underbrace{\frac{1}{t} \int_{|x-x_0|\le\varepsilon} [\frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{d} (x_j - x_{0,j})(x_k - x_{0,k}) \times \frac{\partial\varphi}{\partial x_j \partial x_k}(x + \tau(x - x_0))] \; P(t, x_0, x)dx}_{(II)}$$

Aus (4) folgt, dass $(I) = 0$

Weil $\lim_{t\searrow 0}(II)$ existiert, folgt aus (3) und $P(t,x_0,x)\geq 0$, dass

$$\limsup_{t\searrow 0}\tfrac{1}{t}\int_{|x-x_0|\leq\varepsilon}\sum_{j=1}^d(x_j-x_{0,j})^2P(t,x_0,x)dx<\infty$$

Wegen der Eigenschaft der Brownscher Bewegung, hängt dieses Limes superior nicht von ε ab. Für $\liminf$ folgt die Aussage analog.

Behauptung (6) : $Af(x_0)=c\Delta f(x_0)$

Jetzt kombinieren wir alle vorherige Schritte zusammen.

Sei $f\in D(A)\cap C^2(\mathbb{R}^d)$ und $\varepsilon>0$ beliebig. Wir benutzen wieder die Taylor Entwicklung von f im Punkt x_0 und erhalten, dass:

$$\tfrac{1}{t}(T_tf(x_0)-f(x_0))=\tfrac{1}{t}\int_{\mathbb{R}^d}(f(x)-f(x_0))P(t,x_0,x)dx=$$
$$=\tfrac{1}{t}[\int_{|x-x_0|\leq\varepsilon}(f(x)-f(x_0))P(t,x_0,x)dx]+\tfrac{1}{t}[\int_{|x-x_0|>\varepsilon}(f(x)-f(x_0))P(t,x_0,x)dx]=$$
$$=\tfrac{1}{t}[\int_{|x-x_0|>\varepsilon}(f(x)-f(x_0))P(t,x_0,x)dx]$$
$$+\tfrac{1}{t}\int_{|x-x_0|\leq\varepsilon}[\sum_{j=1}^d(x_j-x_{0,j})\tfrac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)]\ P(t,x_0,x)dx+$$
$$+\tfrac{1}{t}\int_{|x-x_0|\leq\varepsilon}[\tfrac{1}{2}\sum_{j,k=1}^d(x_j-x_{0,j})(x_k-x_{0,k})\times\tfrac{\partial f}{\partial x_j\partial x_k}(x+\tau(x-x_0))]\ P(t,x_0,x)dx+$$
$$+\tfrac{1}{t}\int_{|x-x_0|\leq\varepsilon}[\sum_{j,k=1}^d(x_J-x_{0,j})(x_k-x_{0,k})\sigma_{ij}(\varepsilon)]\ P(t,x_0,x)dx$$

Wegen (4a) und (4c) bekommen wir, dass:

$$\tfrac{1}{t}(T_tf(x_0)-f(x_0))=$$
$$=\underbrace{\frac{1}{t}[\int_{|x-x_0|>\varepsilon}(f(x)-f(x_0))P(t,x_0,x)dx]+}_{(I)}$$
$$\underbrace{+\frac{1}{t}\int_{|x-x_0|\leq\varepsilon}[\ \sum_{j=1}^d(x_j-x_{0,j})^2\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(x_0)]\ P(t,x_0,x)dx+}_{(II)}$$
$$\underbrace{+\frac{1}{t}\int_{|x-x_0|\leq\varepsilon}[\sum_{j,k=1}^d(x_J-x_{0,j})(x_k-x_{0,k})\sigma_{ij}(\varepsilon)]\ P(t,x_0,x)dx}_{(III)}$$

Wir lassen jetzt $t\to 0$ laufen. Nach der Definition der Brownscher Bewegung konvergiert $(I)\to 0$ für $t\to 0$ für alle $\varepsilon>0$.

Jetzt schauen wir (III) genauer an. Unsere Funktion ist C^2, deswegen gilt $\lim_{\varepsilon\to 0}\sigma_{ij}=0$. Zusammen mit dem Resultat von (5) folgt, dass $(III)\to 0$ für $\varepsilon\to 0$ für alle $t>0$.

Es bleibt nur noch (II) übrig. Wie wir in (5) gesehen haben, die Grenzwerte von (II) unabängig von ε sind, deswegen bekommt man für alle $\varepsilon>0$ die Existenz von $Af(x_0)$, nämlich

$$Af(x_0)=\lim_{t\searrow 0}\tfrac{1}{t}\int_{|x-x_0|\leq\varepsilon}[\ \sum_{j=1}^d(x_j-x_{0,j})^2\tfrac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(x_0)]\ P(t,x_0,x)dx$$

Nach (3) gilt, dass $\int_{|x-x_0|\leq\varepsilon}[\ \sum_{j=1}^{d}(x_j - x_{0,j})^2]\ P(t,x_0,x)dx$ unabhängig von ε ist.

Nach (4b) gilt, dass $\sum_{j=1}^{d}(x_j - x_{0,j})^2$ für jedes $j = 1, \dots d$ existiert und unabhängig von j ist. Wegen der Translationsinvarianz ist diese Summe auch unabängig von x_0. Dann bekommen wir, dass

$$Af(x_0) = \underbrace{\lim_{t\searrow 0} \frac{1}{t} \int_{|x-x_0|\leq\varepsilon} [\ (x_j - x_{0,j})^2]\ P(t,x_0,x)dx}_{:=c}\ \textstyle\sum_{j=1}^{d} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(x_0) = c\Delta f(x_0)$$

Weil A die Voraussetzungen vom Satz 1.7 erfüllt, folgt die Behauptung. $\square$

Literatur

[Jost 2013] Jost, Jürgen: *Graduate Texts in Mathematics*. Bd. 214: *Partial Differential Equations*. Springer-Verlag New York, 2013