Martin Schmidt
Volker Eing

Analysis II

13. Februar 2020

1. Übung

1. Offene und abgeschlossene Mengen.
Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeige die folgenden Aussagen:

(a) Beliebige Vereinigungen offener Mengen in (X, d) sind offen. *(3 Punkte)*

(b) Beliebige Durchschnitte abgeschlossener Mengen in (X, d) sind abgeschlossen *(3 Punkte)*

(c) Beliebige Vereinigung abgeschlossener Mengen in (X, d) sind nicht unbedingt abgeschlossen. *(3 Punkte)*

2. Wie man aus Metriken weitere konstruiert.

(a) Gegeben seien eine Metrik $d : X \times X \to \mathbb{R}$ auf einer Menge X sowie eine monoton steigende Funktion $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ mit $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ und der Eigenschaft

$$\forall\, t, s \in \mathbb{R}_0^+ \;:\; f(t+s) \leq f(t) + f(s)\ .$$

Zeige, dass dann

$$\widetilde{d} : X \times X \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto f(d(x, y))$$

eine weitere Metrik auf X ist. *(3 Punkte)*

(b) *Zeige*, dass die Funktion $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R},\ t \mapsto \frac{t}{1+t}$ die Voraussetzungen aus (a) erfüllt. *(4 Punkte)*

(c) *Folgere* aus (a) und (b), dass durch $\widetilde{d}(x, y) := \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ eine weitere Metrik auf $\mathbb{R}$ definiert wird. *(1 Punkt)*

(d) Seien $x := (x_i)_{i\in\mathbb{N}}, y := (y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ Folgen in $\mathbb{R}$. Zeige die Konvergenz der Reihe

$$d_F(x, y) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|}.$$

(1 Punkt)

(e) *Zeige* mit Hilfe von (c) und (d), dass durch d_F auf dem Raum (s) aller Folgen in $\mathbb{R}$ eine Metrik gegeben ist, (s) also ein metrischer Raum ist. Eine solche Metrik heißt *Fréchet-Metrik.*

(3 Punkte)

3. Normen.

(a) Sei V ein Vektorraum mit Norm $\|\cdot\|$. Dann bezeichnet man die Menge $\{\, v \in V \mid \|v\| = 1 \,\}$ aller Vektoren von V mit der Norm 1 als *Einheitskugel* in $(V, \|\cdot\|)$.

(i) *Skizziere* die Einheitskugeln von $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$, $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ und $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$.

(3 Punkte)

(ii) Kann man an den Bildern aus (i) ablesen, dass diese drei Normen äquivalent sind?

(Nur zum Nachdenken)

(b) Sei $x \in \mathbb{R}^n$. *Zeige*, dass die Maximumsnorm der Grenzwert der $\boldsymbol{p}$-Normen ist, d.h.

$$\|x\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|x\|_p \,. \qquad \textit{(6 Punkte)}$$

[*Tipp:* Ist $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ gegeben, so dividiere man den Ausdruck für $\|x\|_p$ durch $\max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$.]

(c) Sei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Wir bezeichnen mit $C^1([a,b], \mathbb{R})$ den Raum der auf $[a,b]$ stetigen und auf (a,b) stetig differenzierbaren Funktionen $[a,b] \to \mathbb{R}$, deren Ableitung sich stetig auf $[a,b]$ fortsetzen lässt. Ferner sei für $f \in C^1([a,b], \mathbb{R})$

$$\|f\|_0 := \sup\{\, |f(x)| \,\big|\, x \in [a,b] \,\} \quad \text{und} \quad \|f\|_1 := \|f\|_0 + \sup\{\, |f'(x)| \,\big|\, x \in [a,b] \,\} \,.$$

(i) *Zeige*, dass durch $\|\cdot\|_0$ und $\|\cdot\|_1$ zwei Normen auf $C^1([a,b], \mathbb{R})$ definiert werden.

(6 Punkte)

(ii) *Beweise oder widerlege*: $\|\cdot\|_0$ und $\|\cdot\|_1$ sind zueinander äquivalent. *(6 Punkte)*
[*Tipp:* Untersuche $f(x) := \sin(cx)$ mit $c \geq \frac{2\pi}{b-a}$.]

4. Grundlagen metrischer Räume.
Belege die folgenden Aussagen *durch jeweils ein Beispiel*:

(a) Es gibt einen metrischen Raum, in dem jede Teilmenge zugleich offen und abgeschlossen ist.

(4 Punkte)

(b) Der Schnitt von unendlich vielen offenen Mengen ist im Allgemeinen weder offen noch abgeschlossen. *(4 Punkte)*

Die Lösungen sind bis spätestens **Donnerstag, den 20. Februar 2020, 10:00 Uhr (Osteingang)** in den entsprechenden Briefkasten (Eingang A5-Gebäude, Teil C) einzuwerfen. Welcher Tutorin, welchem Tutor sie zugeteilt sind, klärt sich spätestens anfangs der Woche vom 17.Februar. Bitte schauen Sie dazu in das Portal[2]. Abgaben zu zweit sind erlaubt und erwünscht.

Bemerkung: Falls die Tutorienverteilung am Mittwoch und Donnerstag über das Portal[2] bei Einzelpersonen noch nicht geglückt ist, gibt es die Möglichkeit noch einmal in der Großübung am Mittwoch darüber zu sprechen.