Martin Schmidt
Volker Eing

Analysis II

26. März 2020

7. Übung

21. Gradient, Rotation, Divergenz.

(a) Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ in $x \in \mathbb{R}^n$ differenzierbar. *Zeige*, dass für jeden Vektor $e \in \mathbb{R}^n$ mit $\|e\| = 1$ gilt:

$$-\|\nabla f(x)\| \;\le\; f'(x) \cdot e \;\le\; \|\nabla f(x)\| \,. \tag{$\star$}$$

Zeige zudem, dass für $\nabla f(x) \neq 0$ in $(\star)$ in der linken bzw. rechten Ungleichung Gleichheit gilt, wenn $e = -\frac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|}$ bzw. $e = \frac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|}$ ist. [*Hinweis:* Cauchy-Schwarzsche Ungleichung]

(3 Punkte)

Interpretation: $\nabla f(x)$ gibt die Richtung und den Betrag des größten Anstiegs von f an der Stelle x an.

(b) Sei $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein zweimal stetig differenzierbares Vektorfeld. *Berechne* $\operatorname{div}(\operatorname{rot} g)$.

(5 Punkte)

(c) *Zeige*, dass, wenn das differenzierbare Vektorfeld $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ Gradient einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ist, dann gilt $\operatorname{rot}(g) = 0$. *(5 Punkte)*

(d) Es sei

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\; (x, y, z) \mapsto (2 + 3y^2 + z(8x + y), x(6y + z), x(4x + y)).$$

(i) *Zeige* $\operatorname{rot}(g) = 0$. *(3 Punkte)*

(ii) *Zum Knobeln: Finde* eine Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, deren Gradient das Vektorfeld g ist.

(5 Zusatzpunkte)

22. Zu Satz 10.27: Hinreichendes Kriterium für lokale Extremwerte.

(a) Es sei $\beta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform. *Zeige:* Wenn β *positiv definit* (bzw. *negativ definit*) ist, d.h. wenn $\beta(x, x) > 0$ (bzw. $\beta(x, x) < 0$) für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt, dann gibt es ein $\delta > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit

$$\beta(x, x) \ge \delta \, \|x\|^2 \quad \text{bzw.} \quad \beta(x, x) \le -\delta \, \|x\|^2.$$

(10 Punkte)

[*Tipp:* Satz 9.37]

(b) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge, $f : U \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion und $x_0 \in U$ ein kritischer Punkt von f. Indem man zeigt, dass die Voraussetzungen von Satz 10.27 erfüllt sind, *beweise* man: Wenn

$$f''(x_0)(x, x) > 0 \quad \text{bzw.} \quad f''(x_0)(x, x) < 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt, so besitzt f in x_0 ein lokales Minimum (bzw. ein lokales Maximum).

(2 Punkte)

Bemerkung. Diese Verschärfung von Satz 10.27 gilt nicht, wenn f auf einem unendlich-dimensionalen normierten Vektorraum definiert ist, siehe Beispiel 10.28 und dazu auch nochmal Aufgabe 14.

23. Extremwertsuche.

Bestimme alle lokalen Extrema der Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ aus Aufgabe 18 (a), und *entscheide* jeweils, ob es sich um ein Maximum oder ein Minimum handelt. Hierfür benutze eine beliebige Darstellung der Hesse-Matrix (es ist nicht zwingend nötig, die Notation aus der großen Übung zu benutzen). *(3+4+4 Punkte)*

24. Ein Taylorpolynom.

Es sei

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \sin(xy)\ .$$

(a) *Berechne* das Taylorpolynom zweiter Ordnung $T_{2,\left(\pi,\frac{1}{2}\right)} f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ von f an der Stelle $\left(\pi, \frac{1}{2}\right)$. Benutze hierfür die Notation aus der großen Übung, um die zweite Ableitung darzustellen. *(4 Punkte)*

(b) Benutze $T_{2,\left(\pi,\frac{1}{2}\right)} f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, um eine Näherung für $\sin(xy)$ an $(0.9, 1.6)$ zu *berechnen* und *vergleiche* diese Näherung mit dem Ergebnis des Taschenrechners. *(3 Punkte)*

(c) Prüfe rechnerisch nach, dass der Satz von Schwarz tatsächlich für die zweite Ableitung erfüllt ist. *(4 Punkte)*

Es sei X ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$ und $f : X \to \mathbb{R}$ sowie $\widetilde{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ seien Funktionen mit $\widetilde{f}|_X = f$ und $\widetilde{f}$ differenzierbar.

(a) *Zeige*, dass f differenzierbar ist und dass für alle $x \in X$ gilt, dass $f'(x) = \widetilde{f}'(x)|_X$. *(3 Bonuspunkte)*

(b) Es sei X ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$ und $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus X$. Wir betrachten die Funktion

$$f : X \to \mathbb{R},\ x \mapsto \|x - x_0\|^2\ ,$$

wobei $\|v\| = \sqrt{v \cdot v}$ die euklidische Norm von $\mathbb{R}^n$ bezeichnet. Indem man die Methoden der Extremwertsuche auf f anwendet, *zeige* man, dass es genau einen Punkt $x_1 \in X$ gibt, in dem f ein lokales Minimum annimmt und dass der Verbindungsvektor $x_1 - x_0$ senkrecht zu X ist. (Tatsächlich hat f in x_1 sogar ein globales Minimum.)

[*Tipp:* Benutze Aufgabenteil (a)] *(4 Bonuspunkte)*

Ab sofort werden die Übungsblätter online eingereicht, Abgabefrist ist Donnerstag, der zweite April um 10:00 Uhr. Wichtig ist dabei, dass pro Übungsblatt nur eine PDF-Datei erzeugt wird. Diese muss gut lesbar sein und folgenden Dateinamen haben: ›PGnr_nachname1_nachname2_Blattnr.pdf‹.
WICHTIG: Die Dateigröße darf 5MB nicht überschreiten. Schicken Sie bitte Ihrem Tutor die Lösungen, die Emailadressen erfahren Sie auf unserer Website.