Martin Schmidt
Volker Eing

Analysis II

19. März 2020

6. Übung

18. Kritische Punkte, lineare Approximation, Gradient, Rotation und Divergenz.

(a) *Berechne* den Gradienten und *bestimme* alle kritischen Punkte der folgenden Abbildungen:

(i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$ *(4 Punkte)*

(ii) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto y \cdot \sin(x)$ *(4 Punkte)*

(iii) $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x, y, z) \mapsto x^4 + 2y^2 + 2z^2 + 4xz$ *(6 Punkte)*

(b) Berechne die Ebenendarstellung $E : ax + by + cz = d$ der lineare Approximation von

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto x^3 - 5xy^2 - 3y + 4$$

an der Stelle $(x_0, y_0) = (2, 1)$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und $z = T_{1,(x_0,y_0)}(x, y)$. *(4 Punkte)*
[*Tipp:* Die lineare Approximation von f an (x_0, y_0) ist gleich dem Taylorpolynom erster Ordnung von f an (x_0, y_0).]

(c) *Berechne* die Rotation und die Divergenz des Vektorfelds

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y, z) \mapsto (x^2y, y^2z, xz)\ .$$ *(3+3 Punkte)*

19. Mehr Rechenregeln für die Ableitung.

(a) Wir betrachten den $\mathbb{R}^n$ mit dem Skalarprodukt $x \cdot y = \sum_{k=1}^n x_k\, y_k$ und der hiervon induzierten Norm $\|x\| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}$.

(i) Sei die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ x \mapsto \|x\|$$

gegeben. *Zeige*, dass $\nabla f(x) = \frac{x}{\|x\|}$ für $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und *begründe*, warum f an $x = 0$ in keine Richtung $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ differenzierbar ist. *(4 Punkte)*

(ii) Sei nun die Abbildung

$$h : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n,\ x \mapsto \frac{x}{\|x\|}$$

gegeben. *Zeige*, dass für die k-te partielle Ableitung von h an einer Stelle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt, dass

$$\frac{\partial h}{\partial x_k}(x) = \frac{1}{\|x\|}\, e_k - \frac{x_k}{\|x\|^3}\, x.$$

Dabei ist $e_k = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ der k-te Standardeinheitsvektor des $\mathbb{R}^n$. *(5 Punkte)*

(iii) *Folgere* aus (ii), dass h differenzierbar ist und dass für $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ sowie $v \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$h'(x)v = \frac{1}{\|x\|}\, v - \frac{x \cdot v}{\|x\|^3}\, x\ .$$

Dabei bedeutet der Ausdruck $h'(x)v$ die Anwendung der linearen Abbildung $h'(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ auf den Richtungsvektor v. *(4 Zusatzpunkte)*

(b) Es seien X_1, X_2, Y normierte Vektorräume und $\beta : X_1 \times X_2 \to Y$ eine stetige, bilineare Abbildung. *Zeige*, dass β als Abbildung des Produkt-Vektorraums $X_1 \times X_2$ differenzierbar ist und dass für alle $(x_1, x_2), (v_1, v_2) \in X_1 \times X_2$ gilt:

$$\beta'(x_1, x_2)(v_1, v_2) = \beta(v_1, x_2) + \beta(x_1, v_2)\ .$$

(5 Punkte)

[*Tipp:* Satz 10.11.]

20. Geometrische Anschauung des Laplaceoperators in $\mathbb{R}^2$.

Im Folgenden sei $p_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ und $\gamma_r(t) = (r\cos(t), r\sin(t))$ eine Parametrisierung der Kreislinie mit Mittelpunkt 0 und Radius r.

(a) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ein Polynom höchstens ersten Grades. *Zeige*, dass

$$\int_0^{2\pi} \Big(f(p_0 + \gamma_r(t)) - f(p_0)\Big)\, dt = 0.$$

(4 Punkte)

(b) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ein Polynom zweiten Grades. *Zeige*, dass dann

$$\frac{2}{\pi r^2} \int_0^{2\pi} \Big(f(p_0 + \gamma_r(t)) - f(p_0)\Big)\, dt = \triangle f(p_0).$$

(4 Punkte)

(c) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ nun ein homogenes Polynom in $(x_0 - x, y_0 - y) \in \mathbb{R}^2$ vom Grad größergleich 3, d.h.

$$f(x,y) = \sum_{k+\ell=n} a_k (x - x_0)^k (y - y_0)^\ell$$

mit $n \geq 3$. *Zeige*, dass

$$\lim_{r\to 0} \left(r^{-2} \int_0^{2\pi} \Big(f(p_0 + \gamma_r(t)) - f(p_0)\Big)\, dt \right) = 0.$$

(4 Punkte)

(d) Sei schließlich $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. *Folgere* aus (a)-(c) und mit Hilfe der mehrdimensionalen Taylorentwicklung, dass

$$\lim_{r\to 0} \left(\frac{2}{\pi r^2} \int_0^{2\pi} \Big(f(p_0 + \gamma_r(t)) - f(p_0)\Big)\, dt \right) = \triangle f(p_0).$$

(6 Zusatzpunkte)

Bemerkung: Dies bedeutet, dass der Laplace-Operator das Integral über die Abweichung der Funktionswerte von f auf einem infinitesimal kleinen Kreis um $f(p_0)$ zu $f(p_0)$ misst und das Ergebnis mit der Kreisfläche „gewichtet". Er kann also als *radialsymmetrische Ableitung* von f an p_0 betrachtet werden.

Ab sofort werden die Übungsblätter online eingereicht, Abgabefrist ist dieses Mal Donnerstag, der 26.März um 16:00 Uhr. Wichtig ist dabei, dass pro Übungsblatt nur eine PDF-Datei erzeugt wird. Diese muss gut lesbar sein und folgenden Dateinamen haben: ›PGnr_nachname1_nachname2_Blattnr.pdf‹. Schicken Sie bitte Ihrem Tutor die Lösung, die Emailadressen erfahren Sie auf unserer Website. Geben Sie in der Email auch bitte Ihre Matrikelnummer an, damit wir eine halbwegs anonymisierte Punkteliste erstellen können.