# Seminar

**Ausgewählte Themen gewöhnlicher Differentialgleichungen und dynamischer Systeme**

Name: Simon Nahidino

Betreuer: Prof. Dr. Martin Schmidt

Thema: Die Theorie der Normalformen

# 1 Vorwort

Die Theorie der Normalformen in der Lehre der Differentialgleichungen beschäftigt sich damit, bestimmte Differentialgleichungen durch einen geeigneten Variablentausch in eine einfachere Form umzuwandeln. Dies ist besonders in der Bifurkationstheorie hilfreich, da Differentialgleichungen vor den notwendigen Untersuchungen auf ihre vereinfachte Normalform gebracht werden können.

Eine ähnliche Herangehensweise an Differentialgleichungen kennen wir bereits aus der Vorlesung *Dynamische Systeme und Stabilität* im Kapitel *Linearisierungen*. Dort erhalten wir aus dem *Satz von Grobman und Hartmann* die Aussage, dass wir eine Differentialgleichung mit hyperbolischem Fixpunkt in eine vereinfachte Form umwandeln können und so Aussagen über das Verhalten des Systems treffen können. Diese Aussage liefert uns auch die Theorie der Normalformen in einer abgewandelten Form, wie wir später sehen werden.

# 2 Einführung in die Bifurkationstheorie

Im folgenden führen wir kurz Bifurkationen ein, um den Zusammenhang zur Theorie der Normalformen erkennen zu können.

**Definition 2.1**
Sei f: $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ und $f \in C^1$. Betrachte die Differentialgleichung

$$x' = f(x, \epsilon), \quad \forall \epsilon \in \mathbb{R}^k.$$

Es ist keine Bifurkation in $\epsilon = \epsilon_0$ gegeben, wenn $\forall \epsilon_1 \in \mathbb{R}^k$ in einer beliebig kleinen Umgebung um $\epsilon_0$ folgendes gegeben ist:
Es existiert ein Homomorphismus $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und eine stetige Funktion $\alpha : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $t \mapsto \alpha(t, x)$ und streng monoton steigend in $x \in \mathbb{R}$, sodass

$$h(\varphi_t(x)) = \psi_{\tau(t,x)}(h(x)) \quad \forall t \in \mathbb{R}^n$$

gilt, wobei $\varphi_t(z), \psi_t(z) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lösungen dieser linearen Anfangswertprobleme sind:

$$\begin{cases} x' = f(x, \epsilon_0) \\ x(0) = z \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} x' = f(x, \epsilon_1) \\ x(0) = z \end{cases}$$

In anderen Worten, entsteht eine Bifurkation an $\epsilon = \epsilon_0$, wenn in einer beliebigen kleinen Umgebung von $\epsilon_0$ ein $\epsilon_1$ existiert, so dass die Lösungen der Gleichungen

$$x' = f(x, \epsilon_0) \text{ und } x' = f(x, \epsilon_0)$$

nicht durch einen Homomorphismus ineinander übergeführt werden können und dabei ihr qualitatives Verhalten beibehalten.

# 3 Einleitende Beispiele

Das Vorgehen des Überführens einer Differentialgleichung oder einer Familie von Differentialgleichungen in ihre Normalform werden wir zunächst anhand des folgenden Beispiel betrachten.

**Beispiel 3.1**
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f \in C^\infty$ und $f(0) = f'(0) = 0$. Betrachte folgende Familie von Differentialgleichungen:

$$x' = \epsilon x + f(x), \quad \forall \epsilon \in \mathbb{R} \tag{3.1}$$

Diese Gleichung wollen wir nun über einen geeigneten Variablentausch in eine einfachere Form umwandeln. Zudem erkennen wir hier direkt den Zusammenhang zur Bifurkationstheorie. Denn hierbei wäre es interessant zu überprüfen, ob sich das qualitative Verhalten der Lösungen der Differentialgleichung für unterschiedliche $\epsilon$ in einer Umgebung um den Ursprung, der zugleich offensichtlich ein Fixpunkt der Differentialgleichungen ist, stark verändert, also Bifurkationen entstehen oder nicht.

Zunächst betrachten wir die Taylor Reihe von $f$ am Ursprung und erhalten:

$$x' = \epsilon x + ax^2 + bx^3 + ... \tag{3.2}$$

Nun führen wir den bereits angesprochenen Variablentausch, jedoch noch in Abhängigkeit von Parametern $\alpha, \beta, ...$ durch:

$$x = y + \alpha y^2 + \beta y^3 + ... \tag{3.3}$$

Wir bemerken, dass nur wenn die Reihe in (3.3) einem positiven Konvergenzradius besitzt, bzw. wenn sie ein Polynom ist, der Variablentausch in einer ausreichend kleinen Umgebung um den Ursprung in dieser Form möglich ist. Durch die Substitution von (3.3) in (3.2) erhalten wir:

$$y'(1 + 2\alpha y + 3\beta y^2 + ...) = \epsilon(y + \alpha y^2 + \beta y^3) + a(y^2 + 2\alpha y^3) + by^3 + ...$$

Nun können wir die Gleichung direkt nach $y'$ auflösen und den Zähler nach dem Grad des Exponenten in $y$ sortieren.

$$y' = \frac{\epsilon y + (\epsilon\alpha + a)y^2 + (2a\alpha + b)y^3 + ...}{1 + 2\alpha y + 3\beta y^2 + ...}$$

Da wir uns in einer kleinen Umgebung um den Ursprung befinden, können wir die geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-r)^k = \frac{1}{1+r} \text{ , mit } |r| < 1,$$

nutzen. Also da wir $y$ klein wählen, sodass $|2\alpha y + 3\beta y^2 + ...| < 1$ gilt, können wir schreiben:

$$\begin{aligned} y' = &(\epsilon y + (\epsilon\alpha + a)y^2 + (2a\alpha + b)y^3 + ...) \\ &\times [1 - 2\alpha y - 3\beta y^2 - ... + (2\alpha y + 3\beta y^2 + ...)^2 - ...] \end{aligned}$$

Diese Gleichung multiplizieren wir nun aus und sortieren die einzelnen Terme nach dem Grad des Exponenten von $y$.

$$y' = \epsilon y + (a - \epsilon\alpha)y^2 + (b - 2\epsilon\alpha^2 - 2\epsilon\beta)y^3 + ...$$

Zur Vereinfachung der Gleichung wählen wir nun $\alpha$ und $\beta$ so, dass die Koeffizienten von $y^2$ und $y^3$ verschwinden und vernachlässigen alle Terme, in denen die Potenz von $y$ einen höheren Grad als 3 hat. Dies müssen wir selbstverständlich über einen Fehlerterm berücksichtigen. Wir wählen $\alpha = \frac{a}{\epsilon}$ und $\beta = \frac{b}{2\epsilon} - \alpha^2 = \frac{b}{2\epsilon} - \frac{a^2}{\epsilon^2}$, wobei $\epsilon \neq 0$ gelten muss, und erhalten:

$$y' = \epsilon y + o(y^3) \tag{3.4}$$

Hierbei erinnern wir uns, dass wir für eine Funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $g(x) = o(||x||^k)$ schreiben können, wenn $\frac{g(x)}{||x||^k} \to 0$ für $x \to 0$ gilt. Für $n = 1$ gilt dann natürlich $g(x) = o(x^k)$.
Wir haben es also geschafft, die von $f$ abhängige Familie von Differentialgleichungen (3.1) in eine lineare Familie von Differentialgleichungen (3.4) umzuwandeln, die in einer ausreichend kleinen Umgebung um den Ursprung das ursprüngliche System exakt genug approximiert, sodass qualitative Aussagen getroffen werden können.

Dieses Beispiel betrachten wir nun am allgemeinen Fall.

**Beispiel 3.2**
Sei $A \in M_n$ eine Matrix und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Funktion mit $f \in C^\infty$ und $f(0) = d_0 f = 0$. Wir betrachten nun die Differentialgleichung:

$$x' = Ax + f(x).$$

Wie im Beispiel 3.1, nutzen wir den Variablentausch $x = y + h(y)$, wobei $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine differenzierbare Funktion ist mit $h(0) = d_0 h = 0$. Dann gilt:

$$x' = y' + d_y h y' = (Id + d_y h)y' \tag{3.5}$$

Im Gegensatz zur geometrischen Reihe, müssen wir nun jedoch die Neumannsche Reihe,

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-B)^k = (Id + B)^{-1}, \tag{3.6}$$

nutzen. Hierbei ist $B$ eine beliebige quadratische Matrix mit $||B|| < 1$. Da $d_0 h = 0$ ist, gilt für die Matrix $d_y h$ in (3.5) mit ausreichend kleinem $y$, dass $||d_y h|| < 1$ ist, und es folgt aus (3.6), dass $(Id + d_y h)$ invertierbar ist. Wir können also schreiben:

$$\begin{aligned} y' &= (Id + d_y h)^{-1} x' \\ &= (Id + d_y h)^{-1} [A(y + h(y) + f(y + h(y))] \end{aligned}$$

Und aus (3.6) folgt auch, dass

$$\begin{aligned} y' &= (Id - d_y h + ...)[Ay + Ah(y) + f(y + h(y))] \\ &= Ay + Ah(y) + f(y + h(y)) - d_y h Ay - d_y h Ah(y) - d_y h f(y + h(y)) + ... \end{aligned} \tag{3.7}$$

Für den nächsten Schritt führen wir zunächst die Menge $H_{m,n}$ ein. Diese besteht aus allen Funktionen $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, so dass jede Komponente ein homogenes Polynom vom Grad $m$ ist. Homogene Polynome sind Linearkombinationen von der Form $x_{i_1}^{m_1} \cdots x_{i_k}^{m_k}$ mit,

$$k \in \mathbb{N}, \quad i_1, ..., i_k \in \{1, ..., n\} \quad \text{und} \quad m_1 + ... + m_k = m. \tag{3.8}$$

Offensichtlich ist $H_{m,n}$ ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. Nun können wir $f$ und $h$ wie in Beispiel 2 über ihre Taylor Reihe umschreiben in:

$$\begin{aligned} f &= f_2 + f_3 + ... \\ h &= h_2 + h_3 + ... \end{aligned} \tag{3.9}$$

mit $f_m, h_m \in H_{m,n}$ und $m \geq 2$. Indem wir die Taylor Reihen in (3.7) einsetzen erhalten wir:

$$\begin{aligned} y' = Ay &+ [Ah_2(y) + f_2(y) - D_y h_2 Ay] \\ &+ \sum_{k=3}^{\infty} [Ah_k(y) + g_k(y) - D_y h_k Ay] \end{aligned} \tag{3.10}$$

wobei jede Funktion $g_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ nur von $h_2, ...h_{k-1}$ abhängt. In diesem Schritt haben wir neben dem Einsetzen der Taylor Reihe auch nach dem Grad der homogenen Polynome sortiert. Denn wir wollen nun alle Terme in (3.10) außer $Ay$ gleich null setzen indem wir geeignete $h_2, h_3, ...$ wählen. Wir versuchen also sukzessive die Gleichungen

$$D_y h_2 Ay - Ah_2(y) = f_2(y)$$

und

$$D_y h_k Ay - Ah_k(y) = g_k(y)$$

mit $k \geq 3$ für $h_2, h_3, ...$ zu lösen. Die Gleichungen werden *homolgische Gleichungen* genannt.

Um die Lösungen einfacher zu bestimmen, definieren wir die Funktionen

$$L_A^{m,n} : H_{m,n} \to H_{m,n}$$

mit $m \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$ und

$$(L_A^{m,n} h)(y) = D_y h A y - A h(y).$$

So können die homologischen Gleichungen geschrieben werden als:

$$L_A^{2,n} h_2 = f_2 \quad \text{und} \quad L_A^{k,n} h_k = g_k, \quad k \geq 3 \tag{3.11}$$

Die Funktionen $L_A^{m,n}$ sind linear und können daher auch in Matrizen geschrieben werden. Da wir die Linearität später benötigen, weisen wir diese kurz nach. Es muss also gezeigt werden:

(i) $(L_A^{m,n}(h+f)(y) = (L_A^{m,n} h)(y) + (L_A^{m,n} f)(y)$, für $h, f \in H_{m,n}$ und $y \in \mathbb{R}^n$

(ii) $(L_A^{m,n} \lambda h)(y) = \lambda (L_A^{m,n} h)(y)$, für $h \in H_{m,n}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$

**Beweis:**

$$\begin{aligned}
\text{(i)}(L_A^{m,n}(h+f))(y) &= D_y(h+f)Ay - (A(h+f)(y) \\
&= D_y h A y + D_y f A y - A h(y) - A f(y) \\
&= (L_A^{m,n}(h)(y) + (L_A^{m,n}(f)(y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(ii)}(L_A^{m,n}(\lambda h)(y) &= D_y \lambda f A_y - A(\lambda f)(y) \\
&= \lambda D_y f A y - \lambda A f(y) \\
&= \lambda (L_A^{m,n}(h)(y)
\end{aligned}$$

■

Um die Funktionen $L_A^{m,n}$ besser zu verstehen betrachten wir ein konkretes Beispiel dazu.

**Beispiel 3.3**

Sei $m = n = 2$ und $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Jede Funktion $h \in H_{2,2}$ kann geschrieben werden als:

$$h(x,y) = (ax^2 + bxy + y^2, dx^2 + exy + fy^2),$$

mit $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$. Insbesondere gilt $dim(H_{2,2}) = 6$. Wir wollen nun die Funktion $(L_A^{2,2} h)(x,y)$ als Matrix darstellen. Es gilt:

$$\begin{aligned}
(L_A^{2,2} h)(x,y) &= \begin{pmatrix} 2ax + by & bx + 2cy \\ 2dx + ey & ex + 2fy \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} dx^2 + exy + fy^2 \\ -ax^2 - bxy - cy^2 \end{pmatrix} \\
&= a \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} y^2 - x^2 \\ xy \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -2xy \\ y^2 \end{pmatrix} \\
&\quad + d \begin{pmatrix} -x^2 \\ 2xy \end{pmatrix} + e \begin{pmatrix} -xy \\ y^2 - x^2 \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} -y^2 \\ -2xy \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Wenn wir uns die Basis von $H_{2,2}$ als

$$\left\{ \begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} xy \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ xy \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y^2 \end{pmatrix} \right\}$$

wählen, erhalten wir die durch die lineare Funktion $L_A^{2,2}$ erzeugte Matrix:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

# 4 Der Satz von Poincarȇ

Wir haben nun ein Verfahren kennen gelernt, welches eine Differentialgleichung in die Form (3.10) überführt. Um alle Terme in (3.10) außer $Ay$ gleich null zu setzen ist es notwendig die homolgischen Gleichungen (3.11) nach $h_2, h_3, ...$ aufzulösen. Da wir gesehen haben, dass die Funktionen $L_A^{m,n}$ linear sind, reicht es aus die Eigenwerte von $L_A^{m,n}$ zu betrachten. Wenn diese ungleich 0 sind, ist $L_A^{m,n}$ invertierbar und die entsprechende homologischen Gleichungen kann gelöst werden. Folgende Proposition gibt uns eine Möglichkeit die Eigenwerte von jeder Funktion $L_A^{m,n}$ in Abhängigkeit der Eigenwerte von A zu berechnen.

**Proposition 4.1**
Wenn $\lambda_1, ..., \lambda_n$ die Eigenwerte von A sind, dann sind die Eigenwerte von $L_A^{m,n}$ die Zahlen

$$-\lambda_k + \sum_{i=1}^{n} m_i \lambda_i, \tag{4.1}$$

mit

$$k \in \{1, ..., n\}, \ m_1, ...m_n \in \mathbb{N}_0 \text{ und } m_1 + ... + m_n = m.$$

Außerdem, sind die jeweiligen Eigenvektoren von $L_A^{m,n}$ zu den Eigenwerten aus (4.1) die Polynome

$$x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n} v_k, \tag{4.2}$$

wobei $v_k$ der Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_k$ ist.

Dazu betrachten wir ein einfaches Beispiel.

**Beispiel 4.2**
Sei

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

und $e_1, ..., e_n$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^n$, dann ist

$$\begin{aligned}
&L_A^{m,n}(x_1^{m_1}\cdots x_n^{m_n}e_k)(x_1,...,x_n) = \\
&= \begin{pmatrix} & 0 & \\ & \vdots & \\ & 0 & \\ (m_1 x_1^{m_1-1}x_2^{m_2}\cdots x_n^{m_n}) & \cdots & (m_n x_1^{m_1}\cdots x_n^{m_n-1}) \\ & 0 & \\ & \vdots & \\ & 0 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 \\ \vdots \\ \lambda_n x_n \end{pmatrix} \\
&\quad - (x_1^{m_1}\cdots x_n^{m_n}\lambda_k e_k) \\
&= (m_1\lambda_1 + ... + m_n\lambda_n)x_1^{m_1}\cdots x_n^{m_n}e_k - (x_1^{m_1}\cdots x_n^{m_n}\lambda_k e_k) \\
&= \left(\sum_{i=1}^n m_i\lambda_i - \lambda_k\right) x_1^{m_1}\cdots x_n^{m_n}e_k.
\end{aligned}$$

Dies zeigt, dass $x_1^{m_1}\cdots x_n^{m_n}e_k \in H_{m,n}$ ein Eigenvektor von $L_A^m, n$ zum Eigenwert $(\sum_{i=1}^n m_i\lambda_i - \lambda_k)$ ist und damit genau das was uns Proposition 4.1 bereits vorhergesagt hat.

Mit Proposition 4.1 können wir also anhand der Eigenwerte von A erkennen, ob es homologische Gleichungen (3.11) gibt, die nicht gelöst werden können. Dies führt uns zur folgenden Definition.

**Definition 4.3**
Der Vektor $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ ist *resonant*, wenn es Zahlen $k \in \{1, ..., n\}$ und $m_1, ...m_n \in \mathbb{N}_0$, mit $m_1 + ... + m_n \geq 2$, so dass

$$\lambda_k = \sum_{i=1}^n m_i\lambda_i.$$

Mit dieser Eigenschaft eines Vektors können wir nun den *Satz von Poincaré* einführen und beweisen.

**Satz 4.3** *(Poincaré)*
Sei $A$ eine $n \times nMatrix$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Funktion mit $f \in C^\infty$und$f(0) = d_0 f = 0$. Wenn der von den Eigenwerten von $A$ erzeugte Vektor nicht resonant ist, dann kann für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Differentialgleichung $x' = Ax + f(x)$ umgeformt werden in

$$y' = Ay + o(||y||^k),$$

wobei $x = y + h(y)$ ist.

**Beweis:**
Da der aus den Eigenwerten von $A$ bestehende Vektor $(\lambda_1, ...\lambda_n)$ nicht resonant ist, sind alle Eigenwerte der Funktionen $L_A^{m,n}$ nach Proposition 4.1 ungleich null. Dadurch sind alle linearen Funktionen $L_A^{m,n}$ invertierbar und die homologischen Gleichungen in (3.11) können alle bis zur Ordnung $k$ für $h_2, h_3, ..., h_k$ gelöst werden. ∎

Nun bleibt nur uns nur noch der Fall zu betrachten, dass der aus den Eigenwerten von $A$ bestehende Vektor resonant ist. Dazu spalten wir den Raum $H_{m,n}$ auf in $H_{m,n} = E \oplus F$, wobei $E$, der durch die Eigenvektoren zu den Eigenwerten ungleich null, und $F$, der durch die Eigenvektoren zu den Eigenwerten gleich null, aufgespannte Unterraum ist. Wir wissen bereits, dass

$$L_A^{m,n}E = E \quad \text{und} \quad L_A^{m,n}F = F$$

gilt. Daher können wir die linearen Funktionen $L_A^{m,n}$ schreiben als

$$\begin{pmatrix} L_E & 0 \\ 0 & L_F \end{pmatrix}.$$

Wir können auch die Funktionen $f_2, f_3, ...$ und $h_2, h_3, ...$ aus (3.9) schreiben als

$$f_k = \begin{pmatrix} f_k^E \\ f_k^F \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h_k = \begin{pmatrix} h_k^E \\ h_k^F \end{pmatrix}, \text{ für } k \geq 2.$$

Und damit nehmen die homologischen Gleichungen in (3.11) folgende Form an:

$$\begin{cases} L_E h_k^E = f_k^E \\ L_F h_k^F = f_k^F \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} h_k^E = L_E^{-1} f_k^E \\ L_F h_k^F = f_k^F \end{cases}$$

Wenn wir nun lediglich $h_2^E$ in (3.10) substituieren erhalten wir:

$$\begin{aligned} y' =& Ay + f_2(y) - (L_A^{m,n} h_2)(y) + ... \\ =& Ay + f_2^E(y) - (L_E h_2^E)(y) + f_2^F(y) - (L_F h_2^F)(y) + ... \\ =& Ay + f_2^F(y) - (L_f h_2^F)(y) + ... \end{aligned}$$

Wir können also die Terme aus $F$ nicht gleich null gesetzt werden, außer natürlich $f_2^F = 0$ von Beginn an. Hierzu betrachten wir kurz zwei konkrete Beispiele, in denen der aus den Eigenwerten von $A$ bestehende Vektor resonant ist.

**Beispiel 4.4**
Wir betrachten das Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + .... \tag{4.3}$$

Die Eigenwerte der Matrix in (4.3) sind $\pm 2i$. Nun wollen wir zum einen überprüfen ob der Vektor $(-2i, 2i)$ resonant ist und zugleich auch welche Teile der Funktionen $L_A^{m,2}$ im Unterraum $F$ von $H_{m,2}$ liegen. Wir lösen also die Gleichungen

$$m_1 2i + m_2(-2i) = \pm 2i,$$

mit $m_1, m_2 \in \mathbb{N}_0$ und $m_1 + m_2 \geq 2$. Die Lösungen sind

$$m_1 - m_2 = \pm 1,$$

und damit ist der Vektor $(-2i, 2i)$ resonant. Die Lösungen sind die Kombinationen:

$$(m_1, m_2) = (1, 2), (2, 1), (2, 3)(3, 2), ...$$

Es bleiben also die Terme der Form $xy^2, x^2y, x^2y^3, x^3y^2, ...$ beim Überführung in die Normalform übrig. Wenn man $x$ und $y$ in $u$ und $v$ substituiert erhalten wir aus dem Differentialgleichungssystem(4.3)

$$\begin{cases} u' = 2v + a_1uv^2 + a_2u^2v + a_3u^2v^3 + a_4u^3v^2 + ..., \\ v' = -2u + b_1uv^2 + b_2u^2v + b_3u^2v^3 + b_4u^3v^2 + ..., \end{cases}$$

mit Konstanten $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ und $i \in \mathbb{N}$.

**Beispiel 4.5**
Wir betrachten das Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + .... \tag{4.4}$$

Die Eigenwerte der Matrix in (4.4) sind 2 und 1. Nun wollen wir zum einen überprüfen ob der Vektor $(2,1)$ resonant ist und zugleich auch welche Teile der Funktionen $L_A^{m,2}$ im Unterraum $F$ von $H_{m,2}$ liegen. Wir lösen also die Gleichungen

$$2m_1 + m_2 = 2 \quad \text{und} \quad 2m_1 + m_2 = 1,$$

mit $m_1, m_2 \in \mathbb{N}_0$ und $m_1 + m_2 \geq 2$. Die einzige Lösung davon ist $(m_1, m_2) = (0, 2)$ und damit ist der Vektor $(2,1)$ resonant und wir können das Differentialgleichungssystem (4.4) durch einen geeigneten Variablentausch von $u$ und $v$ umwandeln in:

$$\begin{cases} u' = 2u + \alpha v^2, \\ v' = v + \beta v^2, \end{cases}$$

mit Konstanten $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Nun leiten wir vom *Satz von Poincaré* (4.3) noch eine Erweiterung für den Fall, dass der von den Eigenwerten von $A$ bestehende Vektor resonant ist, ab. Dabei schränken wir uns darauf ein, dass die Eigenwerte nur positiven Realteil haben. Insbesondere ist die Matrix $A$ dann hyperbolisch und wir erhalten aus dem *Satz von Grobman und Hartmann* bereits die Aussage, dass wir die Differentialgleichung in eine vereinfachte Form umwandeln können.

**Satz 4.6**
Sei $A$ eine $n \times n$ Matrix, deren Eigenwerte nur positiven Realteil haben und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Funktion mit $f \in C^\infty$ und $f(0) = d_0 f = 0$. Dann kann für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Differentialgleichung $x' = Ax + f(x)$ umgeformt werden in

$$y' = Ay + p(y) + o(||y||^k),$$

wobei $x = y + h(y)$ und $p$ ein Polynom ist.

**Beweis:**
Es bleibt uns nur noch zu zeigen, dass $p(y)$ endlich viele Terme unabhängig von $k$ besitzt. Dazu betrachten wir die Gleichung:

$$\lambda_j = \sum_{i=1}^{n} m_i \lambda_i \tag{4.5}$$

Insbesondere gilt dann auch:

$$\text{Re}(\lambda_j) = \sum_{i=1}^{n} m_i \text{Re}(\lambda_i) \tag{4.6}$$

Wir nehmen nun einen Vektor $(m_1, ..., m_n)$ mit $m_1, ..., m_n \in \mathbb{N}_0$, $m_1 + ... + m_n \geq 2$ und

$$\sum_{i=1}^{n} m_i > \frac{\max_i \text{Re}(\lambda_i)}{\min_i \text{Re}(\lambda_i)}$$

Da die Eigenwerte nur positiven Realteil besitzen, erhalten wir :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} m_i \text{Re}(\lambda_i) &\geq \sum_{i=1}^{n} m_i \min_i \text{Re}(\lambda_i) \\ &> \max_i \text{Re}(\lambda_i) \geq \text{Re}(\lambda_j). \end{aligned}$$

Das zeigt, dass für den Vektor $(m_1, ..., m_n)$ die Gleichung (4.5) und dadurch auch (4.6) nicht erfüllt ist. Die Menge aller Vektoren $(m_1, ..., m_n)$ für die gilt, dass

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \leq \frac{\max_i \text{Re}(\lambda_i)}{\min_i \text{Re}(\lambda_i)},$$

ist endlich. Da keine Vektoren außerhalb dieser Menge gefunden werden können, die die Gleichung (4.5) und dadurch auch (4.6) erfüllen, ist die Anzahl solcher Vektoren endlich. ■

Damit haben wir neben dem *Satz von Poincaré* (4.3) noch eine weitere Möglichkeit eine Differentialgleichung in ihre Normalform zu überführen kennen gelernt.

# 5 Literaturverzeichnis

Barreira Luis und Claudia Valls : Ordinary Differential Equations Qualitative Theory.
Providence, Rhode Island : American Mathematical Society. - [2012]