Zentrumsmannigfaltigkeiten

Seminar:
Ausgewählte Themen gewöhnlicher
Differentialgleichungen und dynamischer Systeme

Sonja Groffmann

Universität Mannheim
11. April 2019

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Bei der Analyse des Stabilitätsverhaltens der Fixpunkten von Differentialgleichungen wird häufig vom einfachen, hyperbolischen Fall ausgegangen, bei dem das neutrale Spektrum leer ist. Doch in der Realität treten natürlich auch nicht-hyperbolische Fixpunkte auf. Um diese auf Stabilität zu untersuchen, ist es äußerst hilfreich Zentrumsmannigfaltigkeiten zu betrachten. Dies liegt daran, dass in gewissen Fällen die Stabilität des Fixpunktes allein von der Stabilität der Zentrumsmannigfaltigkeiten abhängt. Zudem kann häufig mit Hilfe von Zentrumsmannigfaltigkeiten die Ordnung von Differentialgleichungen reduziert werden, was die Suche nach Bifurkationen stark vereinfacht.

Diese Ausarbeitung soll daher einen kleinen Einblick in die Theorie der Zentrumsmannigfaltigkeiten bieten und anhand von ausgewählten Beispielen deren Anwendung erklären.

2 Grundlagen

Bevor das Zentrumsmannigfaltigkeitentheorem eingeführt werden kann und anhand dessen Untersuchungen der Stabilität von Fixpunkten vorgenommen werden können, müssen zunächst die Grundlagen dafür geschaffen werden. Dazu wird im Folgenden stets von einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ausgegangen, die mindestens einmal stetig differenzierbar sein soll, also in C^1 enthalten ist. Zudem wird mit x_0 der Fixpunkt der Differentialgleichung $x' = f(x)$ bezeichnet und $A = d_{x_0} f$ bildet die zugehörige Linearisierungsmatrix.

Definition 1. Der stabile, instabile und zentrale Raum von x_0 wird definiert durch:

$$\begin{aligned} E^s &= \left\{ x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : \limsup_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \log \|e^{At} x\| < 0 \right\} \cup \left\{ 0 \right\} \\ E^u &= \left\{ x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : \limsup_{t \to -\infty} \frac{1}{|t|} \log \|e^{At} x\| < 0 \right\} \cup \left\{ 0 \right\} \\ E^c &= \left\{ x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : \limsup_{t \to \pm\infty} \frac{1}{|t|} \log \|e^{At} x\| = 0 \right\} \cup \left\{ 0 \right\} \end{aligned}$$

Um diese Räume besser zu verstehen, betrachte den nicht-trivialen Fall $x \in E^s \setminus \{0\}$.
x erfüllt die Bedingung $\limsup_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \log \|e^{At} x\| < 0$, somit gilt $\exists \varepsilon > 0$ sodass für $t \to +\infty$ gilt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \log \|e^{At} x\| &< -\varepsilon \\ \Leftrightarrow \log \|e^{At} x\| &< -\varepsilon t \\ \Leftrightarrow \|e^{At} x\| &< e^{-\varepsilon t} \end{aligned}$$

Da sich $e^{-\varepsilon t}$ für $t \to +\infty$ der Null annähert, muss sich somit auch $\|e^{At} x\|$ der Null annähern. Dies ist allerdings nur möglich, falls x aus dem stabilen Eigenraum von A ist, also aus dem Vektorraum, der von den zu den stabilen Eigenwerten

gehörenden Eigenvektoren aufgespannt wird. Daher muss x ein Element aus dem stabilen Eigenraum sein.
Für $x \in E^u$ bzw. E^c folgt die Aussage analog.
Folglich können E^s,E^u und E^c als der stabile, instabile bzw. zentrale Eigenraum aufgefasst werden.

Proposition 2. *Wenn x_0 ein kritischer Punkt der Gleichung $x' = f(x)$ ist, so gilt:*

1. *E^s, E^u und E^c sind Unterräume von $\mathbb{R}^n$ und es gilt $E^s \oplus E^u \oplus E^c = \mathbb{R}^n$*
2. *$\forall t \in \mathbb{R}$ gilt: $e^{At}(E^s) \subset E^s$, $e^{At}(E^u) \subset E^u$, $e^{At}(E^c) \subset E^c$*

Beweis. a) Sei x_0 Fixpunkt von $x' = f(x)$ und $B = d_{x_0}f$ die zugehörige Linearisierungsmatrix. Dann gibt es eine Zerlegung $\mathbb{R}^n = F^s \oplus F^u \oplus F^c$, sodass B in Jordannormalform A gebracht werden kann, und

$$A = \begin{pmatrix} A_s & 0 & 0 \\ 0 & A_u & 0 \\ 0 & 0 & A_c \end{pmatrix}$$

wobei A_s, A_u und A_c die Jordanblöcke zu den stabilen, instabilen bzw. neutralen Eigenwerten sind.
Sei $x \in F^s$ und betrachte $t \to +\infty$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \|e^{At}x\| \to 0 \\ &\Rightarrow \log\|e^{At}x\| \to -\infty \\ &\Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0: \quad \frac{1}{t}\log\|e^{At}x\| < -\varepsilon \\ &\Rightarrow \limsup_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\log\|e^{At}x\| < 0 \\ &\Rightarrow x \in E^s \end{aligned}$$

Für $x \in E^s$ gilt $\limsup_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\log\|e^{At}x\| < 0$, somit gilt: $\exists \varepsilon > 0$, sodass für $t \to \infty$

$$\begin{aligned} \frac{1}{t}\log\|e^{At}x\| &< -\varepsilon \\ \Leftrightarrow \log\|e^{At}x\| &< -\varepsilon t \\ \Leftrightarrow \|e^{At}x\| &< e^{-\varepsilon t} \end{aligned}$$

Da sich $e^{-\varepsilon t}$ für $t \to \infty$ der Null annähert, kann die letzte Äguivalenz nur erfüllt sein, falls x nur auf den Block A^s reagiert, somit muss $x \in F^s$ gelten.
Sei nun $x \in F^u$ und betrachte $t \to -\infty$

$$\Rightarrow \|e^{At}x\| = \|e^{-A|t|}x\| \to 0$$

Analog zu $x \in F^s$ folgt schließlich $x \in E^u$
Für $x \in E^u$ verläuft der Beweis der Rückrichtung ebenfalls analog zum Fall $x \in E^s$. Hierbei gilt allerdings $\|e^{At}x\| = \|e^{-A|t|}x\| < e^{-\varepsilon|t|}$ kann für $t \to \infty$ nur erfüllt sein, falls x nur von den instabilen Jordanblöcken betroffen ist. Somit muss $x \in F^s$

enthalten sein.
Sei zuletzt $x \in F^c$ und betrachte $t \to \pm\infty$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \|e^{At}x\| \text{ wächst höchstens polynomial in t}\\
&\Rightarrow \log\|e^{At}x\| \text{ wächst langsamer in t als } |t|\\
&\Rightarrow \frac{1}{|t|}\log\|e^{At}x\| = 0\\
&\Rightarrow \limsup_{t\to\pm\infty} \frac{1}{|t|}\log\|e^{At}x\| = 0\\
&\Rightarrow x \in E^c
\end{aligned}$$

Für $x \in E^c$ gilt umgekehrt $\limsup_{t\to\pm\infty} \frac{1}{|t|}\log\|e^{At}x\| = 0$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \frac{1}{|t|}\log\|e^{At}x\| = 0 \text{ für } t \to \pm\infty\\
&\Rightarrow \log\|e^{At}x\| \text{ muss langsamer in t wachsen als } |t|\\
&\Rightarrow \|e^{At}x\| \text{ kann nicht exponentiell in t wachsen}\\
&\Rightarrow x \text{ kann keine Anteile im stabilen oder instabilen Unterraum haben}\\
&\Rightarrow x \in F^c
\end{aligned}$$

Somit gilt $E^s = F^s$, $E^u = F^u$ und $E^c = F^c$, woraus folgt, $\mathbb{R}^{\mathrm{n}} = E^s \oplus E^u \oplus E^c$
b) Nun muss noch die zweite Aussage gezeigt werden. Sei dazu $x \in E^s \setminus \{0\}$, $t, s \in \mathbb{R}$ und betrachte $e^{As}x$. Dann gilt $\forall t \to \infty$, dass $e^{At}x \to 0$.

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \|e^{At}e^{As}x\| = \|e^{As}e^{At}x\| \to 0\\
&\Rightarrow \log\|e^{At}e^{As}x\| \to -\infty\\
&\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : \ \frac{1}{t}\log\|e^{At}e^{As}x\| < -\varepsilon\\
&\Rightarrow \limsup_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\log\|e^{At}e^{As}x\| < 0\\
&\Rightarrow e^{As}x \in E^s\\
&\Rightarrow e^{As}(E^s) \subset E^s \quad \forall s \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Für E^u und E^c verläuft der Beweis analog. ■

Bemerkung 3. *Bifurkationen können nur auftreten, falls gilt $E^c \neq \{0\}$.*

Beweis. Sei x_0 ein Fixpunkt der Differentialgleichung $x' = f(x)$ und sei $E^c = \{0\}$. Um zu beweisen, dass in diesem Fall keine Bifurkationen auftreten können, muss gezeigt werden, dass es einen Homöomorphismus gibt, der die Lösungen der Differentialgleichung in einer kleinen ε-Umgebung des Fixpunktes in einander überführt.

Da x_0 hyperbolisch ist, gilt dies auch für die Linearisierungsmatrix A von x_0. In Übungsaufgabe 36 der Vorlesung "Dynamische Systeme und Stabilität" wurde gezeigt, dass die Menge der hyperbolischen Matrizen offen und dicht in $\mathcal{L}(\mathbb{R}^{\mathrm{n}})$ liegt. Somit gilt für Matrizen aus einer ε-Umgebung der hyperbolischen Matrix A, dass diese ebenfalls hyperbolisch sind, wobei ε gewählt werden muss, als das Minimum der

Realteile der Eigenwerte von A. Daher stimmen sowohl die Anzahl der Eigenwerte mit positivem, negativem bzw. verschwindendem Realteil als auch die Dimensionen der entsprechenden Eigenräume der jeweiligen Matrix in dieser ε-Umgebung überein. Wegen Satz 2.15 der Vorlesung “Dynamische Systeme und Stabilität” folgt nun, dass die beiden hyperbolischen Linearisierungen in dieser Umgebung topologisch konjugiert sind. Nach dem Satz von Grobman und Hartman ist es zudem im hyperbolischen Fall möglich, von der Linearisierung auf den ursprünglichen Fluss zu schließen, weshalb auch die Flüsse, also die Lösungen der Differentialgleichung, in der ε-Umgebung topologisch konjugiert sind. Diese Tatsache zeigt gerade, dass es einen Homöomorphismus gibt, welcher die Lösungen ineinander überführt. Daher gilt im hyperbolischen Fall, es kann keine Bifurkation auftreten. ■

3 Das Zentrumsmannigfaltigkeitentheorem

Um das Stabilitätsverhalten nicht-hyperbolischer Lösungen von Differentialgleichungen zu untersucht, wird zusätzlich die folgende Aussage benötigt:

Satz 4 (Zentrumsmannigfaltigkeitentheorem). *Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ein kritischer Punkt von $x' = f(x)$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Funktion aus C^k.*
Dann gibt es k-mal differenzierbare Mannigfaltigkeiten W^s, W^u und W^c, die x_0 enthalten und für die gilt:

1. $T_{x_0}W^s = E^s$, $T_{x_0}W^u = E^u$, $T_{x_0}W^c = E^c$
2. *die Lösungen von $x' = f(x)$ mit Anfangswerten in W^s, W^u bzw. W^c bleiben in diesen Mannigfaltigkeiten für jede ausreichend kleine Zeit.*

W^s und W^u sind in einer ausreichend kleinen Umgebung von x_0 eindeutig bestimmt.

Der Beweis des Zentrumsmannigfaltigkeitentheorems geht in seiner Länge und Komplexität über den Rahmen dieser Ausarbeitung hinaus und wird daher ausgelassen.

Definition 5. W^s und W^u werden als stabile bzw. instabile Mannigfaltigkeit bezeichnet.
W^c heißt Zentrumsmannigfaltigkeit.

Im Gegensatz zur stabilen und instabilen Mannigfaltigkeit muss die Zentrumsmannigfaltigkeit nicht eindeutig bestimmt sein, wie das folgende Beispiel zeigen wird.

Beispiel 6. Betrachte das Differentialgleichungssystem

$$x' = x^2$$
$$y' = -y$$

Für $(x', y') = f(x, y) = (x^2, -y)$ ist der Ursprung ein Fixpunkt, da gilt $f(0, 0) = (0, 0)$. Mit Hilfe der Eigenvektoren lassen sich die Eigenräume bestimmen, daher betrachte die Linearisierungsmatrix

$$A = d_{(0,0)}f = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Bigg|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Anhand dieser Matrix lassen sich die Eigenwerte λ_i und -vektoren v_i leicht ablesen:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0 & \qquad v_1 &= (1,0)^t \\ \lambda_2 &= -1 & \qquad v_2 &= (0,1)^t \end{aligned}$$

Hierbei ist λ_1 ein neutraler und λ_2 ein stabiler Eigenwert. Aufgrund der Eigenvektoren und da es des Weiteren keinen instabilen Eigenwert gibt gilt:

$$E^s = \{0\} \times \mathbb{R},\ E^u = \{0\},\ E^c = \mathbb{R} \times \{0\}$$

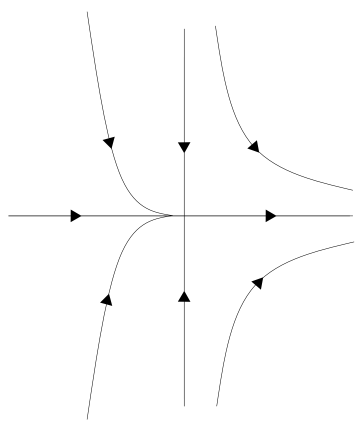
Nun soll anhand einer allgemeinen Lösung eine Zentrumsmannigfaltigkeit hergeleitet werden. Für $(x(0), y(0) = (x_0, y_0))$ gilt $(x(t), y(t)) = (\frac{x_0}{1-tx_0}, e^{-t}y_0)$ ist eine Lösung der Differentialgleichung, da

$$\begin{aligned} (x(0), y(0)) &= (\frac{x_0}{1-0}, e^{-0}y_0) = (x_0, y_0) \\ f(x(t), y(t)) &= (\frac{x_0^2}{(1-tx_0)^2}, -e^{-t}y_0) = (x'(t), y'(t)) \end{aligned}$$

Da E^c gerade der x-Achse entspricht und der zentrale Raum tangential zur Zentrumsmannigfaltigkeit verlaufen muss, sowie diese in (0,0) berühren soll, enthält W^c Tupel von der Form $(x, \eta(x))$. Um η zu bestimmen wird x(t) nach t aufgelöst, somit ergibt sich: $t = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x}$. Durch Einsetzen von t in y(t) lässt sich y(x) bestimmen:

$$y(x) = (y_0 e^{-\frac{1}{x_0}}) e^{\frac{1}{x}} = c e^{\frac{1}{x}}$$

Hierbei ist $c = y_0 e^{-\frac{1}{x_0}}$ eine Konstante, die nur durch den Anfangswert bestimmt wird. Da es unendlich viele Möglichkeiten gibt einen Anfangswert zu wählen, ergibt sich das folgende Phasenporträt:



Da die Trajektorien in $\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}$ nicht durch den Ursprung verlaufen und somit nicht in W^c enthalten sein können, können die Trajektorien zu den Anfangswerten mit $x_0 \geq 0$ nicht Teil der Zentrumsmannigfaltigkeit sein. Somit kann die Zentrumsmannigfaltigkeit definiert werden durch

$$W^c = \big\{(x, \eta_c(x)) : x \in \mathbb{R}\big\}$$

für

$$\eta_c(x) = \begin{cases} ce^{\frac{1}{x}} & x < 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

für eine beliebige Konstante $c \in \mathbb{R}$
Da c beliebig gewählt werden kann, ergeben sich unendlich viele Zentrumsmannigfaltigkeiten, was zeigt, dass W^c im Gegensatz zu W^s und W^u nicht eindeutig sein muss.

4 Anwendungen von Zentrumsmannigfaltigkeiten

Dieser Abschnitt soll aufzeigen, wie die Stabilität eines nicht-hyperbolischen Fixpunktes anhand von Zentrumsmannigfaltigkeiten untersucht werden kann.

Dazu ist die folgende Bemerkung hilfreich, die durch eine Verallgemeinerung des Satzes von Grobman und Hartman hergeleitet werden kann.

Bemerkung 7. *Sei $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in W^s \times W^u \times W^c$ in einer ausreichend kleinen Umgebung von x_0.*
$\Rightarrow$ Lösungen von $x' = f(x)$ sind topologisch konjugiert zu den Lösungen von

$$\begin{aligned} \bar{x}' &= -\bar{x} \\ \bar{y}' &= \bar{y} \\ \bar{z}' &= F(\bar{z}) \end{aligned}$$

für eine Funktion F.

Mit Hilfe dieser Erkenntnis erhält man das folgende:

Bemerkung 8. *Sei x_0 ein Fixpunkt von $x' = f(x)$, so lässt sich die Stabilität von x_0 folgendermaßen bestimmen:*

a) es gilt $E^u \neq \big\{0\big\}$
$\Rightarrow$ x_0 ist instabil

b) es gilt $E^u = \big\{0\big\}$ und $E^c = \big\{0\big\}$
$\Rightarrow$ x_0 ist asymptotisch stabil

c) es gilt $E^u = \big\{0\big\}$ und $E^c \neq \big\{0\big\}$
$\Rightarrow$ die Stabilität von x_0 stimmt mit der Stabilität des Ursprungs in der DGL $\bar{z}' = F(\bar{z})$ überein

Die Fälle a) und b) sind bereits aus der Vorlesung “Dynamische Systeme und Stabilität” bekannt. Da im letzten Fall der instabile Raum, und daher auch W^u, nur die Null enthält, und x_0 in W^s stabil ist, kann eine Instabilität lediglich durch instabiles Verhalten in der Zentrumsmannigfaltigkeit verursacht werden.

Wie die Stabilität im Fixpunkt anhand von W^c untersucht werden kann, sollen die folgenden Beispiele zeigen.

Beispiel 9. Betrachte das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} x' &= -x + y^2 \\ y' &= y^2 - x^2 \end{aligned}$$

Der Ursprung ist somit ein Fixpunkt von $(x', y') = f(x, y) = (-x + y^2, y^2 - x^2)$. Um die Eigenräume zu bestimmen, wird nun die Linearisierungsmatrix benötigt:

$$A = d_{(0,0)}f = \begin{pmatrix} -1 & 2y \\ -2x & 2y \end{pmatrix}\Bigg|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgrund der Eigenvektoren zu dem stabilen und neutralen Eigenwert und da es des Weiteren keinen instabilen Eigenwert gibt gilt:

$$E^s = \mathbb{R} \times \{0\},\ E^u = \{0\},\ E^c = \{0\} \times \mathbb{R}$$

Somit handelt es sich um den Fall c), dass heißt es kann von der Stabiltät der Zentrumsmannigfaltigkeit auf das Verhalten des Fixpunktes geschlossen werden. Es muss also zunächst W^c bestimmt werden. Da E^c in der zweiten Koordinate vollkommen flexibel ist und zudem W^c in x_0 tangieren muss, gilt:

$$W^c = \big\{(\varphi(y), y) : y \in (-\delta, \delta)\big\}$$

wobei $\varphi : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}$ eine Funktion aus C^k sein muss, die $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$ erfüllt. Letzteres liegt daran, dass der Ursprung ein Fixpunkt ist, der in W^c enthalten ist.

Durch die Taylorentwicklung kann $x = \varphi(y)$ beschrieben werden als $x = \varphi(y) = ay^2 + by^3 + ...$
Somit ergibt sich beim Ableiten dieser Funktion

$$x' = (\varphi(y))' = \varphi'(y)y' = \varphi'(y)(y^2 - x^2) = \varphi'(y)(y^2 - \varphi(y)^2)$$

Gleichzeitig gilt aber nach der Definition der Differentialgleichung

$$x' = -x + y^2 = -\varphi(y) + y^2$$

Durch Gleichsetzen folgt

$$\begin{aligned} -\varphi(y) + y^2 &= \varphi'(y)(y^2 - \varphi(y)^2) \\ \Leftrightarrow -ay^2 - by^3 - ... + y^2 &= (2ay + 3by^2 + ...)(y^2 - a^2y^4 - ...) \end{aligned}$$

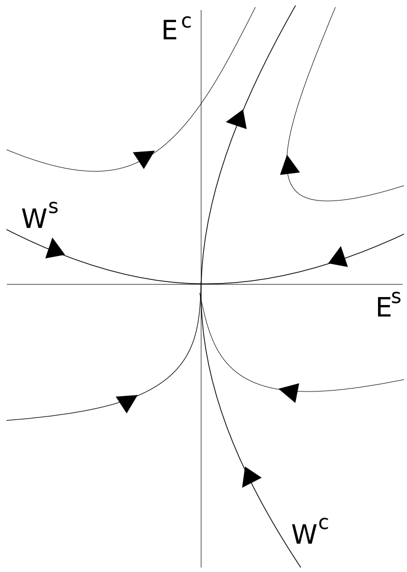
Der Vergleich von Termen gleicher Ordnung liefert $a = 1$ und $b = -2$ und somit gilt:

$$\begin{aligned} x = \varphi(y) &= y^2 - 2y^3 + ... \\ \Rightarrow y' = y^2 - x^2 &= y^2 - y^4 - ... \end{aligned}$$

Anhand dieser beiden Gleichungen kann nun das Verhalten des Fixpunktes (0,0) in einer kleinen Umgebung beschrieben werden.

In kleiner Umgebung um die Null ist $y^4 + ...$ betragsmäßig verschwindend gering im Vergleich zu y^2. Daher gilt nahe Null $y' \approx y^2$. Da die Ableitung aber durch den positiven Exponenten immer positiv ist, muss der Ursprung in der Zentrumsmannigfaltigkeit instabil sein. Somit fließen die Lösungen auf W^c zunächst in den Fixpunkt hinein und danach hinaus. Daher ist der Ursprung ein instabiler Fixpunkt.

Zudem gilt mit der selben Begründung nahe Null auch $x \approx y^2$, und es entsteht das folgende Phasenporträt:



Analog kann auch die stabile Mannigfaltigkeit hergeleitet werden. Dies wurde aber im Zuge dieser Ausarbeitung ausgelassen, da W^s nach Bemerkung 8 für die Stabilitätsuntersuchung nicht weiter relevant ist.

Das folgende Beispiel verläuft analog, jedoch ist hierbei die bestimmende Koordinate in der Zentrumsmannigfaltigkeit vertauscht.

Beispiel 10. Betrachte daher das folgende Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} x' &= x^2 - xy \\ y' &= -y + x^2 \end{aligned}$$

Der Ursprung ist wieder ein Fixpunkt von $(x', y') = f(x, y) = (x^2 - xy, -y + x^2)$. Es gilt:

$$A = d_{(0,0)}f = \begin{pmatrix} 2x - y & -x \\ 2x & -1 \end{pmatrix} \Bigg|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Mittels der Eigenwerte und -vektoren ergibt sich:

$$E^s = \mathbb{R} \times \{0\},\ E^u = \{0\},\ E^c = \{0\} \times \mathbb{R}$$

Daher kann wieder vom Verhalten der Zentrumsmannigfaltigkeit auf die Stabilität des Ursprungs geschlossen werden. Dieses Mal ist E^c in der ersten Koordinate vollkommen flexibel, somit gilt:

$$W^c = \{(x, \varphi(x)) : x \in (-\delta, \delta)\}$$

Hierbei muss $\varphi : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}$ k-mal stetig differenzierbar sein und $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$ muss gelten, da der Ursprung ein Fixpunkt ist, der in W^c enthalten ist.

Mittels der Taylorentwicklung kann $y = \varphi(x)$ beschrieben werden als $y = \varphi(x) = ax^2 + bx^3 + ...$

$$\Rightarrow y' = (\varphi(x))' = \varphi'(x)x' = \varphi'(x)(x^2 - xy) = \varphi'(x)(x^2 - x\varphi(x))$$

Nach der Definition der Differentialgleichung gilt zudem aber auch

$$y' = -y + x^2 = -\varphi(x) + x^2$$

Durch Gleichsetzen folgt

$$\begin{aligned} -\varphi(x) + x^2 &= \varphi'(x)(x^2 - x\varphi(x)) \\ \Leftrightarrow -ax^2 - bx^3 - ... + x^2 &= (2ax + 3bx^2 + ...)(x^2 - ax^3 - bx^4 - ...) \end{aligned}$$

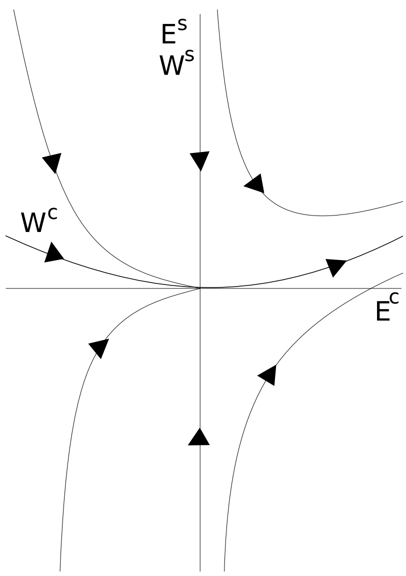
Durch das Vergleichen der Terme gleicher Ordnung ergibt sich wieder $a = 1$ und $b = -2$ und somit gilt:

$$\begin{aligned} y = \varphi(x) &= x^2 - 2x^3 + ... \\ \Rightarrow x' = x^2 - xy &= x^2 - x^3 + 2x^4 + ... \end{aligned}$$

Es wurde also wieder eine Funktion F gefunden anhand derer nun das Verhalten des Fixpunktes (0,0) in einer kleinen Umgebung beschrieben werden kann.

In der Nähe der Null ist $x^3 - 2x^4 + ...$ deutlich kleiner als x^2. Daher gilt nahe Null $x' \approx x^2$. Die Ableitung muss somit aufgrund des positiven Exponenten immer positiv sein, das heißt der Ursprung ist in der Zentrumsmannigfaltigkeit instabil. Die Lösungen auf W^c fließen zunächst in den Fixpunkt hinein und danach hinaus, daher ist der Ursprung auch insgesamt ein instabiler Fixpunkt.

Durch die selbe Argumentation gilt nahe Null außerdem $y \approx x^2$, und es entsteht das folgende Phasenporträt:



Das letzte Beispiel soll die Untersuchung des Stabilitätsverhalten in Falle eines gestörten Differentialgleichungssystem erklären und zugleich den Zusammenhang zur Birfurkationstheorie herstellen.

Beispiel 11. Betrachte hierzu das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} x' &= \varepsilon x - x^3 + y^2 \\ y' &= -y + x^2 \end{aligned}$$

Dieses enthält einen Störfaktor ε. Durch hinzufügen einer dritten Komponente $\varepsilon' = 0$ entsteht die neue Differentialgleichung $(x', y'\varepsilon') = f(x, y, \varepsilon) = \varepsilon x - x^3 + y^2, -y + x^2, 0)$ mit dem Fixpunkt (0,0,0). Die dazugehörige Linearisierungsmatrix ist von der Form

$$A = d_{(0,0,0)} f = \begin{pmatrix} \varepsilon - 3x^2 & 2y & \varepsilon \\ 2x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Bigg|_{(0,0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Somit gilt für die entsprechenden Eigenräume

$$E^s = \big\{0\big\} \times \mathbb{R} \times \big\{0\big\},\ E^u = \big\{0\big\},\ E^c = \mathbb{R} \times \big\{0\big\} \times \mathbb{R}$$

Um die Zentrumsmannigfaltigkeit zu bestimmen, wird nun eine Funktion φ benötigt, die sowohl von x als auch von ε abhängig ist. Es gilt also

$$W^c = \big\{(x, \varphi(x, \varepsilon)) : x, \varepsilon \in (-\delta, \delta)\big\}$$

Mit $\varphi : (-\delta, \delta) \times (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}$ k-mal stetig differenzierbar und $\varphi(0,0) = \varphi'(0,0) = 0$, da der (0,0,0) ein Fixpunkt ist, der in W^c enthalten ist.
Nach der Taylorentwicklung in zwei Variablen folgt $y = \varphi(x, \varepsilon) = ax^2 + bx\varepsilon + c\varepsilon^2$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y' = (\varphi(x, \varepsilon))' &= (\varphi_x, \varphi_\varepsilon)(x', \varepsilon')^t = \varphi_x x' + \varphi_\varepsilon \varepsilon' \\ &= \varphi_x(\varepsilon x - x^3 + y^2) = \varphi_x(\varepsilon x - x^3 + \varphi(x, \varepsilon)^2) \end{aligned}$$

Nach der Definition der Differentialgleichung gilt aber zudem

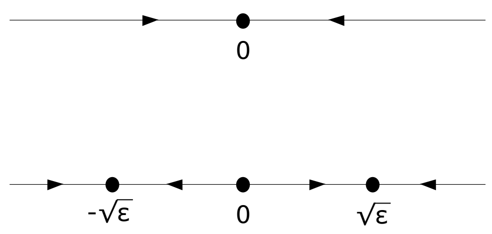
$$y' = -y + x^2 = -\varphi(x, \varepsilon) + x^2$$

Durch Gleichsetzen der beiden Ableitungen ergibt sich

$$\begin{aligned} -\varphi(x, \varepsilon) + x^2 &= \varphi_x(\varepsilon x - x^3 + \varphi(x, \varepsilon)^2) \\ \Leftrightarrow -ax^2 - bx\varepsilon - c\varepsilon^2 - ... + x^2 &= (2ax + b\varepsilon + ...)(\varepsilon - x^3 + a^2x^2 + ...) \end{aligned}$$

Nach dem Vergleich der Terme gleicher Ordnung ergibt sich $a = b = c = 0$ und somit gilt in der Nähe der Null $y = \varphi(x, \varepsilon) \approx 0$ und $x' \approx \varepsilon x - x^3$.

In diesem Fall ist das Stabilitätsverhalten also abhängig von der Störung ε. Für $\varepsilon \leq 0$ fließen die Lösungen in den Fixpunkt hinein, da durch ein negatives Vorzeichen von ε auch x' negativ wird in der Nähe von Null. Daher ist in diesem Fall der Ursprung stabil, was in dem ersten der beiden nachstehenden Phasenporträts dargestellt ist. Im Fall von $\varepsilon > 0$ fließen die Lösungen nahe Null allerdings aus dem Fixpunkt hinaus, aufgrund des positiven Vorzeichens von ε. Somit ist der Ursprung instabil, wie in der unteren Graphik zu erkennen ist. Das Stabilitätsverhalten ändert sich also sehr stark bei $\varepsilon = 0$. Diese extreme qualitative Änderung im Flussverhalten ist Ausdruck einer Pitchfork-Bifurkation.



5 Zusammenfassung

Wie die Beispiele gezeigt haben, war es mittels der Zentrumsmannigfaltigkeiten nun auch im nicht-hyperbolischen Fall möglich, Aussagen über das Stabilitätsverhalten von Fixpunkten zu treffen. Dies folgte aus der Tatsache, dass für $E^u = \{0\}$ und $E^c \neq \{0\}$ die Stabilität des kritischen Punktes einer Differentialgleichung alleine auf die Stabilität der zugehörigen Zentrumsmannigfaltigkeit zurückzuführen ist. Somit reicht es aus das Verhalten von W^c zu untersuchen um die Stabilitätsanalyse eines Fixpunktes durchzuführen. Des Weiteren können Zentrumsmannigfaltigkeiten auch bei der Untersuchung auf Bifurkationen sehr nützlich sein, da die Ordnung des Differentialgleichungssystem anhand von ihnen reduziert werden kann, wie gerade im letzten Beispiel zu erkennen war.

Insgesamt bilden Zentrumsmannigfaltigkeiten somit ein äußerst wichtiges Hilfsmittel bei der Analyse des Stabilitätsverhaltens der Fixpunkte von Differentialgleichungen.

6 Literatur

Barreira, L., & Valls, C. (2012). Ordinary Differential Equations:
Qualitative Theory.
Providence, Rhode Island: American Mathematical Society.