UNIVERSITÄT MANNHEIM
Fakultät für Wirtschaftsinformatik und Wirtschaftsmathematik

Seminar

Topologische Konjugation und Strukturelle Stabilität

10.04.2019

Jingting Yuan

Topologische Konjugation

Begriff 0. Ein Homöomorphismus ist eine bijektive und stetige Abbildung zwischen zwei topologischen Räumen, deren Umkehrabbildung auch stetig ist.

Definition 1. Zwei Homöomorphismen $f : X \to X$ und $g : X \to X$ heißen topologisch konjugiert, wenn es einen Homöomorphismus $h : X \to X$ gibt, sodass $h \circ f = g \circ h$. Das Homöomorphismus h nennt man eine topologische Konjugation oder eine Konjugation von f nach g.
Zwei Homöomorphismen wie f und g unterscheiden sich durch eine kontinuierliche Änderung der Koordinaten.

Proposition 2. Die Relation zwischen zwei Homöorphismen, konjugieren zu sein, ist eine Äquivalenzbeziehung. Man kann dann sofort einsehen, dass $h \circ f^n = g^n \circ h$

Bew. 1. Zu zeigen: die Äquivalenzbeziehung
• Reflexivität: Wenn h ein identisches Homöomorphismus ist, dann konjugiert h zu sich selbst.
• Symmetrie: nach Definition 1. $h \circ f = g \circ h$, $f = h^{-1} \circ g \circ h$
$f \circ h^{-1} = h^{-1} \circ g \circ h \circ h^{-1} = h^{-1} \circ g$
Nach der Definition des Homöomorphismus ist h^{-1} auch ein Homöomorphismus, d.h. g konjugiert zu f auch.
• Transitivität: Seien h,f,g Homöomorphismen in X, und $h_1 \circ f = h \circ h_1$ und $h_2 \circ h = g \circ h_2$.
Dann ist

$$h_2 \circ h_1 \circ f = h_2 \circ h \circ h_1 = g \circ h_2 \circ h_1$$

2. Zu zeigen: $h \circ f^n = g^n \circ h$

$$h \circ f = g \circ h$$
$$f = h^{-1} \circ g \circ h$$
$$f^n = h^{-1} \circ g \circ h \circ h^{-1} \circ g \circ h ...... \circ g \circ h = h^{-1} \circ g^n \circ h$$

Daher enthält eine Konjugation h Orbits. D.h.

$$h[Orb(x, f)] = Orb(h(x), g)$$

Bew.

$$Orb(x, f) = f^n(x)_{n=-\infty}^{\infty}$$
$$h[Orb(x, f)] = h(f^n(x))_{n=-\infty}^{\infty} = g^n(h(x))_{n=-\infty}^{\infty} = Orb(h(x), g)$$

□

Bemerkung 3. Eine Konjugation $h : X \to X$ enthält periodische Menge, Limesmenge, nonwandering-Menge und Kette-Rekurrenz Menge.

$$h[P(f)] = P(g)$$
$$h(w(x,f)) = w(h(x),g)$$
$$h[\Omega(f)] = \Omega(g)$$
$$h(CR(f)) = CR(g)$$

Ideal wäre es, alle Homöomorphismen bis zur Konjuagtion zu klassifizieren, was in Realität unmöglich ist. Für extrem einfache Räume ist eine Klassifizirung nicht kompliziert.

Proposition 4. Ein Homöomorphismus $f : [a,b] \to [a,b]$ ist entweder streng monoton steigend, oder streng monoton fallend. Wenn f streng monoton steigend ist, dann sind die zwei Endpunkte im Intervall fixiert. Wenn f streng monoton fallend ist, tauschen sich die beiden Endpunkte im Intervall aus.

Bew. Wegen der Eigenschaft des Homöomorphismus ist f injektiv und stetig, d.h. f ist entweder streng monoton steigend, oder streng monoton fallend. In dem ersten Fall gelten dann $f(a) = a$ und $f(b) = b$. Da gibt es zwei Fixpunkte an der Stelle der Endpunkte. In dem zweiten Fall gelten $f(b) = a$ und $f(a) = b$. Dann sind die beide Endpunkte ausgetauscht und keine Fixpunkte mehr.

□

Definition 5. Wir nennen f orientierungserhaltend, wenn f streng monoton steigend ist und orientierungsumkehrend, wenn f streng monoton fallend ist.

Proposition 6. Ein orientierungserhaltender Homöomorphismus kann nicht zu einem orientierungsumkehrenden Homöomorphismus konjugiert sein.

Bew. Seien f hier ein orientierungserhaltender Homöomorphismus, g ein orientierungsumkehrender Homöomorphismus und h ein Homöomorphismus. Da h entweder orientierungserhaltend oder orientierungsumkehrend ist, hat h dann zwei Fixpunkte oder keine Fixpunkte an der Endstelle von Intervall. Nach der Definition der Konjugation kann ein Fixpunkt nur zu einem Fixpunkt konjugieren. Auf obiger Definition kann man sofort schließen, da f zwei Fixpunkte an der Endstellen im Intervall haben aber g nicht. Deshalb sind f und g nicht zueinander konjugiert.

□

Proposition 7. Für irgendein orientierungserhaltender Homöomorphismus $f : [a,b] \to [a,b]$, gilt

CR(f)=Fix(f)

Bew." $\subseteq$ " schon klar (aus letzter Kapital)
" $\supseteq$ " Sei $x \notin Fix(f), f(x) > x$ und $\epsilon = |f(x) - x|/2, \forall \epsilon > 0$
Sei $x_0 = x$ Nach der Definition der Ketten-Rekurrenz gilt es $d(f(x_n), x_{n+1}) < \epsilon$
$f(x_0) - x_0 = 2\epsilon$ und $|f(x_0) - x_1| < \epsilon$

Dann gilt: $x_1 > x_0$
Da f streng monoton steigend ist, gilt $f(x_1) > f(x_0)$, also ist auch $x_2 > x_0$
Nach der Eigenschaft der Monotonie gilt $x_n > x_0$.
Daher gibe es keine $\epsilon - Kette$ von x nach x, da $x_n \neq x_0$ ist.

$\square$

Definition 8. Im Folgenden betrachten wir orientierungserhaltende Homöomorphismen f von $[a, b]$ auf sich selber, die in (a,b) keine Fixpunkte haben. Im Allgemeinen ist die Einschränkung eines orientierungserhaltenden Homöomorphismuses auf dem Abschluss einer Zusammenhangskomponente des Komplements der Fixpunkte Fix(f) wieder ein Homöomorphismus.

Satz 9. Zwei beliebige orientierungserhaltende Homöomorphismen auf [a,b] ohne Fixpunkte in (a,b) sind topologisch konjugiert.

Bew. Sei f,g zwei orientierungserhaltende Homöomorphismen auf [a,b] ohne Fixpunkte in (a,b).
Nehmen wir an, $f(x) > x$, $g(x) > x$ $\forall x \in (a, b)$ Für andere Fälle gilt ähnliches.
Wir definieren einen beliebigen Homöomorphismus

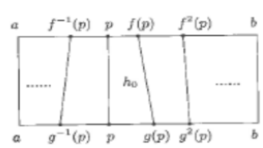
$$h_0 : [p, f(p)] \to [p, g(p)]$$

für ein beliebiges $p \in (a, b)$ und mit $h_0(p) = p$ und $h_0(f(p)) = f(p)$.
Definieren wir weiter

$$h_n : [f^n(p), f^{n+1}(p)] \to [g^n(p), g^{n+1}(p)]$$

für alle $n \in Z$ mit $h_n = g^n \circ h_0 \circ f^{-n}$.
Da

$$h_n(f^n(p)) = g^n(h_0(f^{-n}(f^n(p))) = g^n(h_0(p)) = g^n(p)$$
$$h_n(f^{n+1}(p)) = g^n(h_0(f^{-n}(f^{n+1}(p))) = g^n(h_0(f(p))) = g^{n+1}(p)$$



Jetzt mit der Hilfe des Bilds zu zeigen:

$$lim_{n\to-\infty} f^n(p) = lim_{n\to\infty} f^{-n}(p) = a \text{ und } lim_{n\to\infty} f^{n+1}(p) = b$$

Bew: Wenn $n \to \infty$, dann gilt $lim f^{n+1} = lim f^n$
Sei $y := lim f^n(p)$, dann gilt:

$$f(y) = f(lim f^n(p)) = lim f^{n+1}(p) = lim f^n(p) = y$$

Da $f(y) = y$ ein Fixpunkt ist, gilt $lim_{n\to\infty} f^n(p) = b$. Denn f ist ein orientierungserhaltender Homöomorphismus auf [a,b] ohne Fixpunkte in (a,b), d.h. f hat nur zwei Fixpunkte an der Endstellen a und b.
Es bleibt noch zu zeigen:

Homöomorphismus $h : [a, b] \to [a, b]$ erfüllt die Bedingung $h \circ f = g \circ h$.

Bew: Sei $\in [f^n(p), f^{n+1}(p)]$ gilt Homöomorphismus $h : [f^n(p), f^{n+1}(p)] \to [g^n(p), g^{n+1}(p)]$ mit $f(q) \in [f^{n+1}(p), f^{n+2}(p)]$.
Dann gilt $h \circ f(q) = h^{n+1} \circ f(q) = g^{n+1} \circ h_0 \circ f^{(-n-1)} \circ f(q) = g \circ g^n \circ h_0 \circ f^n(q) = g \circ h_n(q) = g \circ h(q)$

$\square$

Stukturelle Stabilität

Begriff 0. Ein Diffeomorphismus ist eine bijektive, stetig differenzierbare Abbildung zwischen zwei topologischen Räumen, deren Umkehrabbildung auch stetig differenzierbar ist.

Definition 10. Sei [a,b] ein kompaktes Intervall.
Für ein $f \in \mathrm{Diff}^r([a, b])$ ist C^r strukurell stabil, wenn es eine C^r Umgebung von f in $\mathrm{Diff}^r([a, b])$ gibt, so dass jedes $g \in U$ zu f topologisch konjugiert.
f ist strukturell stabil, wenn C^r kleine Störungen die topologische Struktur des Orbits nicht ändern können.

Bemerkung 11. Die C^r strukturelle Stabilität ist am stärksten. Das Konzept von C^0 strukturell Stabilität ist sinnlos, da die Störungen von C^0 zu stark sind.

Bsp. Eine C^0 Störung kann einfach einen isolierten Fixpunkt in eine ganze Umgebung von Fixpunkten verwenden, daher stört es die strukturelle Stabilität in irgendeiner Umgebung.

Proposition 12. f ist C^r strukturell stabil, dann ist f auch C^{r+1} strukturell stabil.

Bew. C^1 ist die größte Umgebung. C^{r+1} ist kleiner als C^r und ist eine Teilmenge von C^r. Wenn f in C^r liegt, dann ist f auch in C^r.

□

Bemerkung 13. f,g müssen nicht nur homöomorph sein, sondern auch diffeomorph. Die Konjugtion h muss nur ein Homöomorphismus sein, aber nicht ein Diffeomorphismus.

Bsp. Sei h ein Diffeomorphismus. Nach der Definition des Homöomorphismus $h^{-1} \circ f = g \circ h^{-1}$ gilt

$$g = h \circ f \circ h^{-1}$$
$$g(h(x)) = h \circ f \circ h^{-1} \circ h(x) = h(x) \text{ mit } f(x) = x$$
$$\text{Mit Kettenregel gilt es } g^{'}(h(x)) = h^{'}(x) f^{'}(x) h^{-1'}(x) h(x) = f^{'}(x)$$
$$\text{Da } h^{'}(x) h^{-1'}(x) h(x) = 1 \text{ wegen } h^{-1} \circ h(x) = x$$

Das Wert von der ersten Ableitung von $g(h(x))$ ist zu eingeschränkt, wenn h diffeomorph ist.

Proposition 14. Wenn f ein C^1-Diffeomorphismus ist, dann sind es auch alle Homöomorphismen g in einer C^1 Umgebung von f.

Bew. Wenn f eine C^1 Diffeomorphismus ist, dann hat der Betrag $|f^{'}|$ der Ableitung keine Nullstellen, und ist nach unten durch eine positive Zahl beschränkt.

Dann gilt das auch für alle g in einer hinreichend kleinen C^1 Umgebung von f. Dann sind aber auch die Umkehrabbildungen von g stetig differenzierbar.

$\square$

Satz 15. Sei $f : [a,b] \to [a,b]$ ein orientierungserhaltender Diffeomorphismus ohne Fixpunkte in (a,b). Für alle $r \geq 1$ ist f C^r strukturell stabil genau dann, wenn $f^{'}(a) \neq 1, f^{'}(b) \neq 1$.

Bew." $\supseteq$ " Sei $f^{'}(a) \neq 1, f^{'}(b) \neq 1$
Nach der Proposition 5 ist der Fall $r = 1$ gleich wie $r > 1$
Sei ϵ_1=min$\{|f'(a) - 1|/2, |f'(b) - 1|/2\}$
Sei $\exists \delta_1 > 0 \ |f'(x) - f'(a)| < \epsilon_1, \ \forall x \in [a, a+\delta_1]$.
Dann gilt $|f'(x) - f'(a)| + |f'(a) - 1| \geq |f'(x) - 1| \Rightarrow |f'(x) - 1| > 2\epsilon_1 - \epsilon_1 = \epsilon_1 > 0$
$\forall x \in [a, a+\delta_1] \Leftrightarrow$ f(x) hat keinen Fixpunkt im Intervall $x \in [a, a+\delta_1]$
Sei $\exists \delta_2 > 0 \ |f'(x) - f'(b)| < \epsilon_1, \ \forall x \in [b-\delta_2, b]$.
Dann gilt $|f'(x) - f'(b)| + |f'(b) - 1| \geq |f'(x) - 1| \Rightarrow |f'(x) - 1| > 2\epsilon_1 - \epsilon_1 = \epsilon_1 > 0$
$\forall x \in [b-\delta_2, b] \Leftrightarrow$ f(x) hat auch keinen Fixpunkt im Intervall $x \in [b-\delta_2, b]$
$\Rightarrow$ f(x) hat keinen Fixpunkt $\forall x \in [a, a+\delta_1] \cup [b-\delta_2, b]$ nach dem Mittelwertsatz
Sei ϵ_2 =min$|f(x) - x|/2 \ \forall x [a+\delta_1, b-\delta_2]$
Wir definieren jetzt ein g in $C^1([a,b])$ ist, mit $|f'(x) - g'(x)|_\infty < \epsilon_2$ und $|f(x) - g(x)|_\infty < \epsilon_2$
Dann gilt $|f(x) - g(x)| + |g(x) - x| \geq |f(x) - x| \Rightarrow |g(x) - x| > 2\epsilon_2 - \epsilon_2 = \epsilon_2 > 0$
$\Rightarrow$ g ist orientierungserhaltend und hat keinen Fixpunkt auf $[a+\delta_1, b-\delta_2]$.
Nach dem Satz 1. sind f und g topogolisch konjugiert, ist dann f C^r strukturell stabil.

Beweis mit Widerspruch. " $\subseteq$ "
Zu zeigen: C^r nicht strukturell stabil, wenn $f^{'}(a) = 1$ oder $f^{'}(b) = 1$.
Wir nehmen jetzt an, dass $f^{'}(a) = 1$ und a=0 , b=1. O.B.d.A. nehmen wir hier $f(x) > x$ an. Sei eine $C^\infty-$Funktion $\alpha : [0,1] \to [0,1]$:

$$\alpha(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, 1/3] \\ 0 & x \in [2/3, 1] \end{cases}$$

Wir definieren für alle $\epsilon > 0$ gilt $g(x) = g_\epsilon(x) = f(x) - \epsilon\alpha(x)x$. Wenn ϵ hinreichend klein ist, ist g dann ein orientierungserhaltender Diffeomorphismus. Da $g(x) = f(x) - \epsilon\alpha(x)x$, konvergiert g gegen f für $\epsilon \to 0$. Klar sind x=0 und x=1 Fixpunkte von g. Da $g(x) = f(x) - \epsilon x$ für $x \in [0, 1/3]$, gilt es $g^{'}(x) = f^{'}(x) - \epsilon = 1 - \epsilon$. D.h. $\exists x \in [0, 1/3]$ mit $g(x) < x$. Für $x \in [2/3, 1]$ gilt $g(x) = f(x)$. Da $f(x) > x$, gilt dann $g(x) > x$. Der Graph von f geht dann leicht nach untern und danach steigt er wieder. Dann hat g also zumindestens noch einen dritten Fixpunkt. Nach der vorherigen Definition kann g nicht zu f topologisch konjugieren, deshalb ist f nicht strukturell stabil.

$\square$

Bemerkung 16. Sei $f : [a,b] \to [a,b]$ ein orientierungserhaltender Diffeomorphismus ohne Fixpunkte in (a,b). Wenn f in C^i strukturell stabil ist, dann ist f in C^j auch strukturell stabil, für $\forall i, j \in N$.

Literaturzeichnis

1. Lan Wen: Differentiable dynamical systems: an introduction to structural stability and hyperbolicity