UNIVERSITÄT MANNHEIM

Seminar

Ausgewählte Themen gewöhnlicher Differentialgleichungen und dynamischer Systeme

Name: Veniamin Gvozdik

Thema: Zeitdiskrete Dynamische Systeme I
Grundlegende Konzepte

Definition 1
Sei X ein kompakter metrischer Raum und $f : X \to X$ ein Homöomorphismus.
f generiert eine Familie von Homöomorphismen, sogenannte Iterationen von f mit folgenden Eigenschaften: $f^n = \underbrace{f \circ f \cdots \circ f}_{n}$, $f^0 = id$, $f^{-n} = (f^n)^{-1}$

Eine Familie $\{f^n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ oder einfach f nennen wir ein dynamisches System.

Es ist klar, dass $f^n \circ f^m = \underbrace{f \circ f \cdots \circ f}_{n} \circ \underbrace{f \circ f \cdots \circ f}_{m} = \underbrace{f \circ f \cdots \circ f}_{n+m} = f^{n+m}$
$\forall n, m \in \mathbb{Z}$

Definition 2
Sei $x \in X$. Die Menge $\{f^n(x)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ nennen wir ein Orbit von x unter f. Notation: $Orb(x, f)$ oder $Orb(x)$.

Proposition 3
Zwei Orbiten sind entweder disjunkt oder identisch.
Beweis:
Sei $x, y \in X$. Definiere eine Relation $x \sim y :\Leftrightarrow x$ liegt im Orbit von y. Wir behaupten jetzt, dass es eine Äquivalenzrelation ist.
1) Reflexivität $x \sim x$ ist klar, weil $f^0(x) = id(x) = x$.
2) Symmetrie wenn $x \sim y$, dann $\exists n \in \mathbb{Z}$, sodass $f^n(x) = y$. Wende f^{-n} an und erhalte $f^{-n} \circ f^n(x) = f^{n-n}(x) = x = f^{-n}(y)$. Dann folgt $y \sim x$.
3) Transitivität wenn $x \sim y$ und $y \sim z$ git, dann $\exists n, m \in \mathbb{Z}$, sodass $f^n(x) = y$ und $f^m(y) = z$. Kombiniere die zwei Eigenschaften und erhalte $f^{m+n}(x) = f^m \circ f^n(x) = f^m(y) = z$. Also $x \sim z$.
Jetzt sehen wir, dass die Zugehörigkeit zu einer Orbit eine Äquivalenzrelation bildet und der Orbit selber eine Äquivalenzklasse ist. Wir wissen aber, dass zwei Äquivalenzklassen entweder disjunkt oder identisch sein müssen. Daraus folgt die Behauptung. ■

Definition 4
Die Menge $\{x, fx, f^2x, \cdots\}$, bzw. $\{x, f^{-1}x, f^{-2}x, \cdots\}$ nennen wir ein positiver, bzw. negativer Orbit. Notation: $Orb^+(x)$, bzw. $Orb^-(x)$

Definition 5
a) Den Punkt $x \in X$ nennt man periodisch , wenn $\exists n \geq 1$, sodass $f^n(x) = x$.
b) $min\{n \geq 1 | f^n(x) = x\}$ nennt man die Periode von x.
c) Den Orbit von einem periodischen Punkt nennt man einen periodischer Orbit.
d) Periodische Punkte mit der Periode 1 nennt man Fixpunkte.
e) Die Menge von periodischen Punkten, bzw. Fixpunktenvon f notieren wir als $P(f)$, bzw. $Fix(f)$.

Proposition 6
$x \in X$ ist periodisch $\Leftrightarrow Orb(x)$ besteht aus endlich vielen Punkten
Beweis:
$'' \Rightarrow ''$ Sei $x \in X$ periodisch.Nach Definition $\exists n \geq 1$, sodass $f^n(x) = x$, bzw.$f^{-n}(x) = x$. Wir möchten zeigen, dass $Orb(x)$ aus n Punkten besteht. D.h. $f^{n+m}(x) = f^n \circ f^m(x) = f^m(x)$, bzw.$f^{-n+m}(x) = f^{-n} \circ f^m(x) = f^m(x)$ Für $-n \leq m \leq n$ ist es klar. Wenn $m > n$, bzw. $m < -n$, dann
$f^m(x) = f^{z \cdot n - z \cdot n + m}(x) = f^{z \cdot n} \circ f^{m - z \cdot n}(x) = \underbrace{f^n \circ f^n \cdots \circ f^n}_{z} \circ f^{m - z \cdot n}(x)$, bzw.

$f^m(x) = f^{z \cdot n - z \cdot n + m}(x) = f^{-z \cdot n} \circ f^{m + z \cdot n}(x) = \underbrace{f^{-n} \circ f^{-n} \cdots \circ f^{-n}}_{z} \circ f^{m + z \cdot n}(x)$.

Wiederhole z-mal, bis $m - z \cdot n \leq n$,bzw. $-n \leq m + z \cdot n$
$'' \Leftarrow ''$ Wir beweisen die Rückrichtung durch einen Widerspruch.
Zu zeigen: $x \in X$ ist nicht periodisch $\Rightarrow Orb(x)$ ist nicht endlich.
Sei $x \in X$ ist nicht periodisch, d.h. $\nexists n \geq 1$, sodass $f^n(x) = x$. Die anderen Punkten aus dem Orbit dürfen sich aber nicht wiederholen, weil sonst x periodisch wird. D.h. wenn es $m \neq n$ gibt, mit $f^n(x) = f^m(x)$, dann gilt $x = f^{m-n}(x)$, was nicht sein kann. Daher besteht $Orb(x)$ aus unendlich vielen Punkten, die ungleich x sind. Also $Orb(x)$ ist nicht endlich.$\blacksquare$

Definition 7
Eine Teilmenge $\Lambda \subset X$ nennt man invariant unter f, wenn $f(\Lambda) = \Lambda$

Proposition 8
a)Jeder Orbit ist invariant
b)Λ ist invariant $\Leftrightarrow \Lambda$ ist die Vereinigung von Orbiten
Beweis:
a) Sei $\{f^n(x)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ ein Orbit von x. Wenn wir ein Element aus dem Orbit nehmen, dann ist es von der Form $f^m(x), m \in \mathbb{Z}$. Es ist klar, dass $f \circ f^m(x) = f^{m+1}(x)$ in dem Orbit von x liegt. Also ist jeder Orbit invariant.
b) $'' \Leftarrow ''$ Jeder Orbit ist invariant und daher ist die Vereinigung von den Orbiten auch invariant
$'' \Rightarrow ''$ Sei Λ invariant, dann $\forall x \in \Lambda$ gilt, dass $f(x) \in \Lambda$ und $f^{-1}(x) \in \Lambda$. Man setzt das induktiv fort und erhält $\{f^n(x)\}_{n=-\infty}^{\infty} \in \Lambda$, $\forall x \in \Lambda$. Weil die Orbiten von allen x in Λ liegen, folgt mit der Proposition 3, dass Λ eine Vereinigung von Orbiten ist. $\blacksquare$

Satz 9
Wenn Λ invariant ist, dann sind auch $\overline{\Lambda}, int(\Lambda), \partial(\Lambda)$ invariant
Beweis:
(1) Sei $x \in \overline{\Lambda}$, dann gibt es eine Folge $x_n \in \Lambda$ mit $x_n \to x$, dann $f(x) = f(lim_{n\to\infty}(x_n)) = lim_{n\to\infty}(f(x_n))$ Weil Λ invariant ist liegen $f(x_n) \in \Lambda$. Daraus folgt liegt $f(x) \in \overline{\Lambda}$
(2) Sei $O \subset \Lambda$ eine offene Menge. Weil f ein Homöomorphismus ist, ist f^{-1}, was

$O \mapsto f^{-1}(O)$ abbildet, stetig. Daraus folgt, dass das Urbild $(f^{-1})^{-1}(O) = f(O)$ offen ist. Weil Λ invariant ist, ist $f(O) \subset \Lambda$. D.h $int(\Lambda) \supset O \mapsto f(O) \subset int(\Lambda)$ und damit ist $int(\Lambda)$ invariant.
(3) Sei $x \in \partial\Lambda$. Oder äquivalent $x \in \overline{\Lambda} \setminus int(\Lambda)$ Wir wissen schon , dass $\overline{\Lambda}, int(\Lambda)$ invariant sind. Deswegen muss auch der Rand $\partial(\Lambda)$ invariant sein. ■

Proposition 10
a) $Fix(f)$ ist kompakt, invariant
b) $P(f)$ ist invariant und möglicherweise leer
Beweis:
a) Invarianz: $\forall x \in Fix(f) : f(x) = x \in Fix(f)$
Kompaktheit: $Fix(f) \subset X$, wobei X kompakt ist. z.z. $Fix(f)$ ist abgeschlossen. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in Fix(f)$ eine konvergente Folge mit $lim_{n\to\infty}(x_n) = x \in X$. Dann gilt $x = lim_{n\to\infty}(x_n) = lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(lim_{n\to\infty}(x_n)) = f(x)$. D.h. $x = lim_{n\to\infty}(x_n) \in Fix(f)$ und damit ist $Fix(f)$ abgeschlossen. Also $Fix(f)$ ist eine abgeschlossene Teilmenge von einem kompakten Raum Xund damit auch selber kompakt.
b) 1) Invarianz: Sei $x \in P(f)$ und $n \geq 1$ die Peiriode von x, dann gilt $f(x) = f \circ f^n(x) = f \circ f^{2n}(x) = \cdots$ usw. Also $f(x) \in P(f)$ und damit ist $P(f)$ invariant.
2) Beispiel: Sei $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ mit $\phi \mapsto f(\phi) = \phi + \alpha$, wobei $\alpha \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Q}$. Die Abbildung f ist genau dann periodisch, wenn es ein $n \geq 1$ gibt, sodass $f^n(\phi) = \phi + \alpha n = \phi + 2\pi m$, wobei $m \in \mathbb{Z}$. Also muss $\alpha = 2\pi\frac{m}{n}$, was wir ausgeschlossen haben. Daraus folgt $P(f) = \emptyset$. ■

Definition 11
a) Der Punkt $y \in X$ heißt ω - limes von $x \in X$, wenn es eine Teilfolge $n_i \to \infty$ gibt, wobei n_i natürliche Zahlen sind, sodass $f^{n_i}(x) \to y$
b) Der Punkt $y \in X$ heißt α - limes von $x \in X$, wenn es eine Teilfolge $n_i \to \infty$ gibt, wobei n_i natürliche Zahlen sind, sodass $f^{-n_i}(x) \to y$
c) Die Menge von allen ω - limes, bzw. α - limes von $x \in X$ bezeichnen wir mit $\omega(x)$, bzw. $\alpha(x)$

Proposition 12
Wenn $x \in P(f)$, dann $\omega(x) = \alpha(x) = Orb(x)$
Beweis:
(1) $''\alpha(x) \subset Orb(x)''$ Wir wissen, dass $\alpha(x) \subset \overline{Orb(x)}$, weil $\alpha(x) \ni y = lim_{n_i\to\infty}(f^{-n_i}(x))$ und $(f^{-n_i}(x))_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $Orb(x)$, liegt y als Grenzwert der Folge $(f^{-n_i}(x))_{i\in\mathbb{N}} \subset \overline{Orb(x)}$ in $\overline{Orb(x)}$. $Orb(x)$ ist endlich, dann $\overline{Orb(x)} = Orb(x)$. Folglich gilt $\alpha(x) \subset \overline{Orb(x)} = Orb(x)$
$''\alpha(x) \supset Orb(x)''$ Weil x ein periodischer Punkt mit der Periode n ist, ist $Orb(x) = \{f^m(x)|0 \leq m < n\}$. Wir konstruiren eine Folge in $Orb(x)$,die folgendermaßen aussieht: $f^m(x), f^{m-n}(x), f^{m-2n}(x), \ldots$, wobei $0 \leq m < n$ und n ist die Periode von x. So erhalten wir eine konstante Folge, die aus $f^m(x)$ besteht. Und deswegen liegt $f^m(x) \in \alpha(x)$ und

daher $\alpha(x) \supset Orb(x)$
(2) $''\omega(x) \subset Orb(x)''$ Wir wissen, dass $\omega(x) \subset \overline{Orb(x)}$, weil $\omega(x) \ni y = lim_{n_i \to \infty}(f^{n_i}(x))$ und $(f^{n_i}(x))_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $Orb(x)$, liegt y als Grenzwert der Folge $(f^{n_i}(x))_{i \in \mathbb{N}} \subset \overline{Orb(x)}$ in $\overline{Orb(x)}$. $Orb(x)$ ist endlich, dann $\overline{Orb(x)} = Orb(x)$. Folglich gilt $\omega(x) \subset \overline{Orb(x)} = Orb(x)$
$''\omega(x) \supset Orb(x)''$ Weil x ein periodischer Punkt mit der Periode n ist, ist $Orb(x) = \{f^m(x) | 0 \leq m < n\}$. Wir konstruiren eine Folge in $Orb(x)$,die folgendermaßen aussieht: $f^m(x), f^{m+n}(x), f^{m+2n}(x), \ldots$, wobei $0 \leq m < n$ und n ist die Periode von x. So erhalten wir eine konstante Folge, die aus $f^m(x)$ besteht. Und deswegen liegt $f^m(x) \in \omega(x)$ und daher $\omega(x) \supset Orb(x)$. ■

Satz 13
Für jedes $x \in X$ ist $\omega(x)$ nicht leer, kompakt, invariant und $lim_{n \to \infty} d(f^n(x), \omega(x)) = 0$
Beweis:
(1) Sei $x \in X$. Betrachte eine Folge $(f^n(x))_{n \in \mathbb{N}}$. Weil X ein kompakter metrischer Raum ist, ist er auch folgenkompakt, d.h. es gibt eine Teilfolge $n_i \to \infty$ wobei n_i natürliche Zahlen sind, sodass $f^{n_i}(x) \to y$ mit $y \in X$. Daher ist $\omega(x)$ nicht leer.
(2) Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\omega(x)$ mit $lim_{n \to \infty}(x_n) = y \in X$. WIr definieren induktiv eine monoton wachsende Folge $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$, sodass $d(f^{n_k}(x), x_k) < \frac{1}{k}$. Wir benutzen die Dreiecksungleichung und erhalten, dass $d(f^{n_k}(x), y) \leq \underbrace{d(f^{n_k}(x), x_k)}_{\to 0} + \underbrace{d(x_k, y)}_{\to 0}$ Daraus folgt , dass $lim_{k \to \infty}(f^{n_k}(x_k)) = y$. Damit haben wir die Kompaktheit von $\omega(x)$ gezeigt.
(3) Sei $y \in \omega(x)$, dann $\exists n_i \to \infty$, sodass $f^{n_i}(x) \to y$. Dann folgt, dass $f \circ f^{n_i}(x) = f^{n_i+1}(x) \to f(y)$. D.h. $f(y) \in \omega(x)$ und $f(\omega(x)) \subset \omega(x)$. Gleichzeitig gilt, dass $f^{-1} \circ f^{n_i}(x) = f^{n_i-1}(x) \to f^{-1}(y)$. Das impliziert $f^{-1}(\omega(x)) \subset \omega(x)$ und folglich $f(\omega(x)) \supset \omega(x)$. D.h.$f(\omega(x)) = \omega(x)$.
(4) Nehme an, dass $lim_{n \to \infty} d(f^n(x), \omega(x)) = 0$ nicht gilt. Dann $\exists \epsilon > 0$ und eine Teilfolge $n_i \to \infty$, sodass $d(f_i^n(x), \omega(x) \geq \epsilon \; \forall i$ Wenn wir eine Teilfolge n_{i_k} nehmen, folgt $f^{n_{i_k}} \to z \notin \omega(x)$, was ein Widerspruch ist. ■

Definition 14
Die Menge $L(f) = \overline{\bigcup_{x \in X} \omega(x) \cup \alpha(x)}$ heißt eine Limesmenge.

Bemerkung 15
$L(f)$ ist nicht leer, kompakt und invariant
Beweis:
1) Nach Satz 13 ist $\omega(x) \; \forall x \in X$ nicht leer, deswegen ist $L(f)$ auch nicht leer
2) $L(f) \subset X$ ist abgeschlossen nach Definition und X ist kompakt, deswegen ist $L(f)$ auch kompakt
3) i) Sei $x \in \bigcup_{x \in X} \omega(x) \cup \alpha(x)$, dann liegt $f(x)$ auch in $\bigcup_{x \in X} \omega(x) \cup \alpha(x)$, weil $\alpha(x)$ und $\omega(x)$ invariant sind. Daher ist $\bigcup_{x \in X} \omega(x) \cup \alpha(x)$ invariant. Nach Satz 9

ist $\overline{\bigcup_{x\in X}\omega(x)\cup\alpha(x)}$ invariant. ■

Definition 16
a)Der Punkt $x \in X$ heißt positiv, bzw. negativ rekurrent, wenn $x \in \omega(x)$, bzw. $x \in \alpha(x)$
b)Positiv oder negativ rekurrente Punkte nennen wir rekurrent. Die Menge von den rekurrenten Punkten von f bezeichnen wir mit $R(f)$.

Bemerkung 17
$R(f)$ ist nicht leer und invariant
Beweis:
(1) Sei $x \in \Lambda \subset X$, wobei Λ minimal. Dann ist $\omega(x)$, bzw. $\alpha(x)$ eine abgeschlossene invariante Teilmenge von Λ. Daher liegt $Orb(x)$ und $\overline{Orb(x)}$ in Λ. Weil $\omega(x)$, bzw. $\alpha(x)$ nicht leer sind, folgt $\omega(x) = \Lambda$ und $\alpha(x) = \Lambda$. Daher liegt $x \in \omega(x)$ und $x \in \alpha(x)$ und schließlich $x \in R(f)$. Wegen dem Satz 27, besitzt X eine minimale Teilmenge $\Lambda \neq \emptyset$ und deswegen ist $R(f) \neq \emptyset$.
(2) Sei $x \in R(f)$, dann $\exists n_i \to \infty$, sodass $f^{n_i}(x) \to x$. Für $f(x)$ gilt, dass $f(lim_{i\to\infty}(f^{n_i}(x))) = lim_{i\to\infty}(f^{n_i+1}(x)) = f(x)$. D .h. $\exists \overline{n_i} := n_i + 1 \to \infty$, sodass $f^{\overline{n_i}}(x) \to f(x)$. Also $R(f)$ ist invariant. ■

Definition 18
a) Der Punkt $x \in X$ heißt nicht wandernd unter f, wenn es für jede Umgebung von x V ein $n \geq 1$ gibt, sodass $f^n(V) \cap V \neq \emptyset$
b)Die Menge von solchen Punkten bezeichnen wir $\Omega(f)$

Bemerkung 19
$\Omega(f)$ ist nicht leer , kompakt und invariant
Beweis:
a) Sei $x \in R(f)$ und V eine Umgebung von x, sodass $B(x, \epsilon) \subset V$ für ein $\epsilon > 0$. Nun wissen wir, dass $lim_{i\to\infty}(f^{m_i}(x)) = x$, daraus folgt $\forall \epsilon > 0\ \exists \tilde{N} \in \mathbb{N} : d(f^{m_i}(x), x) < \epsilon$ $\forall i \geq \tilde{N}$. D.h. $\forall \epsilon > 0\ \exists m_{\tilde{N}} := N$, sodass $f^N(x) \in B(x, \epsilon) \subset V$ liegt. Folglich gilt, dass es für eine beliebige Umgebung von x V ein $N \geq 1$ gibt, sodass $f^N(V) \cap V \neq \emptyset$ und insbesonde $R(f) \subset \Omega(f)$. Die Bemerkung 17 sagt uns, dass $R(f) \neq \emptyset$, deswegen ist $\Omega(f) \neq \emptyset$.
b) Sei $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \Omega(f)$ mit $lim_{i\to\infty}(x_i) = x \in X$. Sei V_i eine beliebige Umgebung von x_i, dann $\exists n_i \geq 1$, sodass $f^{n_i}(V_i) \cap V_i \neq \emptyset$. Gleichzeitig wissen wir, dass jede Umgebung V von x alle bis auf endlich viele x_i enthält. Deswegen finden wir ein $n \geq 1$, sodass $f^n(V) \cap V \neq \emptyset$ ist. D.h $x \in \Omega(f)$ und daher ist Ω abgeschlossen und weil sie in X liegt ist $\Omega(f)$ kompakt.
c)Sei $x \in \Omega(f)$, dann $\forall U \ni x\ \exists n \geq 1 : f^n(U) \cap U \neq \emptyset$. Weil f ein Homöomorphismus ist, ist $f(U)$ eine Umgebung von $f(x)$. Und daher $\forall \tilde{U} = f(U)\ \exists n \geq 1 : f(f^n(U) \cap U) = f^n(\tilde{U}) \cap \tilde{U} \neq \emptyset$. Also $f(x) \in \Omega(f)$. ■

Definition 20
a) Eine ϵ -Kette von x nach y definieren wir als eine endliche Folge $x_0, x_1, \ldots, x_k$ mit $x_0 = x$ und $x_k = y$, sodass $d(f(x_n), x_{n+1}) < \epsilon$ für $n = 0, 1, \ldots, k-1$
b) Wenn $x = y$, dann nennt man eine ϵ -Kette periodisch
c) Der Punkt $x \in X$ nennt man Ketten-rekurrent von f, wenn es für alle $\epsilon > 0$ eine ϵ -Kette von x nach x existiert.
d) Die Mengen von solchen Punkten bezeichnen wir mit $CR(f)$

Bemerkung 21
$x \in X$ ist Ketten-rekurrent $\Leftrightarrow$ für jedes $\epsilon > 0$ $\exists$ eine periodische ϵ -Kette, die durch eine ϵ- Umgebung von x durchgeht.
Beweis:
$'' \Rightarrow ''$ trivial
$'' \Leftarrow ''$ Weil X kompakt ist, ist f gleichmäßig stetig. D.h. $\forall \epsilon > 0$ $\exists \delta > 0$, sodass $\forall x, y \in X$ gilt, dass $d(x, y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \frac{\epsilon}{3}$. Sei $\epsilon > 0$ beliebig und $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = x_0$ eine δ periodische Kette mit $\delta < \frac{\epsilon}{3}$. Wähle $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n$, sodass $d(x_i, y_i) < \delta$ $\forall 0 \leq i \leq n$. Dann folgt mit der gleichmäßigen Stetigkeit von f, dass $d(f(x_i), f(y_i)) < \frac{\epsilon}{3}$ $\forall 0 \leq i \leq n$. Daher ist $d(f(y_i), y_{i+1}) \leq d(f(y_i), f(x_i)) + d(f(x_i), x_{i+1}) + d(x_{i+1}, y_{i+1}) < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$ $\forall 0 \leq i < n$. Damit ist $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n$ eine ϵ-Kette. Weil ϵ beliebig gewählt wurde, ist x Kettenßrekurrent. ■

Korollar 22
$CR(f)$ ist kompakt invariant und $\overline{P(f)} \subset L(f) \subset \Omega(f) \subset CR(f)$
Beweis:
(1) Kompaktheit: Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in CR(f)$ mit$lim_{n\to\infty}(x_n) = y$. Weil $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen y konvergiert, $\forall \epsilon > 0$ $\exists x_N$, sodass $(d(x_N, y)) < \epsilon$. Weil $x_N \in CR(f)$, folgt es mit der Bemerkung 21, dass $y \in CR(f)$. Daher ist $CR(f)$ kompakt.
Invarianz. Sei $x_0 \in CR(f)$ beliebig, dann $\forall \epsilon > 0$ gibt es eine ϵ periodische Kette $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = x_0$. Weil f gleichmäßig stetig ist können wir $\forall \epsilon > 0$ eine ϵ-Kette durch $f(x_0)$ konstruiren. Also ist $CR(f)$ invariant.
(2)$''\overline{P(f)} \subset L(f)''$ Sei $x \in \overline{P(f)}$, dann $\exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in P(f)$, sodass $lim_{n\to\infty}(x_n) = x$. Weil alle x_n periodisch sind, $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists m_n \in \mathbb{N}$, sodass $f^{m_n}(x_n) = x_n$. Konstruire eine folge $\overline{n} = m_n \cdot z_n$ mit $z_n \in \mathbb{Z}$ und wähle z_n, sodass $\overline{n} < \overline{n+1}$. Man kann leicht sehen, dass $f^{\overline{n}}(x_n) = x_n \forall n \in \mathbb{N}$. D.h. $f^{\overline{n}}(x_n) \to x$. Also $x \in \omega(x)$. und damit auch in $L(f)$.
$''L(f) \subset \Omega(f)''$ Sei $x \in X$ und $y \in \omega(x)$, bzw. $\alpha(x)$ .Wir wissen , dass es für eine beliebige Umgebung V von y ein $m \geq 1$ gibt, sodass $f^m(x) \in V$, bzw. $f^{-m}(x) \in V$ liegt. Dann gibt es ein $n \geq 1$, sodass $f^{n+m}(x) = f^n \circ f^m(x) \in V$, bzw. $f^{-n-m}(x) = f^{-n} \circ f^{-m}(x) \in V$ liegt. Schließlich folgt, dass $f^n(V) \cap V \neq \emptyset$, bzw. $V \cap f^{-n}(V) \neq \emptyset$. Also $\forall x \in X$ gilt, dass $\omega(x)$, bzw. $\alpha(x)$ in $\Omega(f)$ liegen und damit auch $L(f)$.
$''\Omega(f) \subset CR(f)''$ Sei $x \in \Omega(f)$, dann für alle Umgebungen V von x, gibt es eine $n \geq 1$, sodass $f^n(V) \cap V \neq \emptyset$. Sei $x_0 = x, x_1 = f(x), \ldots x_{n-1} = f^{n-1}(x)$. Weil x nicht wandernd ist , liegt $f(x_{n-1}) = f^n(x) \in f^n(V) \cap V \neq \emptyset$. Wähle $x_n = x$ und erhalte eine ϵ-Kette

von x nach x. Weil V beliebig ist, kann auch ϵ beliebig gewählt werden. Daher liegt $x \in CR(f)$.

Definition 23
Eine Teilmenge $\Lambda \subset X$ nennt man minimal,wenn Λ nicht leer und kompakt invariant ist, aber es gibt keine echte Teilmenge von Λ , die kompakt invariant ist.

Bemerkung 24
Ein periodischer Orbit ist eine minimale Menge
Beweis:
Sei x ein periodischer Punkt mit der Periode $m \geq 1$, dann ist $Orb(x) = \{f^n(x)|0 \leq n < m\}$. Wenn wir eine echte Teilmenge A von $Orb(x)$ rausnehmen, dann $\exists i$, wobei $0 \leq i < m$, sodass $f^i(x) \in A$, weil aber x periodisch ist, $\exists q$, wobei $0 \leq q < m$, sodass $f^q \circ f^i(x) \notin A$ liegt. Daher ist A nicht invariant und $Orb(x)$ minimal. ■

Definition 25
Sei S eine Menge und $\prec$ eine binäre Relation für die Paare von Elementen aus S
a)Man sagt, dass $\prec$ eine partielle Ordung ist, wenn (1) $x \prec x \; \forall x \in S$, (2) $x \prec y \wedge y \prec x \Rightarrow x = y$ und (3) $x \prec y \wedge y \prec z \Rightarrow x \prec z$
b) Eine Teilmenge $A \subset S$ nennt man total geordnet bzgl. $\prec$, wenn $\forall (x, y)$, wobei $x, y \in A$ entweder $x \prec y$ oder $y \prec x$ gilt.

Definition 26
Sei $z \in S$ und $A \subset S$.
a) Der Punkt z ist ein minimales Element von S, wenn $\forall x \in S$ sowohl z, als auch x nicht vergleichbar sind oder $z \prec x$
b) Man sagt, dass z eine untere Schranke von A, wenn $z \prec x$, $\forall x \in A$

Satz 27
Jede nicht leere kompakte invariante Menge enthält eine minimale Menge.
Beweis:
Sei Γ eine nicht leere kompakte invariante Menge von f. Sei $\mathcal{C}$ die Menge von allen nicht leeren kompaten invarianten Teilmengen von f, die in Γ enthalten sind. Die Inklusion $\subset$ ist eine partielle Ordnung auf $\mathcal{C}$. Sei $\mathcal{A}$ eine total geordnete Teilmenge von $\mathcal{C}$. Sei A der Durchschnitt von alllen Elementen in $\mathcal{A}$. Jetzt müssen wir zeigen, dass A eine nicht leere kompakte invariante Menge ist. Kompaktheit und Invarianz sind klar, weil jedes Element von $\mathcal{A}$ invariant und kompakt, bzw. abgeschlossen ist, daher sind die beliebige Schnitte von $\mathcal{A}$ invariant und abgeschlossen und damit auch kompakt invariant. Jetzt müssen wir nur noch zeigen, dass $A \neq \emptyset$. Wenn $\mathcal{A}$ eine total geordnete Teilmenge von $\mathcal{C}$ ist, deren Schnittmenge leer ist, dann überdecken die Komplemente der Elemente von $\mathcal{A}$ Γ. Wegen der Kompaktheit von Γ gibt es eine endliche Teilüberdeckung. Die Komplemente dieser endlichen Teilueberdeckung bilden dann eine endliche Teilmenge von $\mathcal{A}$,

deren Schnittmenge auch leer ist. D.h. wenn A leer ist, dann ist die Schnittmenge von endlich vielen Elementen von $\mathcal{A}$ leer. Das ist aber nicht möglich, weil $\mathcal{A}$ total geordnet ist und die Elemente von $\mathcal{A}$ nicht leer sind, deswegen wenn wir endlich viele Elemente von $\mathcal{A}$ betrachten, können wir immer die kleinste Menge finden, die nicht leer ist. Also ist der Schnitt von endlich vielen Elementen von $\mathcal{A}$ nicht leer, daher ist A eine nicht leere kompakte invariante Menge von f. Folglich ist A eine untere Schranke von $\mathcal{A}$. Nach dem Lemma von Zorn [Wenn jede total geordnete Teilmenge $A \subset S$ eine untere Schranke hat, dann enthält S einen minimalen Element] hat $\mathcal{C}$ ein minimales Element, was einfach die minimlae Menge von f ist.■

Satz 28
Eine kompakte invariante Menge Λ ist minimal $\Leftrightarrow$ der Orbit von jedem $x \in \Lambda$ liegt dicht in Λ
Beweis:
$'' \Rightarrow ''$ Sei Λ minimal und $x \in \Lambda$ beliebig. Weil $\overline{Orb(x)} \subset \Lambda$ eine nicht leere kompakte invariante Menge und Λ minimal ist , ist $\overline{Orb(x)} = \Lambda$.
$'' \Leftarrow ''$ Sei Λ nicht minimal, dann $\exists \Lambda_1 \subsetneq \Lambda$, die nicht leer kompakt invariant ist. Sei $x \in \Lambda_1$ beliebig, dann $\overline{Orb(x)} \subset \Lambda_1 \neq \Lambda$. ■

Definition 29
Eine Teilmenge $\Lambda \subset X$ nennt man nirgendswo dicht, wenn $\overline{\Lambda}$ keine innere Punkte in X hat.

Satz 30
Sei X zusammenhängend, dann ist jede minimale Menge von f entweder der ganze Raum X oder nirgendswo dicht in X.
Beweis:
Sei Λ eine minimale Menge von f. Der Rand $\partial\Lambda$ ist kompakt invariant, weil $\partial\Lambda \subset \Lambda$ abgeschlossen ist.
i) Wenn $\partial\Lambda = \emptyset$, dann ist $\Lambda = int(\Lambda)$ und deswegen offen. D.h. Λ ist offen und abgeschlossen und gleich X, weil X abgeschlossen ist.
ii)Wenn $\partial\Lambda \neq \emptyset$, dann ist $\partial\Lambda \subset \Lambda$ eine nicht leere kompakte invariante Menge. Weil Λ minimal ist, muss sie gleich $\partial\Lambda$ sein. D.h. $int(\Lambda) = \emptyset$ und Λ hat keine innere punkte in X, also nirgendswo dicht in X ist. ■

Definition 31
Eine kompakte invariante Menge Λ nennt man nicht zerlegbar, wenn Λ nicht als eine disjunkte Vereinigung von zwei (nicht leeren) kompakten invarianten Mengen darstellbar ist.

Definition 32
Eine kompakte invariante Menge $\Lambda \subset X$ heißt topologisch transitiv (oder transitiv),

wenn $\exists x \in \Lambda$, sodass $\omega(x) = \Lambda$

Bemerkung 33
Transitive Mengen sind nicht zerlegbar.
Beweis:
Sei $\Lambda \subset X$ eine transitive Menge. Wir nehmen aber an, dass sie zerlegbar ist. D.h. $\exists A, B \subsetneq \Lambda$ nicht leer, sodass $A \dot{\cup} B = \Lambda$. O.B.d.A. Sei $x \in A$ und $\lambda \in B$. Wir wissen, dass es eine Folge $n_i \to \infty$ gibt, sodass $f^{n_i}(x) \to \lambda$. Weil A invariant ist, muss $\lambda \in A$ liegen, was ein Widerspruch ist. Damit haben wir unsere Annahme widerlegt und gezeigt, dass Λ nicht zerlegbar ist. $\blacksquare$

Satz 34 (Birkhoff)
Sei Λ eine kompakte invariante Menge von f. Die folgenden Aussagen sind äquivalent
(1) Λ ist transitiv.
(2) Für zwei offene Teilmengen $U, V \subset \Lambda$ $\exists n \geq 1$, sodass $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$
(3) $\exists x \in \Lambda$, derer positive Orbit dicht in Λ ist.
Beweis:
$''(1) \Rightarrow (2)''$ Sei Λ ist transitiv, dann $\exists x \in \Lambda$, sodass $\omega(x) = \Lambda$. Dann gibt es für jede offene Menge unendlich viele $n \geq 1$, sodass $f^n(x)$ in der offenen Menge liegt. Wenn wir zwei offene Menge U und V nehmen, dann $\exists m \geq 1$, sodass $f^m(x) \in U$ liegt und gleichzeitig $\exists k > m$, sodass $f^k(x) \in V$ liegt. Daher enthält $f^{k-m}(U)$ das Element $f^{(k-m)} \circ (f^m(x)) = f^k(x) \in V$. Also (2) ist gezeigt.
$''(2) \Rightarrow (3)''$ Sei $V_1, V_2, \ldots$ eine abzählbare Basis von Λ. $\forall i \geq 1$ ist die Menge $\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n} V_i$ offen in Λ und sie ist auch dicht in Λ , weil es für jede offene Menge $U \subset \Lambda$ eine $n \geq 1$, sodass $f^n(U) \cap V_i \neq \emptyset$, was auch nichts anderes als $U \cap f^{-n}(V_i) \neq \emptyset$. Wegen dem Satz von Baire [Wenn X ein vollständiger Raum ist, dann ist der Durchschnitt von abzählbar vielen dichten, offenen Mengen wieder dicht] ist $B = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} (f^{-n} V_i)$nicht leer und dicht in Λ. Sei $x \in B$, dann $\forall i \geq 1$ $\exists n \geq 1$, sodass $x \in f^{-n} V_i$, insbesondere $f^n(x) \in V_i$. Das zeigt, dass $Orb^+(x)$ dicht in Λ liegt.
$''(3) \Rightarrow (1)''$ Wir nehmen an, dass es ein $x \in \Lambda$ gibt, sodass $\Lambda = \overline{Orb^+(x)}$, dann liegt $f^{-1}(x) \in \overline{Orb^+(x)}$. Wenn $f^{-1} \in Orb^+(x)$ liegt, dann ist x periodisch und daher ist $\Lambda = \omega(x)$. Wenn $f^{-1} \notin Orb^+(x)$ liegt, dann liegt $f^{-1} \in \omega(x)$ und daher $Orb(x) \subset \omega(x)$. Dann dilt, dass $\Lambda = \overline{Orb^+(x)} \subset \omega(x)$. Aber Λ enthält x und deswegen auch $\omega(x)$, also $\Lambda \supset \omega(x)$. Folglich gilt $\Lambda = \omega(x)$. $\blacksquare$

Definition 35
a)Zwei Punkte $x, y \in CR(f)$ heißen Ketten-äquivalent (Notation $x \sim y$), wenn es $\forall \epsilon > 0$ eine ϵ-Kette von x nach y und eine ϵ-Kette von y nach x gibt.
b) Eine Äquivalenzklasse dieser Relation nennt man eine transitive Kettenklasse, oder einfach eine Kettenklasse von f.

Satz 36

Sei C eine Kettenklasse von f. Dann gilt:
(1) $\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0$, sodass für jede $x \in C$, jede δ- Kette durch x in einer ϵ-Umgebung von C $B(C, \epsilon)$ enthalten ist
(2)C ist nicht zerlegbar.
Beweis:
(1)Wir nehmen an, dass es ein $\epsilon_0 > 0$ existiert, sodass $\forall n \geq 1$ ein $x_0^n \in C$ und eine $1/n$-periodische Kette $x_0^n, x_1^n, \ldots, x_{j_n}^n$ gibt, sodass $x_{k_n}^n \notin B(C, \epsilon_0)$ für eine $k_n \in \mathbb{N}$. Nehme an, dass $x_0^n \to x$, $x_{k_n} \to y$. Dan ist x Ketten-äquivalent zu y. Aber $x \in C$ und $y \in C$, was ein Widerspruch ist.
(2)Wir nehmen an, dass C zerlegbar ist. D.h. $C = C_1 \dot{\cup} C_2$, wobei C_1, C_2 nicht leere kompkakte invariante Mengen sind. Wähle ein $\epsilon > 0$, sodass $B(C_1.\epsilon) \cap B(C_2, \epsilon) = \emptyset$ und $(f(B(C_1, \epsilon))) \cap B(B(C_2, \epsilon), \epsilon) = \emptyset$. Sei jetzt $x \in C_1$, dann $\exists \delta > 0$, sodass jede periodische δ-Kette durch x in $B(C_1, \epsilon) \cup B(C_2, \epsilon)$ enthalten ist. Wir nehmen an, dass $\delta < \epsilon$. Weil C_1 und C_2 in der gleichen Ketten-klasse liegen, gibt es eine periodische δ -Kette durch x, die $B(C_2, \epsilon)$ berührt. Dann $\exists y \in B(C_1, \epsilon)$, sodass $f(y) \in B(B(C_2, \epsilon), \delta) \subset B(B(C_2, \epsilon), \epsilon)$, was zur Wahl von ϵ widerspricht. ■

Literaturverzeichnis

Lan Wen: Differentiable dynamical systems : an introduction to structural stability and hyperbolicity
Providence, Rhode Island : American Mathematical Society. - [2016]