Introduction to Partial Differential Equations

Martin Schmidt
Volker Eing

Übungszettel 7

16.Oktober 2018

(Abgabe: Mittwoch, 24.Oktober, 16:00 Uhr in A5, C, Osteingang, Postfach: 46236)

20. Keine Halbe Sache.

Wir bezeichnen mit $H^+ := \{ x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0 \}$ die obere Halbebene in $\mathbb{R}^n$ und mit $H^0 := \{ x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0 \}$ die Hyperebene in $\mathbb{R}^n$ mit $x_n = 0$. Für $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ bezeichnen wir mit $\overline{x} := (x_1, \ldots, x_{n-1}, -x_n)$ die Spiegelung von x and $H^0 = \partial H^+$. Ferner sei $B^+(0,1) := B(0,1) \cap H^+$ und $B^0(0,1) := B(0,1) \cap H^0$.

(a) Ein Spiegelungsprinzip für harmonische Funktionen.
Sei $u : \overline{B^+(0,1)} \to \mathbb{R}$ eine harmonische Funktion mit $u_{|_{B^0(0,1)}} = 0$. Zeige, dass dann die Funktion $v : \overline{B(0,1)} \to \mathbb{R}$, die für $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \overline{B(0,1)}$ durch

$$v(x) = \begin{cases} u(x) & \text{für } x_n \geq 0 \\ -u(\overline{x}) & \text{für } x_n < 0 \end{cases}$$

gegeben ist, harmonisch ist. *(7 Punkte)*

[Tipp. Man nutze die *eindeutige* Lösbarkeit des Dirichlet-Problems aus.]

(b) Die Greensche Funktion für die obere Halbebene.
Bestimme die Greensche Funktion der oberen Halbebene H^+. *(5 Punkte)*

[Tipp. Man benutze die Spiegelung an $\partial H^+ = H^0$, um in ähnlicher Weise wie bei der Greenschen Funktion für $B(0,1)$ die Singularität aus H^+ „hinauszuspiegeln".]

(c) Die Greensche Funktion für $B^+(0,1)$.
Bestimme die Greensche Funktion von $B^+(0,1)$. *(5 Punkte)*

[Tipp. Man beachte den Tipp zu (b) und verwende (a).]

21. Induzierte Harmonie.

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion und $g : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$g(x) := \frac{1}{|x|^{n-2}} \cdot f\left(\frac{x}{|x|^2}\right) .$$

Zeige, dass dann

$$\triangle g = \frac{1}{|x|^{n+2}} \cdot (\triangle f)\left(\frac{x}{|x|^2}\right)$$

gilt, dabei bedeutet der Ausdruck $(\triangle f)(\frac{x}{|x|^2})$ die Auswertung von $\triangle f$ an der Stelle $\frac{x}{|x|^2} \in \mathbb{R}^n$.
Insbesondere gilt: Ist f eine harmonische Funktion, so auch g. *(10 Punkte)*

22. Die Harnack'sche Ungleichung.

Sei $n \geq 3$, $r > 0$ und $B(0,r)$ der Ball vom Radius r in $\mathbb{R}^n$. Ferner sei $u : B(0,r) \to \mathbb{R}$ eine harmonische Funktion mit $u \geq 0$. Zeige, dass dann für alle $x \in B(0,r)$ gilt:

$$r^{n-2} \frac{r - |x|}{(r + |x|)^{n-1}} u(0) \leq u(x) \leq r^{n-2} \frac{r + |x|}{(r - |x|)^{n-1}} u(0) .$$

(8 Punkte)

23. Eine Abschätzung für die partiellen Ableitungen harmonischer Funktionen.

(a) Zeige die Abschätzung

$$|\partial^\alpha \ |x|^{-n}| \leq C(n, |\alpha|) \ |x|^{-n-|\alpha|}$$

für alle $|x| \neq 0$ und für alle Multiindices α, wobei $C(n, |\alpha|)$ eine Konstante ist, die nur von n und von $|\alpha|$ abhängt. *(10 Punkte)*

(b) Folgere einen alternativen Beweis für "Corollary 3.4". *(5 Punkte)*