Introduction to Partial Differential Equations
Übungszettel 9

Martin Schmidt
Volker Eing

31.Oktober 2018

(Abgabe: Mittwoch, 7.November, 16:00 Uhr in A5, C, Osteingang, Postfach: 46236)

27. Über den Wärmeleitungskern von S^1.

Mit $\Phi(x,t)$ bezeichnen wir die Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung.

(a) Zeige, dass für jedes $t>0$ die Funktion $\Phi(\,\cdot\,,t):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ eine Schwartzfunktion ist. *(3 Punkte)*

(b) Berechne für $t>0$ die Fouriertransformierte der Funktion $\Phi(\,\cdot\,,t):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. *(7 Punkte)*

[Tipp. Um das benötigte Integral auszurechnen, schreibe man die Fouriertransformierte von $\Phi(\,\cdot\,,t)$ an der Stelle $k\in\mathbb{R}^n$ in der Form $a\cdot\int_{\mathbb{R}^n}e^{-(by+ck)^2}\,dy$ mit (von k und t abhängigen) Konstanten $a,b,c\in\mathbb{R}$; dafür führe man im Exponenten eine „quadratische Ergänzung“ durch. — Es darf ohne Beweis benutzt werden, dass $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}\,dx=\sqrt{\pi}$ gilt.]

(c) Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ eine Schwartzfunktion. Zeige, dass dann durch

$$\widetilde{f}(x):=\sum_{n\in\mathbb{Z}}f(x+n)$$

eine glatte Funktion $\widetilde{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definiert wird, die periodisch mit der Periode 1 ist. *(4 Punkte)*

(d) Sei $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die periodisch mit der Periode 1 ist, und $u:\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^0\to\mathbb{R}$ die Lösung der Wärmeleitungsgleichung mit $u(\,\cdot\,,0)=h$. Zeige, dass $u(\,\cdot\,,t)$ für jedes $t>0$ periodisch mit Periode 1 ist.

Folgere hieraus, dass die Funktion

$$H(x,y,t)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\Phi(x-y+n,t)$$

ein Wärmeleitungskern von S^1 ist. *(6 Punkte)*

(e) Zeige durch eine explizite Rechnung (also ohne Nutzung von Eindeutigkeitsaussagen für Lösungen der Wärmeleitungsgleichung), dass der Wärmeleitungskern aus (d) mit dem in der Vorlesung angegebenen Wärmeleitungskern von S^1 übereinstimmt, das heißt, dass für alle $x,y\in\mathbb{R}$ und $t>0$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\Phi(x-y+n,t)=\Theta(x-y,4\pi it)$$

gilt, wobei $\Theta(x,\tau)$ Jacobi's Thetafunktion bezeichnet. Dabei darf ohne Beweis die *Poissonsche Summenformel* verwendet werden; sie besagt, dass für eine beliebige Schwartzfunktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ und ihre Fouriertransformierte $\widehat{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ und für beliebiges $x\in\mathbb{R}$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}f(x+n)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\widehat{f}(n)\,e^{2\pi inx}$$

gilt. *(3 Punkte)*

28. Über den Wärmeleitungskern von $[0,1]$.

(a) Durch Transformation des in der Vorlesung angegebenen Wärmeleitungskerns von $[-1,1]$ zeige man, dass der Wärmeleitungskern $H_{[0,1]}$ des Intervalls $[0,1]$ durch

$$H_{[0,1]}(x,y,t)=\frac{1}{2}\Theta(\tfrac{x-y}{2},\pi it)-\frac{1}{2}\Theta(\tfrac{x+y}{2},\pi it).$$

gegeben ist. Hierbei bezeichnet $\Theta(x,\tau)$ wieder Jacobi's Thetafunktion. *(4 Punkte)*

(b) Sei $\mathcal{A}(\mathbb{R})$ der Raum aller stetigen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, für die für alle $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{Z}$ gilt

$$f(n+x) = \begin{cases} f(x) & \text{für gerade } n \in 2\mathbb{Z} \\ -f(1-x) & \text{für ungerade } n \in 2\mathbb{Z}+1\,. \end{cases}$$

Zeige, dass es für jede stetige Funktion $f_0 : [0,1] \to \mathbb{R}$, die auf dem Rand $\partial[0,1] = \{0,1\}$ verschwindet, genau eine Funktion $f \in \mathcal{A}(\mathbb{R})$ mit $f|[0,1] = f_0$ gibt, und dass jede Funktion $f \in \mathcal{A}(\mathbb{R})$ auf diese Weise von einer stetigen Funktion $f_0 : [0,1] \to \mathbb{R}$ induziert wird. *(4 Punkte)*

[Tipp. Zeige zuerst, dass die Funktionen in $\mathcal{A}(\mathbb{R})$ an allen $x \in \mathbb{Z}$ verschwinden, und dann, dass $\mathcal{A}(\mathbb{R})$ genau aus den stetigen, ungeraden und periodischen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der Periode 2 besteht.]

(c) Zeige, dass für jede Schwartzfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die folgende Summe gegen eine glatte Funktion $\widetilde{f} \in \mathcal{A}(\mathbb{R})$ konvergiert:

$$\widetilde{f}(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(2n+x) - \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(2n-x)\,.$$

(4 Punkte)

(d) Sei $h \in \mathcal{A}(\mathbb{R})$ und $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^0_+ \to \mathbb{R}$ die Lösung der Wärmeleitungsgleichung mit $u(\,\cdot\,,0) = h$. Zeige, dass dann für alle $t > 0$ die Funktion $u(\,\cdot\,,t)$ eine glatte Funktion in $\mathcal{A}(\mathbb{R})$ ist.

Folgere hieraus, dass die folgende Funktion ein Wärmeleitungskern von $[0,1]$ ist:

$$H(x,y,t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \Phi(x+2n-y,t) - \sum_{n\in\mathbb{Z}} \Phi(x+2n+y,t)\,.$$

(6 Punkte)

(e) Zeige durch eine explizite Rechnung (also ohne Nutzung von Eindeutigkeitsaussagen für Lösungen der Wärmeleitungsgleichung), dass die in (a) bzw. (d) gefundenen Wärmeleitungskerne von $[0,1]$ übereinstimmen, das heißt, dass für alle $x, y \in [0,1]$ und $t > 0$ gilt:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \Phi(x+2n-y,t) - \sum_{n\in\mathbb{Z}} \Phi(x+2n+y,t) = \Theta(\tfrac{x-y}{2}, \pi i t) - \frac{1}{2}\Theta(\tfrac{x+y}{2}, \pi i t)\,.$$

Dabei benutze man wieder die Poissonsche Summenformel (siehe Aufgabe 27(e)). *(4 Punkte)*

29. Der Zusammenhang zwischen den Fundamentallösungen der Wärmeleitungsgleichung und der Laplace-Gleichung.

Es sei $\Phi_W : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung. Mit

$$G(x,\lambda) := \int_0^\infty \Phi_W(x,t) \cdot e^{-\lambda t}\,dt \qquad (\lambda > 0)$$

bezeichnen wir die Laplace-Transformation von Φ bezüglich t.

Zeige, dass für $x \in \mathbb{R}^n$ der Grenzwert von $G(x,\lambda)$ für $\lambda \to 0$ existiert, und dass

$$\Phi_L(x) := \lim_{\lambda\to 0} G(x,\lambda)$$

eine kugel-symmetrische Lösung der Laplace-Gleichung ist. Daher unterscheidet sich Φ_L von der Fundamentallösung der Laplace-Gleichung höchstens um je eine additive und multiplikative Konstante.

(5 Punkte)