Introduction to Partial Differential Equations

Martin Schmidt
Volker Eing

Übungszettel 11

14.November 2018

(Abgabe: Mittwoch, 21.November, 16:00 Uhr in A5, C, Osteingang, Postfach: 46236)

33. Die Wellengleichung für $n = 1$.

(a) Zeige, dass eine differenzierbare Funktion $u = u(\xi, \eta) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ genau dann eine Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \, \partial \eta} = 0$$

ist, wenn u von der Form

$$u(\xi, \eta) = F(\xi) + G(\eta)$$

mit differenzierbaren Funktionen $F, G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist. *(3 Punkte)*

(b) Unter der Parametertransformation $\xi = x + t$, $\eta = x - t$ gilt $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ genau dann, wenn $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \, \partial \eta} = 0$. *(3 Punkte)*

(c) Man verwende (a) und (b), um erneut die d'Alembertsche Formel für die Lösung des Anfangswertproblems zur Wellengleichung für $n = 1$ herzuleiten. *(6 Punkte)*

34. Eine explizite Lösung der Wellengleichung.

(a) Sei $a \neq 0$ und seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ glatte Funktionen. Man verwende die Formel von d'Alembert, um zu zeigen, dass das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \text{für } x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & \text{für } x \in \mathbb{R} \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) & \text{für } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

die Lösung $u(x, t)$ besitzt mit

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left(f(x + at) + f(x - at) \right) + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} g(s) \, ds \,.$$

(5 Punkte)

(b) Verwende (a), um die Lösung u des dortigen Anfangswertproblems mit $a = 2$, $f(x) = \sin(x)$ und $g(x) = 1$ zu berechnen. *(5 Punkte)*

35. Über schwache Lösungen der Wellengleichung.

Sei U eine offene Teilmenge vom $\mathbb{R}^n$ und $\Omega = U \times (0, T)$ ein Zylinder in $\mathbb{R}^{n+1}$. Eine Funktion $u \in C(\Omega)$ heißt *schwache Lösung der Wellengleichung* (kurz: SLWG) in Ω, wenn für jede Funktion $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$,

$$\int_\Omega (\partial_{tt}\varphi - \Delta\varphi) \, u \, dxdt = 0.$$

(a) Zeige: Wenn u von der Klasse $C^2(\Omega)$ ist, dann ist u eine SLWG in Ω genau dann, wenn u eine Lösung der Wellengleichung ist, also $\partial_{tt} u = \Delta u$ in Ω. *(12 Punkte)*

(b) Zeige, dass wenn $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ eine Folge von SLWG in Ω ist und wenn u_k lokal gleichmäßig in Ω gegen eine Funktion u konvergiert, dass dann u auch eine SLWG in Ω ist. *(3 Punkte)*

36. Eine Verallgemeinerung zur Aufgabe 33.

(a) Zeige, dass für beliebige, stetige Funktionen F und G auf $\mathbb{R}$, die folgende Funktion

$$u(x,t) = F(x+t) + G(x-t)$$

eine SLWG in $\mathbb{R}^2$ ist.

(*Tipp:* Benutze Aufgabe 35 und den Fakt, dass für jedes $f \in C(\mathbb{R})$ und für jede Folge φ_ϵ von Mollifiern in $\mathbb{R}$ die Konvergenz $f * \varphi_\epsilon \to f$ für $\epsilon \to 0$ lokal gleichmäßig ist in $\mathbb{R}$.)

(7 Punkte)

(b) Zeige, dass die Funktion

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \sin kx$$

mit $\{a_k\}$ und $\{b_k\}$ Folgen von reellen Zahlen, sodass $\sum_{k=1}^{\infty}(|a_k| + |b_k|) < \infty$, eine SLWG der Wärmeleitungsgleichung in $\mathbb{R}^2$ ist.

(*Tipp:* Benutze wieder Aufgabe 35) *(6 Punkte)*