Martin Schmidt
Volker Eing

Introduction to Partial Differential Equations

Übungszettel 8

24.Oktober.2018

(Abgabe: Mittwoch 31. Oktober, 16:00 Uhr in A5, C, Osteingang, Postfach: 46236)

Bemerkung: Dieser Zettel hat nur 30 zu erzielende Punkte.

24. Lösungen der homogenen Wärmeleitungsgleichung.

Sei $u : \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$ eine Lösung der homogenen Wärmeleitungsgleichung, d.h. es gelte $\dot{u} - \triangle u = 0$.

(a) Zeige: Für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ ist $u_\lambda(x,t) := u(\lambda x, \lambda^2 t)$ eine weitere Lösung der homogenen Wärmeleitungsgleichung. *(2 Punkte)*

(b) Verwende (a), um zu zeigen: $v(x,t) := x \cdot \nabla u + 2t\,\dot{u}$ ist noch eine Lösung der homogenen Wärmeleitungsgleichung. *(3 Punkte)*

(c) In der Situation $n = 1$ sei eine glatte Funktion $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben und $u : \mathbb{R} \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $u(x,t) := v(\frac{x^2}{t})$. Zeige, dass u genau dann eine Lösung der homogenen Wärmeleitungsgleichung ist, wenn v die gewöhnliche Differentialgleichung

$$4z\,v''(z) + (2+z)\,v'(z) = 0 \quad \text{für } z > 0$$

erfüllt. *(5 Punkte)*

25. Eine alternative Beschreibung von Lösungen der Wärmeleitungsgleichung.

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein offenes Gebiet und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine beliebig oft differenzierbare Funktion. Wir setzen voraus, dass es eine Konstante $M > 0$ gibt, so dass

$$|(\triangle^k f)(x)| \leq M^k \quad \text{für alle } x \in \Omega \text{ und } k \geq 0$$

gilt. Hierbei bezeichnet $\triangle^k f$ die k-fache Anwendung des Laplace-Operators auf f; wir setzen $\triangle^0 f := f$.

Zeige, dass dann durch

$$u(x,t) := (e^{t\,\triangle}) f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{1}{k!} (\triangle^k f)(x)\, t^k$$

eine beliebig oft differenzierbare Funktion $u : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert wird, und dass u eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{u} - \triangle u = 0, \quad u(x,0) = f(x)$$

ist. *(6 Punkte)*

Bitte wenden.

26. Sub-Lösungen der Wärmeleitungsgleichung.

Sei $\widetilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ ein offenes, zusammenhängendes Gebiet. $v : \widetilde{\Omega} \to \mathbb{R}$ heißt eine *Sub-Lösung* der (homogenen) Wärmeleitungsgleichung, wenn $\dot{v} - \triangle v \leq 0$ gilt.

(a) *Mittelwertabschätzung für Sub-Lösungen.* Sei $(x,t) \in \widetilde{\Omega}$ und $r > 0$ mit $E(x,t,r) \subset \widetilde{\Omega}$. Man erläutere, auf welche Weise der Beweis der Mittelwerteigenschaft der Wärmeleitungsgleichung 4.7 zu modifizieren ist, um zu zeigen, dass für eine Sub-Lösung der Wärmeleitungsgleichung $v : \Omega \to \mathbb{R}$ gilt:

$$v(x,t) \leq \frac{1}{4r^n} \int_{E(x,t,r)} v(y,s) \, \frac{|x-y|^2}{(t-s)^2} \, d^n y \, ds \, . \qquad \textit{(5 Punkte)}$$

Sei nun $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein offenes, beschränktes, wegzusammenhängendes Gebiet. Mit $\Omega_T := \Omega \times (0,T]$ bezeichnen wir den parabolischen Zylinder von Ω, siehe Abschnitt 4.4. Ferner sei $v : \Omega_T \to \mathbb{R}$ eine Sub-Lösung der Wärmeleitungsgleichung, die sich stetig auf $\overline{\Omega_T}$ fortsetzen läßt.

(b) *Maximumprinzip für Sub-Lösungen.* Folgere aus (a): Nimmt v den Wert $\sup_{(x,t)\in\Omega_T} v(x,t)$ auf Ω_T an, so ist v konstant. *(4 Punkte)*

(c) *Eine Monotonieeigenschaft.* Für $j \in \{1,2\}$ seien $f_j : \Omega \times (0,T) \to \mathbb{R}$, $h_j : \Omega \to \mathbb{R}$ und $g_j : \partial\Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$ glatte Funktionen, sowie $u_j : \overline{\Omega} \times [0,T] \to \mathbb{R}$ eine stetige, auf $\Omega \times (0,T)$ glatte, Lösung der Randwertaufgabe

$$\begin{cases} \dot{u}_j - \triangle u_j = f_j & \text{auf } \Omega \times (0,T) \\ u_j(\,\cdot\,,0) = h_j & \text{auf } \Omega \\ u_j|(\partial\Omega \times [0,T]) = g_j & \text{auf } \partial\Omega \times [0,T] \end{cases} .$$

Wir setzen voraus, dass $f_1 \leq f_2$, $h_1 \leq h_2$ sowie $g_1 \leq g_2$ gilt. Zeige, dass dann $u_1 \leq u_2$ gilt. *(5 Punkte)*