Introduction to Partial Differential Equations

Martin Schmidt
Volker Eing

Übungszettel 10

07.November 2018

(Abgabe: Mittwoch, 14.November, 16:00 Uhr in A5, C, Osteingang, Postfach: 46236)

30. (a) Skalierung der Wärmeleitungskerne.

Finde den Wärmeleitungskern von

(i) $\mathbb{R}/(c\mathbb{Z})$ mit $c > 0$, *(4 Punkte)*

(ii) $[a, b]$ mit $-\infty < a < b < \infty$. *(4 Punkte)*

(b) Eine explizite Lösung der Wärmeleitungsgleichung.

Berechne die Lösung $u : (0, \pi) \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ des Anfangs- und Randwertproblems

$$\begin{cases} \dot{u} - 7\partial_{xx}u = 0 & \text{für } x \in (0, \pi),\ t > 0 \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 & \text{für } t > 0\,, \\ u(x, 0) = 3\sin(2x) - 6\sin(5x) & \text{für } x \in (0, \pi) \end{cases}.$$

[Tipp. u ist genau dann eine Lösung von $\frac{\partial u}{\partial t} = 7\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, wenn $\widetilde{u}(x, t) := u(x, \frac{1}{7}\,t)$ eine Lösung von $\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial x^2}$ ist und verwende Satz 4.16.] *(10 Punkte)*

31. Ein anderes Anfangs- und Randwertproblem.

Betrachte das folgende Anfangs- und Randwertproblem

$$\begin{cases} \dot{u} - \partial_{xx}u = 0 & \text{in } (0, \pi) \times (0, \infty) \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 & \text{für } t \in (0, \infty) \\ u(x, 0) = x^2(\pi - x) & \text{für } x \in (0, \pi). \end{cases}$$

Zeige, dass gilt

$$\int_0^\pi u(x, t)\mathrm{d}x = 8 \sum_{k \text{ odd}} \frac{1}{k^4} e^{-k^2 t}.$$

(*Tipp*: Bestimme dazu zunächst die Lösung $u(x, t)$ wie in Aufgabe 30. *Bemerkung:* "odd" bedeutet ungerade, passt aber einfach besser unter die Summe.)

(10 Punkte)

32. Wieder keine halbe Sache.

Betrachte das folgende Anfangs- und Randwertproblem auf der Menge $\Omega = (0, \infty)$:

$$\begin{cases} \dot{u} - \Delta u = 0 & \text{auf } \Omega \times (0, \infty), \\ u(0, t) = 0 & \text{für alle } t \geq 0, \\ u(x, 0) = h(x) & \text{für alle } x \in U, \end{cases} \tag{1}$$

wobei h eine beschränkte stetige Funktion auf $[0, \infty)$ ist, mit der Eigenschaft $h(0) = 0$. Die gesuchte Lösung $u(x, t)$ soll von der Klasse $C^2\big(\overline{U} \times (0, \infty)\big) \cap C\big(\overline{U} \times [0, \infty)\big)$ sein.

(a) Ist $u(x,t)$ eine Lösung von (1), so erweitere $u(x,t)$ ungerade auf $x \in \mathbb{R}$, das heißt, setze $u(-x,t) = -u(x,t)$ für alle $x > 0$. Erweitere ebenso $h(x)$ ungerade auf $\mathbb{R}$. Zeige, dass die erweiterte Funktion u zur Klasse $C^2(\mathbb{R} \times (0,\infty)) \cap C(\mathbb{R} \times [0,\infty))$ gehört und dass u das folgende Cauchy-Problem löst:

$$\begin{cases} \dot{u} - \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ u(x,0) = h(x) & \text{für alle } x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{2}$$

(6 Punkte)

(b) Zeige, dass wenn u eine beschränkte Lösung von (1) ist, dass für alle $x \geq 0$ und $t \geq 0$

$$|u(x,t)| \leq \sup_U |h|$$

gilt. Folgere, außerdem, dass eine beschränkte Lösung von (1) eindeutig ist.
(*Tipp:* Benutze das Maximumsprinzip für das Cauchyproblem 4.11.) *(4 Punkte)*

(c) Zeige, dass eine beschränkte Lösung von (1) existiert und gegeben ist durch

$$u(x,t) = \int_0^\infty \frac{1}{(4\pi t)^{1/2}} \Big(1 - e^{\frac{-xy}{t}}\Big) \exp\Big(- \frac{|x-y|^2}{4t}\Big) h(y) \mathrm{d}y. \tag{3}$$

(*Tipp:* Verwende 4.12 und rechne geschickt durch Aufteilen des auftretenden Integrals.) *(9 Punkte)*

(d) Zeige, dass die Lösung (3) für alle $x \geq 0$ und $t > 0$ die Abschätzung

$$|u(x,t)| \leq \frac{x}{(4\pi t)^{3/2}} \int_0^\infty \exp\Big(- \frac{|x-y|^2}{4t}\Big) |h(y)| y \mathrm{d}y$$

erlaubt.
(*Tipp:* Verwende hierbei die Ungleichung $1 - e^{-\xi} \leq \xi$ für alle $\xi \geq 0$.) *(3 Punkte)*