Introduction to Partial Differential Equations
Übungszettel 12

Martin Schmidt
Volker Eing

21. November 2018

(Abgabe: A5, C, Eingang Ost, Postfach 46236, Mittwoch, 28. November 2018 bis 16 Uhr)

(*Auf diesem Zettel sind nur 40 Punkte zu erzielen*)

37. Ebene Wellen.

Wir betrachten für $u : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die folgende modifizierte Wellengleichung:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{j=1}^{n} c_j^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = 0 \,, \tag{$*$}$$

wobei $c_1, \ldots, c_n > 0$ Konstanten sind.

(a) Sei $\alpha \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\alpha\| = 1$, $\mu \in \mathbb{R}$ und $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Zeige, dass

$$u(x,t) := F(\alpha \cdot x - \mu\, t)$$

genau dann eine Lösung von $(*)$ ist, wenn

$$\mu^2 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^2\, c_j^2$$

gilt. Lösungen von $(*)$ von dieser Form heißen *ebene Wellen.* *(5 Punkte)*

(b) Für die in (a) untersuchte ebene Welle gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und $t \in \mathbb{R}$

$$u(x,t) = u(x - \mu\, t\, \alpha, 0) \,.$$

Interpretiere diese Gleichung, um die Ausbreitungsrichtung und die Ausbreitungsgeschwindigkeit der ebenen Welle zu bestimmen. *(5 Punkte)*

38. Elektromagnetische Wellen.

In der Physik werden *elektrische* und *magnetische Felder* durch *zeitabhängige Vektorfelder*, das heißt, durch glatte Abbildungen $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ beschrieben. Die Physiker haben gezeigt, dass das elektrische Feld $E = E(x,t) : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ und das magnetische Feld $B = B(x,t) : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ die sogenannten *Maxwell-Gleichungen* erfüllen, die (im Vakuum) wie folgt lauten:

$$\nabla \cdot E = 0 \qquad\qquad \nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot B = 0 \qquad\qquad \nabla \times B = \varepsilon_0\, \mu_0\, \frac{\partial E}{\partial t} \,.$$

Dabei bezieht sich der ∇-Operator auf die Raumkoordinaten x, und $\times$ bezeichnet das Kreuzprodukt von $\mathbb{R}^3$. ε_0 und μ_0 sind Konstanten, und zwar ist $\varepsilon_0 \approx 8{,}854 \cdot 10^{-12}\, \frac{\mathrm{A \cdot s}}{\mathrm{V \cdot m}}$ die *elektrische Feldkonstante*, $\mu_0 \approx 1{,}257 \cdot 10^{-6}\, \frac{\mathrm{V \cdot s}}{\mathrm{A \cdot m}}$ die *magnetische Feldkonstante.* (V=Volt, s=Sekunde, A=Ampere und m=Meter sind die entsprechenden physikalischen Einheiten.)

(a) Zeige, dass E und B Lösungen einer im Sinne von Aufgabe 36 modifizierten Wellengleichung sind. Ohne Beweis darf dabei verwendet werden, dass für jedes glatte $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gilt: $\nabla \times (\nabla \times f) = \nabla(\nabla \cdot f) - \triangle f$. *(5 Punkte)*

(b) Berechne die Lichtgeschwindigkeit, das heißt, die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer ebenen elektrischen oder magnetischen Welle. (Siehe Aufgabe 36.) *(5 Punkte)*

39. Energie von Lösungen der Wellengleichung.

Es seien $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ glatte Funktionen mit kompaktem Träger (d.h. $\mathrm{Tr}(g) := \overline{\{\, x \in \mathbb{R} \mid g(x) \neq 0 \,\}}$ ist kompakt und entsprechend für h) und $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ die Lösung des Anfangswertproblems zur Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0\,, \quad u(\,\cdot\,, 0) = g \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(\,\cdot\,, 0) = h\,.$$

(a) Zeige, dass $u(\,\cdot\,, t)$ für jedes $t > 0$ kompakten Träger hat. Folgere hieraus, dass für jedes $t > 0$

$$k(t) := \tfrac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \right)^2 dx \quad \text{und} \quad p(t) := \tfrac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \right)^2 dx$$

reelle Zahlen sind. $k(t)$ bzw. $p(t)$ heißt die *kinetische Energie* bzw. die *potentielle Energie* der Lösung u zum Zeitpunkt t. *(5 Punkte)*

(b) *(Energieerhaltung.)* Die Gesamtenergie $k(t) + p(t)$ ist in t konstant. *(5 Punkte)*

(c) Für hinreichend große t sind $k(t)$ und $p(t)$ konstant. *(5 Punkte)*

40. Methode des Abstiegs.

Warum kann man die Methode des Abstiegs auf die mit dieser Methode gewonnenen Lösungen der Wellengleichung in $2k$ Dimensionen nicht erneut anwenden, um Lösungen der Wellengleichung in $2k-1$ Dimensionen zu erhalten? *(5 Punkte)*