Chapter 4

Wärmeleitungsgleichung

In diesem Abschnitt untersuchen wir die Wärmeleitungsgleichung

$$\dot{u} - \triangle u = 0$$

und die entsprechende inhomogene Wärmeleitungsgleichung

$$\dot{u} - \triangle u = f.$$

Gesucht wird eine Lösung u auf einem offenen Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ und für die inhomogenen Gleichung ist f eine gegebene Funktion auf Ω. Wir werden einige Aussagen über harmonische Funktionen auf die Lösungen der Wärmeleitungsgleichung übertragen.

Diese Wärmeleitungsgleichung beschreibt Diffusionsprozesse, das heißt die zeitliche Entwicklung solcher räumlich variierender Größen wie Wärme, chemische Konzentration usw.. Dabei ist die Flussdichte gerade proportional zu dem negativen Gradienten, weil der Fluss von der höheren Konzentration zu der niedrigeren zeigt. Damit erhalten wir aus der skalaren Erhaltungsgleichung die Wärmeleitungsgleichung.

4.1 Fundamentallösung

Weil die Wärmeleitungsgleichung linear ist und bzgl. der Zeit nur erste Ableitungen enthält und bzgl. des Raumes nur zweite Ableitungen, ist für jede Lösung der Wärmeleitungsgleichung $u(x,t)$ und jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ auch $u(\lambda x, \lambda^2 t)$ eine Lösung. Dieses sogenannte Skalenverhalten legt nahe, nach Lösungen zu suchen, die von $\frac{x^2}{t}$ abhängen.

Wir machen zunächst den folgenden Ansatz:

$$u(x,t) = \frac{1}{t^\alpha} v\left(\frac{x}{t^\beta}\right) \quad x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}^+.$$

Hier sind α, β Konstanten und $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine gesuchte Funktion. Dieser Ansatz ist durch das Skalenverhalten $u(x,t) = \lambda^\alpha u(\lambda^\beta x, \lambda t)$ gerechtfertigt. Mit $\lambda = \frac{1}{t}$ erhalten wir $v(\frac{x}{t^\beta}) = u(\frac{x}{t^\beta}, 1)$. Mit diesem Ansatz geht die Wärmeleitungsgleichung über in

$$-\alpha \cdot t^{-(\alpha+1)} v(y) - \beta t^{-(\alpha+1)} y \cdot \nabla v(y) - t^{-(\alpha+2\beta)} \triangle v(y) = 0 \quad \text{mit} \quad y = \frac{x}{t^\beta}.$$

Damit diese Gleichung nicht von t abhängt, setzen wir $\beta = \frac{1}{2}$. Sie reduziert sich zu

$$\alpha v + \frac{1}{2} y \cdot \nabla v + \triangle v = 0.$$

Wir nehmen wieder an, dass v nur von $|y|$ abhängt. Mit $v(y) = w(|y|)$ erhalten wir:

$$\alpha w + \frac{1}{2} r w' + w'' + \frac{n-1}{r} w' = 0 \quad \text{mit} \quad r = \frac{|\, x \,|}{\sqrt{t}}.$$

Wenn wir $\alpha = \frac{n}{2}$ setzen, können wir die Gleichung einmal integrieren:

$$\left(r^{n-1} w'\right)' + \frac{1}{2} \left(r^n w\right)' = 0 \qquad\qquad r^{n-1} w' + \frac{1}{2} r^n w = a.$$

Wenn w und w' im Unendlichen verschwinden gilt $a = 0$.

$$w' = -\frac{1}{2} r w \qquad\qquad w = b \cdot e^{\frac{-r^2}{4}}.$$

Wieder ergibt eine Wahl der Integrationskonstanten a und b die Fundamentallösung.

Definition 4.1. *Die Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung ist*

$$\Phi(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} & \text{für} \quad x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ 0 & \text{für} \quad x \in \mathbb{R}^n, t < 0 \end{cases}.$$

Lemma 4.2. *Für alle $t > 0$ gilt* $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(x,t) d^n x = 1.$

Beweis: $$\frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{-|x|^2}{4t}} d^n x = \frac{1}{\pi^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-x^2} d^n x = \frac{1}{\pi^{n/2}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx \right)^n = 1.$$ **q.e.d.**

Die Fundamentallösung ist also eine Art Mollifier auf dem $\mathbb{R}$, so dass wir erwarten können, dass die Faltung mit $\Phi(x,t)$ im Grenzwert $t \to 0$ wie die Identität wirkt.

Satz 4.3. *Für eine beschränkte stetige Funktion h auf $\mathbb{R}^n$ gilt für folgende Funktion*

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t)h(y)d^ny$$

(i) $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+)$

(ii) $\dot{u} - \triangle u = 0$ *auf* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$

(iii) *u lässt sich stetig und beschränkt auf $\mathbb{R}^n \times [0,\infty)$ fortsetzen mit $\lim\limits_{t\to 0} u(x,t) = h(x)$.*

Beweis: Weil $\Phi(x,t)$ auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$ unendlich oft differenzierbar ist, und wegen des vorangehenden Lemmas und der Beschränktheit von h, ist $u(x,t)$ für $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$ wohl definiert, beschränkt und stetig. Für $(x,t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+$ liegen alle partiellen Ableitungen von $(x,t) \mapsto \Phi(x-y,t)$ als Funktionen von $y \in \mathbb{R}^n$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$ und hängen stetig von $(x,t) \in \mathbb{R}^n$ ab. Deshalb definiert dies eine glatte Abbildung von $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$ nach $L^1(\mathbb{R}^n)$. Weil das Integral ein lineares stetiges Funktional auf $L^1(\mathbb{R}^n)$ ist, ist auch u glatt. Weil $\Phi(x,t)$ die Wärmeleitungsgleichung auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$ löst, folgt (ii). Aus der Stetigkeit von h folgt gleichmäßige Stetigkeit auf kompakten Teilmengen. Für jedes $\epsilon > 0$ und alle x aus einer kompakten Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass $|h(x) - h(y)| < \epsilon$ für alle $|x-y| < \delta$ gilt. Außerdem gibt es ein $T > 0$, so dass

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\delta)} \Phi(y,t)d^ny = \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\delta/\sqrt{t})} \Phi(y,1)d^ny < \epsilon \qquad \text{für alle } t < T \text{ gilt.}$$

Daraus folgt
$$\begin{aligned} |u(x,t) - h(x)| &\leq \left| \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t)(h(y)-h(x))d^ny \right| \\ &\leq \int_{B(x,\delta)} \Phi(x-y,t) \mid h(y) - h(x) \mid d^ny \quad + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x,\delta)} \Phi(x-y,t)|h(y)-h(x)|d^ny \\ &\leq \epsilon + 2\epsilon \sup\{|h(y)| \mid y \in \mathbb{R}^n\} \qquad \text{für alle } t < T. \end{aligned}$$

Also konvergiert $u(x,t)$ im Grenzwert $t \to 0$ auf kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ gleichmäßig gegen $h(x)$. **q.e.d.**

Als Distributionen (und sogar als Maß) konvergiert $\Phi(x,t)$ im Grenzwert $t \to 0$ also gegen die Dirac'sche δ-Funktion. Wir erkennen an dieser Lösung des Anfangswertproblems, dass sich Störungen mit unendlicher Geschwindigkeit ausbreiten.

4.2 Inhomogenes Anfangswertproblem.

Im letzten Abschnitt hatten wir eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{u} - \triangle u = 0 \quad \text{und} \quad u(x,0) = h(x)$$

konstruiert. Duhamel's Prinzip ist ein Verfahren, um aus der Lösung des homogenen Anfangswertproblems eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung zu gewinnen.

Sei $$u(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t-s) f(y,s) d^n y ds.$$ Dann haben wir formal:

$$\dot{u}(x,t) - \triangle u(x,t) = \lim_{s\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,s) f(y,t-s) d^n y +$$
$$+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \left(\dot{\Phi}(x-y,t-s) - \triangle_x \Phi(x-y,t-s) \right) f(y,s) d^n y ds = f(x,t).$$

Lösung des inhomogenen Anfangswertproblems 4.4. *Sei f eine zweimal stetig und beschränkt differenzierbare Funktion auf $\mathbb{R}^n \times [0,\infty)$. Dann ist*

$$u(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t-s) f(y,s) d^n y ds = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,s) f(x-y,t-s) d^n y ds$$

eine Lösung des inhomogenen Anfangswertproblems

$$\dot{u} - \triangle u = f \ \text{auf}\ \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \ \text{und} \qquad \lim_{t\to 0} u(x,t) = 0.$$

Beweis: Wir haben bereits gezeigt, dass $v_s(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t-s) f(y,s) d^n y$ auf $\mathbb{R}^n \times (s,\infty)$ das Anfangswertproblem $\dot{v}_s - \triangle v_s = 0$ mit $\lim_{t\to s} v_s(x,t) = f(x,t)$ erfüllt. Also ist v_s auf $\mathbb{R}^n \times [s,\infty)$ stetig. Dann erfüllt für alle $\epsilon > 0$

$$u_\epsilon(x,t) = \int_0^{t-\epsilon} v_s(x,t) ds = \int_0^{t-\epsilon} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t-s) f(y,s) d^n y ds$$

$$\dot{u}_\epsilon(x,t) - \triangle u_\epsilon(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t-(t-\epsilon)) f(y,t-\epsilon) d^n y = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,\epsilon) f(y,t-\epsilon) d^n y.$$

Also gilt $\lim_{\epsilon\to 0} \dot{u}_\epsilon - \triangle u_\epsilon = f$ auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$. Andererseits gilt

$$u_\epsilon(x,t) = \int_0^{t-\epsilon} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t-s) f(y,s) d^n y ds = \int_\epsilon^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,s) f(x-y,t-s) d^n y ds.$$

Aufgrund der Voraussetzungen an f folgt daraus, dass auch

$$\lim_{\epsilon\to 0} (\dot{u}_\epsilon(x,t) - \triangle u_\epsilon(x,t)) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \triangle\right) \lim_{\epsilon\to 0} u_\epsilon(x,t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \triangle\right) u(x,t)$$

gilt. Aufgrund der Stetigkeit von v gilt auch $u(x,0) = 0$. **q.e.d.**

Korollar 4.5. *Insgesamt ergibt sich folgende Lösung des Anfangswertproblems*

$$\dot{u} - \triangle u = f \qquad\qquad u(x,0) = h(x)$$

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t) h(y) d^n y \quad + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t-s) f(y,s) d^n y ds.$$ **q.e.d.**

4.3 Mittelwerteigenschaft

Die Fundamentallösung $\Phi(x,t)$ kann wieder dazu benutzt werden, um die Werte von $u(x,t)$ als Mittelwert auf einen "Ball" zu berechnen. Allerdings müssen wir den Ball an die neue Gleichung anpassen.

Definition 4.6. *Für alle* $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ *und alle* $r > 0$ *sei*

$$E(x,t,r) = \left\{(y,s) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid s \leq t, \Phi(x-y,t-s) \geq \frac{1}{r^n}\right\}$$

$$\begin{aligned} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} \geq \frac{(4\pi)^{n/2}(t-s)^{n/2}}{r^n} \quad &\iff \quad e^{\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} \leq \frac{1}{\pi^{n/2}} \left(\frac{r^2}{4(t-s)}\right)^{n/2} \\ &\iff \quad \frac{\mid x-y \mid^2}{4(t-s)} \leq \frac{n}{2}(2\ln(r) - \ln(4(t-s)) - \ln(\pi)) \\ &\iff \quad \mid x-y \mid^2 \leq 2(t-s)n(2\ln(r) - \ln(t-s) - \ln(4\pi)). \end{aligned}$$

Mittelwerteigenschaft der Wärmeleitungsgleichung 4.7. *Sei* u *eine Lösung der homogenen Wärmeleitungsgleichung auf einem Gebiet* $\Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. *Dann gilt für alle* $(x,t) \in \Omega$ *und* $r > 0$ *mit* $E(x,t,r) \subset \Omega$

$$u(x,t) = \frac{1}{4r^n} \int_{E(x,t,r)} u(y,s) \frac{|x-y|^2}{(t-s)^2} d^n y ds.$$

Beweis: Aufgrund der Translationsinvarianz können wir $(x,t) = (0,0)$ annehmen. Jetzt definieren wir

$$\phi(r) = \frac{1}{r^n}\int\limits_{E(0,0,r)} u(y,s)\frac{|\,y\,|^2}{s^2}d^nyds = \frac{1}{r^n}\int\limits_{E(0,0,r)} u(y,s)\frac{|ry|^2}{(r^2s)^2}d^n(ry)d(r^2s) = \int\limits_{E(0,0,1)} u(ry,r^2s)\frac{|\,y\,|^2}{s^2}d^nyds.$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned}\phi'(r) &= \int\limits_{E(0,0,1)} \left(\frac{|y|^2}{s^2}y\cdot\nabla u(ry,r^2s) + 2r\dot{u}(ry,r^2s)\frac{|y|^2}{s}\right)d^nyds \\ &= \frac{1}{r^{n+1}}\int\limits_{E(0,0,r)} \frac{|y|^2}{s^2}y\cdot\nabla u(y,s)d^nyds + \frac{1}{r^{n+1}}\int\limits_{E(0,0,r)} 2\dot{u}(y,s)\frac{|\,y\,|^2}{s}d^nyds\end{aligned}$$

Sei jetzt $\psi = -\frac{n}{2}\ln(-4\pi s) + \frac{|y|^2}{4s} + n\ln r$. Dann gilt $E(0,0,r) = \{(y,s) \mid \psi(y,s) \geq 0\}$ und ψ verschwindet auf dem Rand von $E(0,0,r)$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{r^{n+1}}\int\limits_{E(0,0,r)} 2\dot{u}\frac{|\,y\,|^2}{s}d^nyds &= \frac{1}{r^{n+1}}\int\limits_{E(0,0,r)} 4\dot{u}y\cdot\nabla\psi d^nyds \\ &= -\frac{1}{r^{n+1}}\int\limits_{E(0,0,r)} (4n\dot{u}\psi + 4\psi y\cdot\nabla\dot{u})d^nyds \\ &= \frac{1}{r^{n+1}}\int\limits_{E(0,0,r)} (-4n\dot{u}\psi + 4\dot{\psi}y\cdot\nabla u)d^nyds \\ &= \frac{1}{r^{n+1}}\int\limits_{E(0,0,r)} \left(-4n\dot{u}\psi + 4\left(-\frac{n}{2s} - \frac{|\,y\,|^2}{4s^2}\right)y\nabla u\right)d^nyds.\end{aligned}$$

Also gilt

$$\begin{aligned}\phi'(r) &= \frac{1}{r^{n+1}}\int\limits_{E(0,0,r)} \left(-4n\triangle u\psi - \frac{2n}{s}y\cdot\nabla u\right)d^nyds \\ &= \frac{1}{r^{n+1}}\int\limits_{E(0,0,r)} \left(4n\nabla u\cdot\nabla\psi - \frac{2n}{s}y\cdot\nabla u\right)d^nyds = 0.\end{aligned}$$

Also ist ϕ konstant. Weil u stetig ist und

$$\frac{1}{r^n}\int\limits_{E(0,0,r)} \frac{|\,y\,|^2}{s^2}d^nyds = \int\limits_{E(0,0,1)} \frac{|\,y\,|^2}{s^2}d^nyds = 4$$

gilt, folgt $\lim\limits_{r\to 0}\phi(r) = 4u(0,0)$. **q.e.d.**

4.4 Maximumprinzip

Für ein offenes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ definieren wir als den parabolischen Zylinder $\Omega_T = \Omega \times (0, T]$. Der parabolische Rand $\partial\Omega_T$ von Ω_T ist definiert als $\bar{\Omega}_T \setminus \Omega_T$. Er besteht also aus $(\partial\Omega \times (0, T]) \cup (\Omega \times 0)$ und enthält keine inneren Punkte von Ω zur Zeit $t = T$.

Starkes Maximumprinzip für die Wärmeleitungsgleichung 4.8. *Sei Ω wegzusammenhängend (d.h. für je zwei Punkte $x, x' \in \Omega$ gibt es einen stetigen Pfad in Ω von x nach x') und u eine zweimal differenzierbare Lösung der homogenen Wärmeleitungsgleichung auf Ω_T, die sich stetig auf $\bar{\Omega}_T$ fortsetzen lässt. Wenn es einen Punkt $(x_0, t_0) \in \Omega_T$ gibt, an dem u das Maximum annimmt, dann ist u konstant auf Ω_{t_0}.*

Beweis: Sei (x_0, t_0) ein Punkt von Ω_T, an dem u das Maximum annimmt. Dann gibt es ein r_0, so dass $E(x_0, t_0, r_0) \subset \Omega_T$ liegt. Aufgrund der Mittelwerteigenschaften muss u dann auf $E(x_0, t_0, r_0)$ konstant sein. Weil Ω wegzusammenhängend ist gibt es für alle $(x, t) \in \Omega \times (0, t_0)$ offenbar endlich viele $E(x_0, t_0, r_0), E(x_1, t_1, r_1), \ldots, E(x_n, t_n, r_n)$ in $\Omega \times (0, t_0)$, die jeweils die Punkte $(x_1, t_1), \ldots, (x_n, t_n), (x, t)$ enthalten. Also ist u auf dem Abschluss von Ω_{t_0} konstant. **q.e.d.**

Schwaches Maximumprinzip für die Wärmeleitungsgleichung 4.9. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes und offenes Gebiet und u eine zweimal stetig differenzierbare Lösung der homogenen Wärmeleitungsgleichung auf Ω_T, die sich stetig auf $\bar{\Omega}_T$ fortsetzen lässt. Dann nimmt u das Maximum auf dem parabolischen Rand an.* **q.e.d.**

Daraus folgt wieder die Eindeutigkeit von bestimmten Randwertproblemen:

Eindeutigkeit des Randwertproblems 4.10. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Dann existiert höchstens eine Lösung u der inhomogenen Wärmeleitungsgleichung auf Ω_T, die sich stetig auf $\bar{\Omega}_T$ fortsetzen lässt und auf $\partial\Omega_T$ vorgegebenen ist.*

Beweis: Wende das Maximumprinzip auf die Differenz zweier Lösungen an. **q.e.d.**

Wir wollen die Eindeutigkeit des Anfangswertproblems auf dem $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$ zeigen. Dazu benötigen wir, wie bei dem Poissonproblem, ein Abfallverhalten im Unendlichen.

Maximumprinzip für das Cauchyproblem 4.11. *Sei h eine beschränkte stetige Funktion auf $\mathbb{R}^n$ und u eine Lösung auf $\mathbb{R}^n \times (0, T]$ des Anfangwertproblems*

$$\dot{u} - \triangle u = 0 \ \textit{auf}\ \mathbb{R}^n \times (0, T) \qquad u(x, 0) = h(x) \ \textit{auf}\ \mathbb{R}^n \times \{0\},$$

die das Wachstumsverhalten $\quad u(x, t) \le A e^{a|x|^2} \quad \textit{auf} \quad \mathbb{R}^n \times [0, T]$
mit Konstanten $A, a > 0$ hat, dann gilt $\quad \sup_{\mathbb{R}^n \times [0,T]} u = \sup_{\mathbb{R}^n} h.$

Beweis: Wir nehmen zunächst an, dass $4aT < 1$ gilt. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$ mit $4a(T+\epsilon) < 1$. Für alle $y \in \mathbb{R}^n$ und alle $\mu > 0$ ist mit der Fundamentallösung auch

$$v(x,t) = u(x,t) - \frac{\mu}{(T+\epsilon-t)^{n/2}} e^{\frac{|x-y|^2}{4(T+\epsilon-t)}}$$

auf $\mathbb{R}^n \times (0, T+\epsilon)$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung. Also können wir das Starke Maximumprinzip auf alle Gebiete der Form $\Omega_T = B(y,r) \times (0,T]$ anwenden. Aufgrund der Voraussetzung an u ist sowohl u als auch h durch $Ae^{a|x|^2}$ beschränkt. Weil $\frac{1}{4(T+\epsilon-t)} > a$ gilt für $t > 0$, gibt es für jedes $\mu > 0$ ein $R > 0$, so dass $v(x,t) \leq \sup\{h(x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ für alle $r > R$ auf $\partial\Omega_T = B(y,r) \times \{0\} \cup \partial B(y,r) \times (0,T]$ gilt. Dann folgt aus dem Schwachen Maximumprinzip $v(x,t) \leq \sup\{h(x) \mid x \in \mathbb{R}^n\}$ für alle $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0,T]$. Weil $\mu > 0$ beliebig war gilt das auch für $\mu = 0$. Wenn $4aT \geq 1$ gilt zerlegen wir das Zeitintervall $[0,T]$ in solche Teilintervalle $[0,T] = [0,T_1] \cup \ldots \cup [T_M, T]$ für die $4a(T_{m+1} - T_m) < 1$ gilt. Dann folgt induktiv die Aussage. **q.e.d.**

Existenz und Eindeutigkeit des Anfangswertproblems 4.12. *Seien $h \in C(\mathbb{R}^n)$ und $f \in C(\mathbb{R}^n \times [0,T])$. Dann gibt es höchstens eine Lösung des Anfangswertproblems*

$$\dot{u} - \triangle u = f \text{ auf } \mathbb{R}^n \times (0,T) \qquad\qquad u = h \text{ auf } \mathbb{R}^n \times \{0\}$$

die auf $\mathbb{R}^n \times [0,T]$ das Wachstumsverhalten $|u(x,t)| \leq Ae^{a|x|^2}$ hat mit $A > 0$ und $a > 0$.

Wenn $|h(x)| \leq Ae^{a|x|^2}$ und $f(x,t) \leq Ae^{a|x|^2}$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in [0,T]$ und ein $A > 0$ und $a > 0$ gilt, dann ist diese eindeutige Lösung gegeben durch

$$u(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t)h(y)d^ny + \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t-s)f(y,s)d^nyds.$$

Beweis: Wegen dem Maximumprinzip für das Cauchyproblem 4.11 verschwindet die Differenz zweier Lösungen. Das zeigt die Eindeutigkeit.

Für die Existenz müssen wir mit Korollar 4.5 nur noch zeigen, dass die angegebene Lösung $u(x,t)$ die Wachstumsbedingung erfüllt. Für $\frac{1}{8(t-s)} \geq 2a \iff t-s \leq \frac{1}{16a}$ gilt

$$e^{-2a|x|^2}e^{a|y|^2}\Phi(x-y,t-s) \leq \frac{e^{-2a|x|^2+a|y|^2-2a|x-y|^2}e^{-\frac{|x-y|^2}{8(t-s)}}}{(4\pi(t-s))^{n/2}} = \frac{2^{n/2}e^{-a|2x-y|^2}e^{-\frac{|x-y|^2}{8(t-s)}}}{(8\pi(t-s))^{n/2}},$$
$$\Phi(x-y,t-s) \leq 2^{n/2}\Phi(x,y,2(t-s))e^{2a|x|^2}e^{-a|y|^2}$$

Dann folgt mit $|h(x)| \leq Ae^{a|x|^2}$ und $f(x,t) \leq Ae^{a|x|^2}$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in [0,T]$ zuerst $u(x,t) \leq A'e^{2a|x|^2}$ für alle $t \leq \frac{1}{16a}$ und ein $A' > 0$ und dann aus dem Maximumprinzip für das Cauchyproblem $|u(x,t)| \leq 2^{n/2}(A + 2tA)e^{2a|x|^2}$ für alle $t \in [0,T]$. **q.e.d.**

Beispiel 4.13. *Wir zeigen, dass ohne eine Wachstumsbedingung, die Lösung des Anfangswertproblems nicht eindeutig ist. Für $n = 1$ machen wir den Ansatz*

$$u(x,t) = \sum_{l=0}^{\infty} g_l(t)x^l, \qquad \dot{u}(x,t) - \triangle u(x,t) = \sum_{l=0}^{\infty} (\dot{g}_l(t) - (l+2)(l+1)g_{l+2}(t))x^l.$$

Für eine gegebene Funktion $g_0(t) = g(t)$ bekommen wir also folgende formale Lösung der homogenen Wärmeleitungsgleichung:

$$u(x,t) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{g^{(l)}(t)}{2l!} x^{2l}.$$

Wir zeigen für $g(t) = \exp(-t^{-2})$ die Konvergenz diese Reihe gegen eine Lösung, die im Grenzwert $t \downarrow 0$ identisch verschwindet. Dafür berechnen wir $g^{(l)}(t)$ für jedes $l \in \mathbb{N}_0$ durch ein reelles Polynome p_l vom Grad l mit

$$g^{(l)}(t) = t^{-l} p_l(t^{-2}) \exp(-t^{-2}) \quad \text{mit} \quad p_{l+1}(z) = 2zp_l(z) - lp_l(z) - 2zp_l'(z).$$

Die Rekursionsformel für p_l folgt durch Differenzieren nach t. Die beiden ersten Polynome sind $p_0(z) = 1$ und $p_1(z) = 2z$. Wir zeigen, dass der Betrag des Koeffizient von z^k in p_l durch $\frac{l!7^l}{2^k k!}$ beschränkt ist. Für $l = 0$, $k = 0$ gilt die Aussage. Induktiv folgt

$$2\frac{l!7^l}{2^{k-1}(k-1)!} + l\frac{l!7^l}{2^k k!} + 2k\frac{l!7^l}{2^k k!} = \frac{l!7^l(4k+l+2k)}{2^k k!} \leq \frac{l!7^l 7(l+1)}{2^k k!} \leq \frac{(l+1)!7^{l+1}}{2^k k!}.$$

Das zeigt die Aussage. Daraus folgt wegen $\frac{l!}{(2l)!} \leq \frac{1}{l!}$

$$|u(x,t)| \leq \sum_{l=0}^{\infty} \frac{7^l x^{2l}}{l! t^l} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{2t^2}\right)^k \exp(-t^{-2}) = \exp\left(\frac{7x^2}{t} - \frac{1}{2t^2}\right).$$

Das zeigt, dass diese Reihe für alle $t > 0$ absolut konvergiert.

Ähnlich wie bei der Laplacegleichung läßt sich die Eindeutigkeit des Randwertproblems 4.10 und des Anfangswertproblems 4.12 auch mit Hilfe einer Monotonie eines Energiefunktionals zeigen. Sei

$$e(t) = \int_{\Omega} u^2(x,t) d^n x.$$

Wenn u die homogene Wärmeleitungsgleichung erfüllt und am Rand von Ω verschwindet, dann ist dieses Funktional in Abhängigkeit von t monoton fallend:

$$\dot{e}(t) = 2\int_{\Omega} u(x,t)\dot{u}(x,t) d^n x = 2\int_{\Omega} u(x,t)\triangle u(x,t) d^n x = -2\int_{\Omega} (\nabla u(x,t))^2 d^n x \leq 0.$$

Wenn $u(x,t)$ für $t = 0$ verschwindet, und $u(\cdot,t)$ und $\nabla u(\cdot,t)$ für $t > 0$ quadratintegrabel sind, dann verschwindet u identisch.

4.5 Wärmeleitungskern

In Analogie zu der Greenschen Funktion der Laplacegleichung definieren wir für offene Gebiete Ω einen Wärmeleitungskern H_Ω.

Definition 4.14. *Sei Ω ein offenes Gebiet im $\mathbb{R}^n$, Dann heißt $H_\Omega : \Omega \times \Omega \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ Wärmeleitungskern von Ω, wenn H_Ω folgende Eigenschaften hat.*

(i) *Für $(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+$ setzt sich $y \mapsto H_\Omega(x,y,t)$ stetig mit Randwert 0 auf $\partial\Omega$ fort.*

(ii) *Für $x \in \Omega$ löst $(y,t) \mapsto H_\Omega(x,y,t) - \Phi(x-y,t)$ die homogene Wärmeleitungsgleichung, setzt sich stetig auf $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}_0^+$ fort und verschwindet auf $(y,t) \in \bar{\Omega} \times \{0\}$.*

Lemma 4.15. *Sei Ω ein offenes Gebiet im $\mathbb{R}^n$ und u und v zwei reelle Funktionen mit den erforderlichen Regularitätseigenschaften. Dann gilt*

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \int_\Omega u(x,t)(\partial_t v(x,T-t) + \triangle v(x,T-t))d^n x dt \\
+ & \int_0^T \int_\Omega (\partial_t u(x,t) - \triangle u(x,t))v(x,T-t)d^n x dt = \\
= & \int_0^T \int_{\partial\Omega} (u(y,t)\nabla_y v(y,T-t) - \nabla_y u(y,t) v(y,T-t))N(y) d\sigma(y) dt \\
+ & \int_\Omega (u(x,T)v(x,0) - u(x,0)v(x,T))d^n x.
\end{aligned}$$

Beweis: Eine partielle Integration bzgl. t von den beiden zeitlichen Ableitungen ergibt als die Randterme die Integrale über Ω und der Divergenzsatz ergibt für die zweiten räumlichen Ableitungen die Integrale über $\partial\Omega$ **q.e.d.**

Für die Funktion $v(y,t) = H_\Omega(x,y,t)$ ist der Wert $v(x,0)$ nicht definiert. Deshalb betrachten wir bezüglich dt das Integral über $t \in [0, T-\epsilon]$ anstatt über $t \in [0,T]$ und bilden dann den Grenzwert $\epsilon \downarrow 0$. Dann erhalten wir mit Satz 4.3

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \int_\Omega (\dot{u}(y,t) - \triangle u(y,t)) H_\Omega(x,y,T-t) d^n y dt = \\
= & \int_0^T \int_{\partial\Omega} u(z,t) \nabla_z H_\Omega(x,z,T-t) N(z) d\sigma(z) dt + u(x,T) - \int_\Omega u(y,0) H_\Omega(x,y,T) d^n y.
\end{aligned}$$

Und damit auch $$u(x,T) = \int_0^T \int_\Omega (\dot{u}(y,t) - \triangle u(y,t)) H_\Omega(x,y,T-t) d^n y dt$$
$$- \int_0^T \int_{\partial\Omega} u(z,t) \nabla_z H_\Omega(x,z,T-t) N(z) d\sigma(z) dt + \int_\Omega u(y,0) H(x,y,T) d^n y.$$

Lösung des Anfangswert und Randwertproblems 4.16. *Seien f eine Funktion auf $\Omega \times (0,T)$, g eine Funktion auf $\partial\Omega \times [0,T]$ und h eine Funktion auf Ω mit den erforderlichen Regularitätseigenschaften, so dass alle auftauchenden Integrale absolut konvergieren. Dann ist*

$$u(x,T) = \int_0^T \int_\Omega f(y,t) H_\Omega(x,y,T-t) d^n y dt$$
$$- \int_0^T \int_{\partial\Omega} g(z,t) \nabla_z H_\Omega(x,z,T-t) N(z) d\sigma(z) dt + \int_\Omega h(y) H_\Omega(x,y,T) d^n y$$

die eindeutige Lösung des Anfangs- und Randwertproblems.

$$\dot{u} - \triangle u = f \text{ auf } \Omega \times (0,T) \qquad u = g \text{ auf } \partial\Omega \times [0,T] \qquad u(x,0) = h(x) \text{ auf } \Omega$$

Beweisskizze: Wir zeigen zunächst, dass der Wärmeleitungskern symmetrisch ist.

Lemma 4.17. *Für alle $T > 0$ und $x, y \in \bar{\Omega}$ gilt $H_\Omega(x,y,T) = H_\Omega(y,x,T)$.*

Beweis: Setze $u(z,t) = H_\Omega(x,z,t)$ und $v(z,t) = H_\Omega(y,z,t)$ in Lemma 4.15 ein. Dann erhalten wir wegen der Eigenschaft (ii) und Satz 4.3 (iii)

$$0 = \int_\Omega (H_\Omega(x,z,T) H(y,z,0) - H_\Omega(x,z,0) H_\Omega(y,z,T)) d^n z = H_\Omega(x,y,T) - H_\Omega(y,x,T).$$

q.e.d.

Aus der Definition des Wärmeleitungskernes folgt die Aussage für $f = 0 = g$.

Als nächstes zeigen wir diese Aussage für das inhomogene Anfangswertproblem. Wir haben bereits gezeigt, dass $$v(x,T) = \int_\Omega H_\Omega(x,y,T-t) f(y,t) d^n y$$

das Anfangswertproblem

$$\dot{v} - \triangle v = 0 \text{ auf } \Omega \times (t,\infty) \quad v(x,t) = f(x,t) \text{ auf } \Omega \times \{t\} \quad v(x,t) = 0 \text{ auf } \partial\Omega \times [0,\infty]$$

löst. Wenn f wie im inhomogenen Anfangswertproblem 4.4 solche Regularitätseigenschaften hat, so dass v sich zweimal stetig differenzierbar auf $\bar{\Omega} \times [0,T]$ fortsetzen lässt, dann erfüllt $u(x,T) = \int\limits_0^T \int\limits_\Omega H_\Omega(x,y,T-t) f(y,t) d^n y dt$ das Anfangswertproblem

$$\dot{u}(x,t) - \triangle u(x,t) = f \text{ auf } \Omega \times (0,T) \quad u(x,0) = 0 \text{ auf } \Omega \quad u(x,t) = 0 \text{ auf } \partial\Omega \times [0,T].$$

Zuletzt betrachten wir inhomogene Randwertprobleme. Gesucht ist eine Lösung von

$$\dot{u}(x,t) - \triangle u(x,t) = 0 \text{ auf } \Omega \times (0,T) \quad u(x,0) = 0 \text{ auf } \Omega \quad u(x,t) = g \text{ auf } \partial\Omega \times [0,T].$$

Für eine beliebige Funktion g auf $\partial\Omega \times [0,T]$ mit den erforderlichen Regularitätseigenschaften, setzen wir zunächst g auf $\Omega \times [0,T]$ fort. Von dieser Fortsetzung $\tilde{u}$ ziehen wir die Lösung zu $f = \dot{\tilde{u}} - \triangle\tilde{u}$ und $h(x) = \tilde{u}(x,0)$ ab und erhalten dann eine Lösung des gewünschten Randwertproblems. **q.e.d.**

Die erforderlichen Regularitätseigenschaften hängen von dem Wärmeleitungskern und damit von dem Gebiet Ω ab. Wir setzen dabei immer voraus, dass auf Ω der Diveregnzsatz anwendbar ist. Bevor wir diese Aussagen über Anfangswert– und Randwertprobleme auf bestimmte Gebiete anwenden, zeigen wir

Lemma 4.18. *Für alle beschränkten zusammenhängenden Gebiete, die einen Wärmeleitungskern besitzen, ist dieser im entsprechenden parabolischen Zylinder positiv.*

Beweis: Der freie Wärmeleitungskern $\Phi(x,t)$ ist auf $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$ positiv. Für alle beschränkten Gebiete Ω ist für festes $x \in \Omega$ der entsprechenden Wärmeleitungskern $H_\Omega(x,y,t)$ die Differenz von $\Phi(x-y,t)$ minus der eindeutigen Lösung der Wärmeleitungsgleichung auf $\Omega \times [0,T]$, die auf $\Omega \times \{t=0\}$ verschwindet und auf $\partial\Omega \times [0,T]$ mit $\Phi(x-y,t)$ übereinstimmt. Diese Lösung der Wärmeleitungsgleichung ist für alle $\epsilon > 0$ auf $\Omega \times \{t=\epsilon\}$ und auf $\partial\Omega \times [0,T]$ kleiner oder gleich $\Phi(x-y,t)$. Wegen dem Maximumprinzip ist sie auf Ω_T kleiner als $\Phi(x-y,t)$, und $H_\Omega(x,y,t)$ ist positiv.**q.e.d.**

4.6 Spektraltheorie und Wärmeleitungsgleichung

In diesem Abschnitt wollen wir das Anfangswertproblem

$$\dot{u} - \triangle u = 0 \quad \text{auf} \quad \Omega \times [0,T] \qquad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \times [0,T] \qquad u = h \quad \text{auf } \Omega \times \{0\}$$

mit Hilfe des entsprechenden Laplaceoperators auf Ω lösen. Wenn h folgendes erfüllt:

$$-\triangle h = \lambda h \quad \text{auf} \quad \Omega \quad \text{und} \quad h|_{\partial\Omega} = 0,$$

dann läßt sich das Anfangswertproblem durch folgenden Ansatz lösen:

$$u(x,t) = \varphi(t)h(x) \quad \dot{\varphi}(t)h(x) + \lambda\varphi(t)h(x) = 0.$$

Die allgemeine Lösung ist $\dot{\varphi}/\varphi = -\lambda, \varphi(t) = e^{-\lambda(t-t_o)}$. Wegen $\varphi(0) = 1$ erhalten wir als eindeutige Lösung des Anfangswertproblems $u(x,t) = e^{-\lambda t}h(x)$. Aufgrund der Linearität ist dann für $h = h_1 + \ldots + h_M$ mit $-\triangle h_i = \lambda_i h_i$ auf Ω und $h_i|_{\partial\Omega} = 0$ die entsprechende Lösung $u(x,t) = e^{-\lambda_1 t}h_1(x) + \ldots + e^{-\lambda_M t}h_M(x)$. Also genügt es die Funktion h in eine Summe von Eigenfunktionen des Laplaceoperators auf Ω mit Dirichletrandbedingungen zu zerlegen.

Dazu wollen wir zunächst die Fundamentallösung nochmal neu interpretieren. Auf dem $\mathbb{R}^n$ hat der Laplaceoperator folgende Eigenfunktionen:

$$-\triangle e^{2\pi ik\cdot x} = 4\pi^2 k^2 e^{2\pi ikx}.$$

Jetzt gilt $$\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{\left(2\pi ik\sqrt{t}+\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)^2} d^nk = \frac{1}{(2\pi\sqrt{t})^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{(ik+\frac{x}{2\sqrt{t}})^2} d^nk = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}},$$
für alle imaginären x und wegen analytischer Fortsetzung für alle x. Damit folgt

$$\frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{\left(2\pi ik\sqrt{t}+\frac{x-y}{2\sqrt{t}}\right)^2} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} d^nk = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-4\pi^2k^2t} e^{2\pi i(x-y)k} d^nk.$$

Also ist die Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{u} - \triangle u = 0 \quad \text{auf} \quad \mathbb{R}^n \times [0,T] \qquad\qquad u(x,0) = h \quad \text{auf} \quad \mathbb{R}^n$$

gegeben durch

$$u(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-4\pi^2k^2t} e^{2\pi i(x-y)k} h(y) d^nk d^ny.$$

Für eine integrable Funktion können wir den Satz von Fubini anwenden. Für alle stetigen integrablen Funktionen h folgt dann aus $\lim\limits_{t\downarrow 0} u(x,t) = h(x)$ auch

$$h(x) = \lim_{t\downarrow 0}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-4\pi^2k^2t} e^{2\pi i(x-y)k} h(y) d^ny d^nk.$$

Mit der als $\hat{h}(k) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi iky} h(y) d^ny$ definierten Fouriertransformation gilt dann

$$u(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-4\pi^2k^2t} e^{2\pi ikx}\hat{h}(k) d^nk \quad \text{und} \qquad h(x) = \lim_{t\downarrow 0}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-4\pi^2k^2t} e^{2\pi ikx}\hat{h}(k) d^nk.$$

Definition 4.19. *Sei $\mathcal{S}$ der sogenannte Schwartzraum aller glatten komplexen Funktionen auf dem $\mathbb{R}^n$, die mit allen ihren Ableitungen schneller als jede Potenz abfallen.*

Lemma 4.20. *Die Fouriertransformation $\mathcal{F}$ bildet den Schwartzraum auf sich selber ab. Die inverse Abbilduing ist gegeben durch*

$$\mathsf{P}\circ\mathcal{F}:\mathcal{S}\to\mathcal{S},\quad \hat{h}\mapsto h,\quad mit\quad h(x)=\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi ikx}\hat{h}(k)d^nk.$$

Beweis: Mithilfe einer doppelten partiellen Integration berechnen wir

$$-\widehat{\triangle h}(k)=\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi iky}\triangle h(y)d^ny=\int\limits_{\mathbb{R}^n} 4\pi^2k^2e^{-2\pi iky}h(y)d^ny=4\pi^2k^2\hat{h}(k).$$

Dann fällt wegen $|\hat{h}(k)|\leq\int_{\mathbb{R}^n}|h(y)|d^ny$ die Fouriertransformation einer Schwartzfunktion schneller ab als jede Potenz. Für jedes $h\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$ folgt dann

$$\|\hat{h}\|_\infty\leq\|h\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Weil $C_0^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$ dicht liegt, definiert die Fouriertransformierte eine stetige lineare Abbildung von $L^1(\mathbb{R}^n)$ in den Banachraum $C_b(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$. Außerdem gilt

$$|\partial_i\hat{h}(k)|=\left|\int\limits_{\mathbb{R}^n} -2\pi iy_ie^{-2\pi iyk}h(y)d^ny\right|\leq 2\pi\||y|h(y)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Also ist $\hat{h}$ glatt, wenn h schneller als jede Potenz abfällt. Damit ist die Fouriertransformierte einer integrablen Funktion stetig, und die Fouriertransformierte einer Schwartzfunktion unendlich oft differenzierbar.

Wegen Satz 4.3 gilt für jedes $h\in\mathcal{S}$

$$h(x)=\lim_{t\downarrow 0}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-4\pi^2k^2t}e^{2\pi ikx}\hat{h}(k)d^nk\quad\text{mit}\quad\hat{h}(k)=\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi iky}h(y)d^ny.$$

Weil $e^{-4\pi^2k^2t}$ für $t\downarrow 0$ auf jeder kompakten Teilmenge $K\subset\mathbb{R}^n$ gleichmäßig gegen 1 konvergiert und $\hat{h}\in\mathcal{S}$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$ liegt, gilt $P\circ\mathcal{F}\circ\mathcal{F}=\mathbb{1}_\mathcal{S}$ bzw. $\mathcal{F}\circ\mathcal{F}=\mathsf{P}$. Wegen

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi ikx}\hat{k}d^nk=\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi ikx}\hat{h}(-k)d^nk$$

gilt $\mathsf{P}\circ\mathcal{F}=\mathcal{F}\circ\mathsf{P}$ und damit auch $\mathcal{F}\circ\mathsf{P}\circ\mathcal{F}=\mathcal{F}\circ\mathcal{F}\circ\mathsf{P}=\mathbb{1}_\mathcal{S}$. **q.e.d.**

Sei also h eine Schwartzfunktion, dann gilt wegen des Satzes von Fubini:

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \hat{h}(k)\bar{\hat{h}}(k)d^n k &= \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \hat{h}(k)\bar{h}(y)e^{2\pi iky}d^n y d^n k \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \hat{h}(k)e^{2\pi iky}\bar{h}(y)d^n k d^n y = \int\limits_{\mathbb{R}^n} h(y)\bar{h}(y)d^n y.\end{aligned}$$

Also ist die $L^2(\mathbb{R}^n)$-Norm der Fouriertransformierten gleich der $L^2(\mathbb{R}^n)$-Norm der ursprünglichen Funktion. Weil die Schwartzfunktionen dicht liegen im $L^2(\mathbb{R}^n)$ folgt, dass die Fouriertransformation einen unitären Operator definiert von $L^2(\mathbb{R}^n)$ nach $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Definition 4.21. *Für jedes offene zusammenhängende Gebiet Ω sei $W_0^{2,2}(\Omega)$ der Abschluss von $C_0^\infty(\Omega)$ im Hilbertraum mit dem Skalarprodukt*

$$\langle f, g\rangle_{W_0^{2,2}(\Omega)} = \int\limits_\Omega (\triangle f)\triangle\bar{g}d^n x + \int\limits_\Omega f\bar{g}d^n x.$$

Für alle Funktionen $h \in C_0^\infty(\Omega)$ gilt offenbar

$$\langle \triangle h, \triangle h\rangle_{L^2(\Omega)} = \int\limits_\Omega (\triangle h)\triangle\bar{h}d^n x \leq \langle h, h\rangle_{W_0^{2,2}(\Omega)}.$$

Für alle $h \in W_0^{2,2}(\Omega)$ liegt deshalb $\triangle h$ in $L^2(\Omega)$ und für $f \in L^2(\Omega)$ folgt aus der Cauchy–Schwarzen Ungleichung

$$\left|\langle f, \triangle h\rangle_{L^2(\Omega)}\right| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|h\|_{W_0^{2,2}(\Omega)}.$$

Eine Folge $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $C_0^\infty(\Omega)$ konvergiert genau dann mit $(\triangle h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $L^2(\Omega)$, wenn sie in $W^{2,2}(\Omega)$ konvergiert. Also ist der Operator $H = -\triangle$ ein abgeschlossener selbstadjungierter Operator auf $L^2(\Omega)$ mit dem Domain $W_0^{2,2}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$. Wegen

$$\int\limits_\Omega (-\triangle h)\bar{h}d^n x = \int\limits_\Omega |\nabla h|^2 \geq 0 \quad \text{für alle} \quad h \in C_0^\infty(\Omega),$$

ist H nichtnegativ. Deshalb besitzt H eine Spektraldarstellung und e^{-tH} ist ein beschränkter Operator von $L^2(\Omega)$ nach $L^2(\Omega)$ mit

$$\|e^{-tH}h\|_{L^2(\Omega)} \leq \|h\|_{L^2(\Omega)}.$$

Sei also $u(x,t) = (e^{-tH}h)(x)$. Dann ist $\dot{u}(x,t) = -(He^{-tH})(x) = \triangle u(x,t)$. Also erfüllt $u(x,t)$ die Wärmeleitungsgleichung mit den Randbedingungen:

$$u(x,0) = h(x) \qquad\qquad u(x,t) = 0 \quad \text{für} \quad x \in \partial\Omega.$$

(Dirichlet Randbedingungen an H). Wir wollen zur Anwendung dieser Aussage den Wärmeleitungskern für den Kreis S^1 und das Intervall $[-1,1]$ ausrechnen.

4.7 Wärmeleitungskern von S^1

Wir identifizieren den Kreis S^1 mit dem Quotientenraum $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Die Eigenfunktion von $-\frac{d^2}{dx^2}$ auf $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ sind gegeben durch $\psi_k(x) = e^{2\pi ikx}$ mit $k \in \mathbb{Z}$ mit den Eigenwerten $4\pi^2 k^2$. Diese Eigenfunktionen bilden offenbar ein Orthonormalsystem von $L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$. Aus dem Satz von Bolzano Weierstraß folgt, dass die Algebra der Polynome in $\sin(2\pi x)$ und $\cos(2\pi x)$ dicht liegen im reellen Banachraum $C(\mathbb{R}/\mathbb{Z},\mathbb{R})$. Dann gilt dasselbe für die Polynome in $e^{2\pi\imath x}$ und $e^{-2\pi\imath x}$ im komplexen Banachraum $C(\mathbb{R}/\mathbb{Z},\mathbb{C})$. Also ist das orthogonale Komplement von dem vorherigen Orthonormalsystem in $L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ trivial, und das Orthonormalsystem ist eine Orthonormalbasis. Deshalb besitzt der Wärmeleitungskern von $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ den Integralkern:

$$\begin{aligned} H_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}(x,y,t) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{2\pi ikx} e^{-2\pi iky} e^{-4\pi^2 k^2 t} = \Theta(x-y, 4\pi it) \text{ mit} \\ \Theta(x,\tau) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{2\pi ikx} e^{\pi i\tau k^2}. \end{aligned}$$

Hier ist $\Theta(x,\tau)$ Jacobi's Thetafunktion. Die Summe konvergiert auf dem Gebiet $(x,\tau) \in \mathbb{C} \times \{\tau \in \mathbb{C} \mid \Im(\tau) > 0\}$ gegen eine holomorphe Funktion, weil dann $e^{\pi i\tau k^2}$ mit k^2 exponentiell abfällt. Sie ist im wesentlichen charakterisiert durch die Eigenschaften

$$\Theta(x+1,\tau) = \Theta(x,\tau) \qquad \Theta(x+\tau,\tau) = \Theta(x,\tau)e^{-\pi i\tau}e^{-2\pi ix}$$

und dadurch, dass sie Nullstellen bei $x = \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2} + \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$ hat. Die erste Eigenschaft folgt sofort aus der Definition als unendliche Reihe. Für die zweite und dritte berechnen wir

$$\begin{aligned} \Theta(x+\tau,\tau) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{2\pi ik(x+\tau)} e^{\pi ik^2\tau} &&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{2\pi ikx} e^{\pi i(k+1)^2\tau} e^{-\pi i\tau} \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{2\pi i(k+1)x} e^{\pi i(k+1)^2\tau} e^{-2\pi ix} e^{-\pi i\tau} &&= \Theta(x,\tau) e^{-2\pi ix} e^{-\pi i\tau} \\ \Theta(\tfrac{1}{2}+\tfrac{\tau}{2},t) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} (-1)^k e^{\pi i\tau((k+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4})} &&= e^{-\frac{\pi i\tau}{4}} \sum_{n\in\mathbb{N}_0} e^{\pi i\tau(n+\frac{1}{2})^2}(1-1) = 0. \end{aligned}$$

Übungsaufgabe 4.22. (i) *Zeige dass für alle $t > 0$ die Fundamentallösung $\Phi(x,t)$ als Funktion auf $x \in \mathbb{R}^n$ eine Schwartzfunktion ist.*

(ii) *Berechne für alle $t > 0$ die Fouriertransformierte der Fundamentallösung $\Phi(x,t)$ als Funktion auf $x \in \mathbb{R}^n$.*

(iii) *Zeige, dass für jede Schwartzfunktion f auf $\mathbb{R}$, die folgende Summe gegen eine glatte Funktion $\tilde{f}$ auf $\mathbb{R}$ konvergiert, die periodisch ist mit Periode Eins:*

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n).$$

(iv) *Sei h eine stetige periodische Funktion auf $\mathbb{R}$ mit Periode Eins. Zeige, dass die Lösung der Wärmeleitungsgleichung mit Anfangswert h für alle $t > 0$ periodisch bleibt mit Periode Eins. Folgere daraus, dass die folgende Summe die Eigenschaften eines Wärmeleitungskerns auf S^1 hat:*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \Phi(x - y + n, t).$$

(v) *Gemäß der Poissonsche Summenformel erfüllt jede Schwartzfuntkion f auf $\mathbb{R}$*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x + n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{2\pi i n x}.$$

Benutze diese Formel um zu zeigen, dass gilt

$$H_{S^1}(x, y, t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \Phi(x - y + n, t).$$

(vi) *Zeige, dass $f(x) = e^{-x^2}(e^{-x^2} + \sin^2 x)$ eine positive Schwartzfunktion auf $\mathbb{R}$ ist, deren Wurzel keine Schwartzfunktion ist.*

4.8 Wärmeleitungskern von $[0,1]$

Die Eigenfunktionen von $-\frac{d^2}{dx^2}$ auf $[0,1]$ mit Dirichletrandbedingungen, also Nullstellen bei $\partial[0,1] = \{0,1\}$, sind gegeben durch

$$\psi_k(x) = \sqrt{2}\sin(k\pi x) \quad k \in \mathbb{N}$$

Diese Funktionen bilden wieder ein Orthonormalsystem:

$$\int_0^1 \sqrt{2}\sin(k\pi x)\sqrt{2}\sin(k'\pi x)dx = \int_0^1 (\cos((k-k')\pi x) - \cos((k+k')\pi x))dx = \delta_{k,k'}.$$

Für jede stetige Funktion f auf $[0,1]$ mit Nullstellen bei $\partial[0,1]$ definiert

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x - 2n) & \text{für } x \in [2n, 2n+1] \text{ mit } n \in \mathbb{Z} \\ -f(2n - x) & \text{für } x \in [2n-1, 2n] \text{ mit } n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

eine stetige Funktion auf $\mathbb{R}$ mit Nullstellen bei $\mathbb{Z}$, die periodisch ist mit der Periode 2. Wegen dem Satz von Bolzano Weierstraß liegen die endlichen Linearkombinationen von $(x \mapsto \exp(k\pi\imath x))_{k\in\mathbb{N}}$ dicht in $C(\mathbb{R}/2\mathbb{Z})$, und damit auch dicht in $L^2(\mathbb{R}/2\mathbb{Z})$ Die Abbildung $f \mapsto \tilde{f}$ bildet $L^2[0,1]$ auf folgenden Unterraum von $L^2(\mathbb{R}/2\mathbb{Z})$ ab:

$$\left\{ f \in L^2(\mathbb{R}/2\mathbb{Z}) \,\middle|\, f(n+x) = \begin{cases} f(x) & \text{für gerade } n \in 2\mathbb{Z} \text{ und } x \in \mathbb{R} \\ -f(1-x) & \text{für ungerade } n \in 2\mathbb{Z}+1 \text{ und } x \in \mathbb{R} \end{cases} \right\}.$$

Eine Linearkombination $x \mapsto \sum_k a_k \exp(k\pi\imath x)$ liegt genau dann in diesem Unterraum, wenn $a_{-k} = -a_k$ gilt. Deshalb liegen die Linearkombinationen der Funktionen $(x \mapsto \sin(k\pi x))_{k\in\mathbb{N}}$ dicht in diesem Unterraum und damit auch dicht in $L^2[0,1]$. Dann folgt

$$h = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k\psi_k \qquad \text{mit} \qquad a_k = \int\limits_0^1 h(y)\psi_k(y)dy \qquad \text{für } h \in L^2[0,1].$$

Damit ist die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{u}(x,t) - \triangle u(x,t) = 0 \quad u(x,0) = h(x) \quad u(0,t) = u(1,t) = 0 \quad \text{für } (x,t) \in (0,1)\times\mathbb{R}^+$$

gegeben durch
$$u(x,t) = \int\limits_0^1 H_{[0,1]}(x,y,t)h(y)dy \qquad \text{mit}$$

$$\begin{aligned} H_{[0,1]}(x,y,t) &= \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\pi^2k^2t} 2\sin(k\pi x)\sin(k\pi y) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\pi^2k^2t}(\cos(k\pi(x-y)) - \cos(k\pi(x+y))) = \frac{1}{2}\Theta(\tfrac{x-y}{2}, \pi i t) - \frac{1}{2}\Theta(\tfrac{x+y}{2}, \pi i t). \end{aligned}$$

Übungsaufgabe 4.23. **(i)** *Zeige dass der Wärmeleitungskern $H_{[0,1]}$ gegeben ist durch*

$$H_{[0,1]}(x,y,t) = \frac{1}{2}\Theta(\tfrac{x-y}{2}, \pi\imath t) - \frac{1}{2}\Theta(\tfrac{x+y}{2}, \pi\imath t).$$

(ii) *Sei $\mathcal{A}(\mathbb{R})$ der Raum aller stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}$, die folgendes erfüllen:*

$$f(n+x) = \begin{cases} f(x) & \text{für gerade } n \in 2\mathbb{Z} \text{ und } x \in \mathbb{R} \\ -f(1-x) & \text{für ungerade } n \in 2\mathbb{Z}+1 \text{ und } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Zeige, dass die Funktionen in $\mathcal{A}(\mathbb{R})$ bei $\mathbb{Z}$ verschwinden und, dass $\mathcal{A}(\mathbb{R})$ aus den stetigen, ungeraden und periodischen Funktionen mit der Periode Zwei besteht.

(iii) *Zeige, dass für jede Schwartzfunktion f auf $\mathbb{R}$ die folgende Summe gegen eine glatte Funktion $\tilde{f}$ in $\mathcal{A}(\mathbb{R})$ konvergiert:*

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(2n+x) - \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(2n-x).$$

(iv) *Sei $h \in \mathcal{A}(\mathbb{R})$. Zeige, dass die Lösung der Wärmeleitungsgleichung mit Anfangswert h für alle $t > 0$ eine glatte Funktion in $\mathcal{A}(\mathbb{R})$ ist. Folgere daraus, dass die folgende Summe die Eigenschaften eines Wärmeleitungskerns auf $[0,1]$ hat:*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \Phi(x+2n-y,t) - \sum_{n\in\mathbb{Z}} \Phi(x+2n+y,t).$$

(v) *Zeige, dass gilt*

$$H_{[0,1]}(x,y,t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \Phi(x+2n-y,t) - \sum_{n\in\mathbb{Z}} \Phi(x+2n+y,t).$$

Der Wärmeleitungskern eines kartesischen Produktes lässt sich einfach aus den beiden entsprechenden Wärmeleitungskernen berechnen:

Lemma 4.24. *Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ und $\Omega' \subset \mathbb{R}^n$ zwei offene, beschränkte und zusammenhängende Gebiete, deren entsprechenden Wärmeleitungskerne H_Ω und $H_{\Omega'}$ existieren. Der Wärmeleitungskern des kartesischen Produktes ist dann gegeben durch*

$$H_{\Omega\times\Omega'}((x,x'),(y,y'),t) = H_\Omega(x,y,t)H_{\Omega'}(x',y',t) \quad (x,x'),(y,y') \in \bar{\Omega}\times\bar{\Omega}' \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

Beweis: Offensichtlich ist der Laplaceoperator des kartesischen Produktes einfach die Summe der beiden entsprechenden Laplaceoperatoren. Daraus folgt, dass für alle Funktionen h auf $\Omega\times\Omega'$, die sich als ein Produkt von zwei Funktionen auf Ω und Ω' schreiben lassen, das Produkt der entsprechenden Lösungen der Wärmeleitungsgleichung erstens das Anfangswertproblem löst und außerdem die richtigen Randbedingungen hat. Weil Ω und Ω' beschränkt sind, sind ihre Abschlüsse und damit auch $\bar{\Omega}\times\bar{\Omega}'$ kompakt. Wegen dem Satz von Bolzano Weierstraß liegen auf der kompakten Menge $\bar{\Omega}\times\bar{\Omega}'$ die Summen aller Produkte von Funktionen auf $\bar{\Omega}$ und $\bar{\Omega}'$ dicht in allen stetigen Funktionen.**q.e.d.**

Damit haben wir also die Wärmeleitungskerne von allen Tori $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^n$ und allen Quadern $[0,1]^n$ berechnet. Die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{u} - \triangle u = 0 \text{ auf } (0,1)^n \times (0,T], \quad u(x,0) = h(x) \text{ auf } [0,1]^n, \quad u = 0 \text{ auf } \partial[0,1]^n \times [0,T]$$

ist also gegeben durch $\qquad u(x,t) = \int_{[0,1]^n} \prod_{i=1}^n H_{[0,1]}(x_i,y_i,t)h(y)d^ny.$

Weil $[0,1]^n$ nicht zweimal differenzierbaren Rand hat, ist unser Beweis des Divergenzsatzes für dieses Gebiet nicht anwendbar. Der Divergenzsatz gilt aber auch für dieses Gebiet (das wird in der Vorlesung partielle Differentialgleichungen gezeigt).

Wegen $d^n\frac{y}{r} = \frac{d^n y}{r^n}$ gilt $$H_{[0,r]^n}(x,y,t) = \frac{1}{r^n}\prod_{i=1}^{n} H_{[0,1]}\left(\tfrac{x_i}{r}, \tfrac{y_i}{r}, \tfrac{t}{r^2}\right).$$

Korollar 4.25. *Sei $u(x,t)$ eine Lösung der homogenen Wärmeleitungsgleichung auf einer Umgebung von $[0,r]^n \times [0,T] \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Dann gilt*

$$u(x,T) = -\int_0^T \int_{\partial[0,r]^n} u(z,t)\nabla_z H_{[0,r]^n}(x,z,T-t)N(z)d\sigma(z)dt + \int_{[0,r]^n} u(y,0)H_{[0,r]^n}(x,y,T)d^n y.$$

q.e.d.

Im Beweis von Satz 4.3 wird gezeigt, dass $\Phi(x-y,t)$ im Grenzwert $t \downarrow 0$ außerhalb von $y \in B(x,\delta)$ gleichmäßig gegen Null konvergiert. Das gilt auch für alle partiellen Ableitungen und wegen Bedingung (ii) in Definition 4.14 auch für $H_{[0,1]^n}(x,y,t)$. Wegen Lemma 4.17 ist obiges Integral für $u(x,T)$ bei $x \in (0,r)^n$ glatt. Für $(z,t) \in \partial[0,r]^n \times [0,T]$ konvergiert die Taylorreihe von $x \mapsto \nabla_z H_{[0,r]^n}(x,z,T-t)$ bzw. für $(y,t) \in [0,r]^n \times \{0\}$ die Taylorreihe von $x \mapsto H_{[0,r]^n}(x,y,T)$ bei $x_0 = (\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{2})$ auf allen kompakten Teilmengen von $x \in (0,r)^n$ gleichmäßig gegen $H_{[0,r]^n}(x,y,T-t)$. Es folgt

Korollar 4.26. *Sei u eine Lösung der homogenen Wärmeleitungsgleichung auf einem offenen Gebiet in $\Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Dann ist u glatt und für festes t in x analytisch.* **q.e.d.**