Chapter 5

Wellengleichung

In diesem Abschnitt betrachten wir die homogene und inhomogene Wellengleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \triangle u = 0$ und $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \triangle u = f$ auf Teilgebieten von $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Es ist eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung. Die Matrix der zweiten Ableitung hat im Gegensatz zur Laplacegleichung die Signatur $(1, n)$, ist also weder positiv noch negativ definit. Solche Differentialgleichungen werden hyperbolisch genannt. Ihr Lösungsverhalten unterscheidet sich deutlich von dem Lösungsverhalten von elliptischen Gleichungen. Sie beschreiben in der Physik solche Effekte, die sich nur mit endlicher Geschwindigkeit in Raum und Zeit ausbreiten, wie z.B. elektromagnetische Wellen und Gravitationswellen.

5.1 D'Alembertsche Formel für $n = 1$

Wir wollen zunächst folgendes Anfangswertproblem lösen

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 && && \text{für} \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \\
&\qquad u(x,0) = g(x) && \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = h(x) && \text{für} \quad x \in \mathbb{R},
\end{aligned}$$

wobei g und h gegebene Funktionen auf $\mathbb{R}$ sind. Wenn wir diese Differentialgleichung als ein gewöhnliches Differentialgleichungssystem von $C^2(\mathbb{R})$–wertigen Funktionen in Abhängigkeit von t auffassen, ist aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichung zu erwarten, dass jedes solches Anfangswertproblem genau eine Lösung besitzt.

Für $n = 1$ faktorisiert der Wellenoperator (oder auch d'Alembertoperator)

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right).$$

Sei also
$$v(x,t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x,t).$$

Dann erfüllt v die lineare Differentialgleichung erster Ordnung $\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0$. Das ist eine Transportgleichung mit konstanten Koeffizienten, die die eindeutige Lösung

$$v(x,t) = a(x-t) \quad \text{mit} \quad a(x) = v(x,0)$$

besitzt. Also erfüllt $u(x,t)$ die inhomogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = a(x-t).$$

Diese inhomogene Transportgleichung mit konstanten Koeffizienten besitzt die Lösung

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_0^t a(x+(t-s)-s)ds + b(x+t) \\ &= \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} a(y)dy + b(x+t) \qquad\qquad \text{mit} \quad b(x) = u(x,0). \end{aligned}$$

Die Anfangsbedingungen $u(x,0) = g(x)$ und $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = h(x)$ ergeben

$$b(x) = g(x) \quad \text{und} \qquad a(x) = v(x,0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) - \frac{\partial u}{\partial x}(x,0) = h(x) - g'(x).$$

Setzen wir das in unsere Lösungen ein, so erhalten wir

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} (h(y) - g'(y))\, dy + g(x+t)$$

Also ist die Lösung gegeben durch

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(g(x+t) + g(x-t)\right) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(y)dy.$$

Damit haben wir aus der Lösung der homogenen und inhomogenen Transportgleichung die d'Alembertsche Formel bestimmt:

d'Alembertsche Formel 5.1. *Sei g eine zweimal stetig differenzierbare Funktion auf $\mathbb{R}$ und h eine einmal stetig differenzierbare Funktion auf $\mathbb{R}$. Dann ist*

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(g(x+t) + g(x-t)\right) + \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t} h(y)dy$$

eine zweimal stetig differenzierbare Funktion auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+$, und die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & & \textit{für} \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \\ &u(x,0) = g(x) \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = h(x) & & \textit{für} \quad x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

An der d'Alembertschen Formel können wir erkennen, dass die allgemeine Lösung der Wellengleichung für $n = 1$ sich schreiben lässt als

$$u(x,t) = F(x+t) + G(x-t).$$

Umgekehrt ist auch jede Funktion dieser Form eine Lösung der Wellengleichung. Das liegt daran, dass der Wellenoperator faktorisiert in die beiden Differentialgleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial x} = 0$$

deren Lösungen gerade allgemeine Funktionen $F(x+t)$ und $G(x-t)$ sind.

Die Lösung $u(x,t)$ hängt also nur von den Anfangswerten g bei $x \pm t$ ab und den Anfangswerten h im Intervall $[x-t, x+t]$. Das können wir so interpretieren, dass sich die Lösungen nur mit einer Geschwindigkeit nicht größer als Eins ausbreiten, weil die Verbindungsgeraden von (x,t) zu allen diesen Punkten von $\mathbb{R} \times \{0\}$ Geschwindigkeiten nicht größer als Eins haben. Außerdem sind die Lösungen des Anfangswertproblems genau dann k–mal stetig differenzierbar, wenn g k–mal stetig differenzierbar ist und h $(k-1)$–mal. Die Regularität dieses Anfangswertproblems verbessert sich also nicht mit zunehmender Zeit, im Gegensatz zu der Wärmeleitungsgleichung.

Aus der d'Alembertschen Formel folgt mit Hilfe einer Spiegelung auch die Lösung des folgenden Anfangswertproblems:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad \text{für} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ & & u(0,t) = 0 \qquad \text{für} \quad t \in \mathbb{R}_0^+ \\ &u(x,0) = g(x) \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = h(x) & & \text{für} \quad x \in \mathbb{R}^+, \end{aligned}$$

Wir können u, g und h als ungerade Funktionen auf ganz $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+$ ausdehnen durch:

$$\tilde{u}(x,t) = \begin{cases} u(x,t) & \text{für } x \geq 0 \\ -u(-x,t) & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & \text{für } x \geq 0 \\ -g(-x) & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$

$$\tilde{h}(x) = \begin{cases} h(x) & \text{für } x \geq 0 \\ -h(-x) & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$

Für jede Lösung $\tilde{u}$ des Anfangswertproblems

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} = 0 \qquad \text{für} \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$$

$$\tilde{u}(x,0) = \tilde{g}(x) \qquad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}(x,0) = \tilde{h}(x) \qquad \text{für} \quad x \in \mathbb{R},$$

löst auch $(x,t) \mapsto -\tilde{u}(-x,t)$ dieses Anfangswertproblem. Aus der Eindeutigkeit folgt $\tilde{u}(-x,t) = -\tilde{u}(x,t)$ und die Lösung $\tilde{u}$ entspricht genau einer Lösung u des obigen Anfangswertproblems. Insbesondere setzt sich für die eindeutige Lösung u des ersten Anfangswertproblems die entsprechende Funktion $\tilde{u}$ zu einer Lösung des zweiten Anfangswertproblems auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+$ fort. Weil die Funktionen $\tilde{u}$, $\tilde{g}$ und $\tilde{h}$ ungerade sind bezüglich x, verschwindet für $x \leq t$ das erste Integral auf der rechten Seite von

$$\int_{x-t}^{x+t} \tilde{h}(y)dy = \int_{x-t}^{t-x} \tilde{h}(y)dy + \int_{t-x}^{t+x} \tilde{h}(y)dy.$$

Also ist die Lösung des obigen Anfangswertproblems gegeben durch

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(g(x+t) + g(x-t) + \int\limits_{x-t}^{x+t} h(y)dy\right) & \text{für } 0 \leq t \leq x \\ \frac{1}{2}\left(g(t+x) - g(t-x) + \int\limits_{t-x}^{t+x} h(y)dy\right) & \text{für } 0 \leq x \leq t. \end{cases}$$

Zu beachten ist hierbei, dass auf den Rand bei $x = 0$ zulaufende Wellen am Rand reflektiert werden und wieder zurücklaufen.

5.2 Sphärische Mittelwerte in der Wellengleichung

Wir werden jetzt sehen, dass die sphärischen Mittelwerte der Wellengleichung eine Differentialgleichung erfüllen, die wir später lösen wollen und daraus die allgemeine

Lösung folgenden Anfangswertproblems ableiten wollen: Gesucht ist die Lösung u der Wellengleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \triangle u = 0$ auf $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$, die $u(x,0) = g(x)$ und $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = h(x)$ erfüllt. Sei also für alle $x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0, r > 0$

$$U(x,r,t) = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int\limits_{\partial B(x,r)} u(y,t) d\sigma(y) = \fint\limits_{\partial B(x,r)} u(y,t) d\sigma(y).$$

Hier bezeichnet das Symbol $\fint$ den Mittelwert auf dem Gebiet Ω, also das Integral über das Gebiet Ω geteilt durch das Volumen von Ω. Analog definieren wir

$$G(x,r) = \fint\limits_{\partial B(x,r)} g(y) d\sigma(y) \quad \text{und} \qquad H(x,r) = \fint\limits_{\partial B(x,r)} h(y) d\sigma(y).$$

Lemma 5.2. *Wenn $u \in C^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+)$ eine m-mal stetig differenzierbare Lösung des Anfangswertproblems (mit auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_0^+$ stetigen Ableitungen der Ordnung < 2)*

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t} - \triangle u &= 0 & \textit{auf} \quad & (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ & \textit{mit} \\ u(x,0) &= g(x) & \textit{und} \quad & \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = h(x) & \textit{ist,} \end{aligned}$$

dann ist für festes $x \in \mathbb{R}^n$ das sphärische Mittel $U(x,r,t)$ eine m-mal differenzierbare Funktion auf $(r,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, die folgendes Anfangswertproblem der Euler-Poisson-Darbouxgleichung löst (mit auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+$ stetigen Ableitungen der Ordnung < 2)

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}(x,r,t) - \frac{\partial^2 U}{\partial r^2}(x,r,t) - \frac{n-1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}(x,r,t) = 0 \quad \textit{auf} \quad (r,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$$

$$U(x,r,0) = G(x,r) \quad \textit{und} \quad \frac{\partial U}{\partial t}(x,r,0) = H(x,r)$$

Beweis: Es gilt:

$$U(x,r,t) = \frac{1}{n\omega_n} \int\limits_{\partial B(0,1)} u(ry+x,t) d\sigma(y).$$

Also gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial r}(x,r,t) &= \frac{1}{n\omega_n} \int\limits_{\partial B(0,1)} \nabla u(ry+x,t) \cdot y d\sigma(y) \\ &= \frac{r}{n\omega_n} \int\limits_{B(0,1)} \triangle u(ry+x,t) d^n y \\ &= \frac{r}{n} \fint\limits_{B(x,r)} \triangle u(y,t) d^n y. \end{aligned}$$

Also ist die partielle Ableitung eines sphärischen Mittelwertes nach dem Radius r gleich $\frac{r}{n}$ mal dem Mittelwert des Laplaceoperators angewandt auf die ursprüngliche Funktion über den entsprechenden Ball. Insbesondere gilt $\lim\limits_{r\to 0} \frac{\partial U}{\partial r}(x,r,t) = 0$. Analog gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}(x,r,t) &= \frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int\limits_{B(x,r)} \triangle u(y,t) d^n y \\
&= \frac{1-n}{n\omega_n r^n} \int\limits_{B(x,r)} \triangle u(y,t) d^n y + \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int\limits_{\partial B(x,r)} \triangle u(y,t) d\sigma(y). \\
&= \left(\frac{1}{n} - 1\right) \fint\limits_{B(x,r)} \triangle u(y,t) d^n y + \fint\limits_{\partial B(x,r)} \triangle u(y,t) d\sigma(y).
\end{aligned}$$

Insbesondere gilt $\lim_{r\to 0} \frac{\partial^2 U}{\partial r^2}(x,r,t) = \frac{1}{n}\triangle u(x,t)$. Analog ist die partielle Ableitung eines Mittelwertes über einen Ball nach dem Radius r gleich $\frac{n}{r}$ mal dem entsprechenden sphärischen Mittelwert minus $\frac{n}{r}$ mal diesem Mittelwert:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{\omega_n r^n} \int\limits_{B(x,r)} u(y,t) d^n y &= -\frac{n}{\omega_n r^{n+1}} \int\limits_{B(x,r)} u(y,t) d^n y + \frac{1}{\omega_n r^n} \int\limits_{\partial B(x,r)} u(y,t) d\sigma(y) \\
&= -\frac{n}{r} \fint\limits_{B(x,r)} u(y,t) d^n y + \frac{n}{r} \fint\limits_{\partial B(x,r)} u(y,t) d\sigma(y).
\end{aligned}$$

Mit diesen Formeln können wir alle partiellen Ableitungen von den sphärischen Mittelwerten durch Mittelwerte von Potenzen des Laplaceoperators angewandt auf die ursprüngliche Funktion über Sphären und Bälle ausdrücken. Andererseits gilt auch

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r} r^{n-1} \frac{\partial U}{\partial r}(x,r,t) &= \frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{n\omega_n} \int\limits_{B(x,r)} \triangle u(y,t) d^n y \qquad = \frac{1}{n\omega_n} \int\limits_{\partial B(x,r)} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(y,t) d\sigma(y) \\
&= r^{n-1} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}(x,r,t).
\end{aligned}$$

Dann folgt
$$r^{n-1}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = (n-1) r^{n-2} \frac{\partial U}{\partial r} + r^{n-1}\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}.$$ **q.e.d.**

5.3 Lösung für $n = 3$

Es wird sich herausstellen, dass die Wellengleichung für ungerade Dimensionen sich durch die sphärischen Mittel auf die eindimensionale Wellengleichung zurückführen lassen, aber nicht für gerade Dimensionen. Deshalb wollen wir als nächstes die dreidimensionale Wellengleichung lösen. In diesem Fall müssen wir das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} - \frac{2}{r}\frac{\partial U}{\partial r} &= 0 \quad \text{auf} \quad (r,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \\ U = G \quad \text{und} \quad \frac{\partial U}{\partial t} &= H \quad \text{auf} \quad \mathbb{R}^+ \times \{t = 0\}.\end{aligned}$$

lösen. Die Transformation $\tilde{U} = rU$ überführt es in das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial r^2} = 0 \quad \text{auf } (r,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \qquad \tilde{U} = 0 \quad \text{auf } (r,t) \in \{0\} \times \mathbb{R}_0^+ \\ &\tilde{U} = \tilde{G} = rG \quad \text{und} \qquad \frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} = \tilde{H} = rH \quad \text{auf } (r,t) \in \mathbb{R}^+ \times \{0\}.\end{aligned}$$

Dieses Anfangswertproblem haben wir aber schon gelöst. Die Lösung ist:

$$\tilde{U}(x,r,t) = \frac{1}{2}\Big(\tilde{G}(x, r+t) - \tilde{G}(x, t-r)\Big) + \frac{1}{2}\int_{-r+t}^{r+t} \tilde{H}(x,s)ds \quad \text{für } 0 \leq r \leq t.$$

Wegen der Stetigkeit von $u(x,t)$ gilt

$$u(x,t) = \lim_{r \downarrow 0} U(x,r,t) = \lim_{r \downarrow 0} \frac{\tilde{U}(x,r,t)}{r}.$$

Also erhalten wir für alle $x \in \mathbb{R}^3, t > 0$.

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \lim_{r\downarrow 0} \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\tilde{G}(x,t+r)-\tilde{G}(x,t)}{r} + \tfrac{\tilde{G}(x,t-r)-\tilde{G}(x,t)}{-r}\right) && + \lim_{r\downarrow 0} \tfrac{1}{2r}\int_{t-r}^{t+r} \tilde{H}(x,s)ds \\ &= \frac{\partial \tilde{G}(x,t)}{\partial t} && + \tilde{H}(x,t) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} t \fint_{\partial B(x,t)} g(y)d\sigma(y) && + t \fint_{\partial B(x,t)} h(y)d\sigma(y) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} t \fint_{\partial B(0,1)} g(x+ty)d\sigma(y) && + t \fint_{\partial B(x,t)} h(y)d\sigma(y) \\ &= \fint_{\partial B(x,t)} \left(th(y) + g(y)\right) d\sigma(y) && + \fint_{\partial B(x,t)} \nabla_y g(y) \cdot (y-x) d\sigma(y) \end{aligned}$$

Das ist die sogenannte Kirchhoff'sche Formel für das Anfangswertproblem der Wellengleichung in drei Dimensionen.

5.4 Lösung für $n = 2$

Für $n = 2$ lässt sich die Euler-Poisson-Darbouxgleichung nicht in die eindimensionale Wellengleichung überführen. Stattdessen wollen wir das Anfangswertproblem der Wellengleichung für $n = 2$ als ein Anfangswertproblem der Wellengleichung für $n = 3$ auffassen, wobei die Anfangsdaten nur von den Koordinaten x_1 und x_2 und nicht von x_3 abhängen: Sei also $\bar{u}(x,t)$ auf $(x,t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+$ die Lösung des Anfangswertproblems

$$\frac{\partial^2 \bar{u}(x,t)}{\partial t^2} - \triangle \bar{u}(x,t) = 0 \qquad \text{für} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+$$

$$\bar{u}(x,0) = g(\bar{x}) \quad \text{und} \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}(x,0) = h(\bar{x}) \qquad \text{für} \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

Hierbei ist $\bar{x} = (x_1, x_2)$ für $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Der Mittelwert über $\partial B(x,r)$ einer Funktion f, die nur von $\bar{x}$ abhängt, hängt auch nur von $\bar{x}$ ab:

$$\frac{\partial}{\partial x_3} \fint_{\partial B(x,r)} f(y) d\sigma(y) = \frac{\partial}{\partial x_3} \fint_{\partial B(0,r)} f(x+y) d\sigma(y) = \fint_{\partial B(0,r)} \frac{\partial f(x+y)}{\partial x_3} d\sigma(y) = 0.$$

Also ist $\bar{u}(x,t)$ von der Form $u(\bar{x},t)$ und diese Funktion $u(\bar{x},t)$ ist die gesuchte Lösung des Anfangswertproblems für $n = 2$. Diese Funktion wollen wir jetzt ausrechnen. Sei $\gamma(y) = \sqrt{t^2 - (y - \bar{x})^2}$ als Funktion auf dem zweidimensionalen Ball $B(\bar{x}, t)$ die Länge der Koordinate x_3, so dass (y, x_3) auf dem Rand des Balles $B((\bar{x}, 0), t)$ liegen. Dann können wir die beiden Hemispähren $\{(y, \pm\gamma(y)) \in \partial B(x,t) \mid y \in B(\bar{x}, t)\}$ durch den Ball $y \in B(\bar{x}, t)$ parametrisieren. Gemäß Definition 1.5 berechnet sich das Integral über die Hemisphähren als das Integral über $B(\bar{x}, t)$ mal der Länge von $(\Psi')^\#$, wobei Ψ die Abbildungen $y \mapsto (y, \pm\gamma(y))$ von $B(\bar{x}, t)$ auf die beiden Hemispähren von $\partial B(x,t)$ ist. Die lineare Abbildung $\Psi'(y) : z \mapsto (z, \pm z \cdot \nabla_y \gamma(y))$ entspricht der 3×2 Matrix $\left(\begin{smallmatrix} \mathbb{1}_2 \\ \pm(\nabla_y \gamma(y))^t \end{smallmatrix} \right)$ mit $(\Psi'(y))^\# = \left(\begin{smallmatrix} \mp\nabla_y \gamma(y) \\ 1 \end{smallmatrix} \right)$ und $\|(\Psi'(y))^\#\| = \sqrt{1 + (\nabla_y \gamma(y))^2}$, wobei wir Vektoren als Spaltenvektoren auffassen. Also ist das Integral über jede Hemispähre gleich dem Integral über $B(\bar{x}, t)$ mit dem Maß $d\sigma(y, \pm\gamma(y)) = \sqrt{1 + (\nabla_y \gamma(y))^2} dy^2$:

$$\fint_{\partial B(x,t)} g(\bar{y}) d\sigma(y) = \frac{1}{4\pi t^2} \int_{\partial B(x,t)} g(\bar{y}) d\sigma(y) = \frac{2}{4\pi t^2} \int_{B(\bar{x},t)} g(y) \sqrt{1 + (\nabla_y \gamma(y))^2} d^2 y$$

$$\text{mit} \quad \sqrt{1 + (\nabla_y \gamma(y))^2} = \sqrt{\frac{t^2 - (y-\bar{x})^2 + (y - \bar{x})^2}{t^2 - (y - \bar{x})^2}} = \frac{t}{\sqrt{t^2 - (y - \bar{x})^2}}.$$

Also haben wir

$$\fint_{\partial B(x,t)} g(\bar{y}) d\sigma(y) = \frac{1}{2\pi t} \int_{B(\bar{x},t)} \frac{g(y)}{\sqrt{t^2 - (y - \bar{x})^2}} d^2 y = \frac{t}{2} \fint_{B(\bar{x},t)} \frac{g(y)}{\sqrt{t^2 - (y - \bar{x})^2}} d^2 y.$$

Dann erhalten wir für $u(\bar{x},t)$ für alle $(\bar{x},t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned}
u(\bar{x},t) &= \frac{\partial}{\partial t} t \fint_{\partial B(x,t)} g(\bar{y}) d\sigma(y) && + t \fint_{\partial B(x,t)} h(\bar{y}) d\sigma(y) \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \frac{t^2}{2} \fint_{B(\bar{x},t)} \frac{g(y)}{\sqrt{t^2-(y-\bar{x})^2}} d^2y && + \frac{t^2}{2} \fint_{B(\bar{x},t)} \frac{h(y)}{\sqrt{t^2-(y-\bar{x})^2}} d^2y \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \frac{t}{2} \fint_{B(0,1)} \frac{g(\bar{x}+tz)}{\sqrt{1-z^2}} d^2z && + \frac{t^2}{2} \fint_{B(\bar{x},t)} \frac{h(y)}{\sqrt{t^2-(y-\bar{x})^2}} d^2y \\
&= \frac{t}{2} \fint_{B(\bar{x},t)} \frac{g(y)+th(y)+\nabla_y g(y)(y-\bar{x})}{\sqrt{t^2-(y-\bar{x})^2}} d^2y.
\end{aligned}$$

Dies ist Poissons Formel für die Lösung des Anfangswertproblems der Wellengleichung in zwei Dimensionen. Diese Methode, die Lösung des Anfangswertproblems einer niedrigeren Dimension dadurch zu erhalten, dass wir dieses Anfangswertproblem in ein Anfangswertproblem eines höherdimensionalen Raumes verwandeln und dann zeigen, dass die entsprechende Lösung sich in die gesuchte Lösung zurückverwandeln lässt, wird Methode des Abstieges genannt. De Formel zeigt, dass sich die Lösung in zwei Dimensionen mit allen Geschwindigkeiten ausbreiten, deren Längen kleiner oder gleich Eins sind. In einer und drei Dimensionen breiten sich die Lösungen dagegen nur mit den Geschwindigkeiten der Länge Eins aus. Kann man die eindimensionale Lösung mit der Methode des Abstiegs aus der zweidimensionale Lösung zurückerhalten?

5.5 Lösung in ungeraden Dimensionen

Wir können die Euler-Poisson-Darboux Gleichung wieder in die eindimensionale Wellengleichung transformieren. Zunächst benötigen wir

Lemma 5.3. *Sei ϕ eine $(k+1)$ mal stetig differenzierbare Funktion auf $\mathbb{R}$. Dann gilt für alle $k \in \mathbb{N}$*

(i) $\left(\frac{d}{dr}\right)^2 \left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^{k-1} r^{2k-1}\phi(r) = \left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^k r^{2k}\frac{d\phi}{dr}(r)$

(ii) $\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^{k-1} r^{2k-1}\phi(r) = \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j^k r^{j+1}\frac{d^j\phi}{dr^j}(r)$ *mit Konstanten β_j^k $(j=0,\ldots,k-1)$, die nicht von ϕ abhängen.*

(iii) $\beta_0^k = 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2k-1) = \frac{(2k-1)!}{2^{(k-1)}(k-1)!}$

Beweis: Wir zeigen zunächst (i) mit vollständiger Induktion. Für $k = 1$ gilt

$$\tfrac{d^2}{dr^2} r\phi(r) = 2\tfrac{d\phi}{dr}(r) + r\tfrac{d^2\phi}{dr^2}(r) = \tfrac{1}{r}\tfrac{d}{dr} r^2 \tfrac{d\phi}{dr}(r).$$

Wenn die Aussage für $k \in \mathbb{N}$ gilt, dann folgt für $k+1$:

$$\begin{aligned}
(\tfrac{d}{dr})^2(\tfrac{1}{r}\tfrac{d}{dr})^k r^{2k+1}\phi(r) &= (\tfrac{d}{dr})^2(\tfrac{1}{r}\tfrac{d}{dr})^{k-1} r^{2k-1}((2k+1)\phi(r) + r\tfrac{d\phi}{dr}(r)) \\
&= (\tfrac{1}{r}\tfrac{d}{dr})^k r^{2k}\tfrac{d}{dr}((2k+1)\phi(r) + r\tfrac{d\phi}{dr}(r)) \\
&= (\tfrac{1}{r}\tfrac{d}{dr})^k((2k+2)r^{2k}\tfrac{d\phi}{dr}(r) + r^{2k+1}\tfrac{d^2\phi}{dr^2}(r)) = (\tfrac{1}{r}\tfrac{d}{dr})^{k+1} r^{2k+2}\tfrac{d\phi}{dr}(r).
\end{aligned}$$

Wegen der Leibnizregel bewirkt jede Ableitung in (ii) zwei Beiträge. Der eine erniedrigt die Potenzen von r insgesamt um eins und wirkt nicht auf ϕ, und der andere lässt die Potenzen von r insgesamt gleich und wirkt auf ϕ. Die gesamten Potenzen von r sind $r^{2k-1-(k-1)} = r^k$ und die Gesamtordnung der Ableitungen $(\frac{d}{dr})^{k-1}$. Daraus folgt (ii).

Im Beitrag zu β_0^k wirken alle Ableitungen nur auf die Potenzen von r. Die erste wirkt auf r^{2k-1}, die zweite auf r^{2k-3} und die letzte auf r^3. Es folgt (iii). **q.e.d.**

Sei $n = 2k+1 \geq 3$ ungerade und $u \in C^{k+1}(\mathbb{R}^{2k+1}\times\mathbb{R}_0^+)$ löse das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \triangle u = 0 && \text{für} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \\
&u(x,0) = g(x) \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = h(x) && \text{für} \quad x \in \mathbb{R}^n.
\end{aligned}$$

Dann definieren wir

$$\tilde{U}(x,r,t) = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^{k-1} r^{2k-1} U(x,r,t)$$

$$\tilde{G}(x,r) = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^{k-1} r^{2k-1} G(x,r) \qquad \tilde{H}(x,r) = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^{k-1} r^{2k-1} H(x,r).$$

Lemma 5.4. *Wenn $u \in C^{k+1}(\mathbb{R}^{2k+1}\times\mathbb{R}_0^+)$ das Anfangswertproblem der $(2k+1)$-dimensionalen Wellengleichung löst, dann löst $\tilde{U}(x,r,t)$ für jedes $x \in \mathbb{R}^{2k+1}$ folgendes Anfangswertproblem der eindimensionalen Wellengleichung:*

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial r^2} = 0 \quad \textit{für} \quad (r,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ && \tilde{U}(x,0,t) = 0 \quad \textit{für} \quad t \in \mathbb{R}_0^+ \\
&\tilde{U}(x,r,0) = \tilde{G}(x,r) \quad \textit{und} && \frac{\partial \tilde{U}}{\partial t}(x,r,0) = \tilde{H}(x,r) \quad \textit{für} \quad r \in \mathbb{R}^+.
\end{aligned}$$

Beweis: Mit $2k = n-1$ löst $U(x,r,t)$ das entsprechende Anfangswertproblem der Euler–Poisson–Darbouxgleichung:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial r^2}(x,r,t) &= \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^{k-1} r^{2k-1}U(x,r,t) = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^{k} r^{2k}\frac{\partial U}{\partial r}(x,r,t)\\ &= \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^{k-1}\left(r^{2k-1}\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}(x,r,t) + 2kr^{2k-2}\frac{\partial U}{\partial r}(x,r,t)\right)\\ &= \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^{k-1} r^{2k-1}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}(x,r,t) = \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial t^2}(x,r,t)\end{aligned}$$

Wegen Lemmata 5.2 und 5.3 (iii) verschwindet $\tilde{U}(x,r,t)$ an der Stelle $r=0$. **q.e.d.**

Die Lösung dieses Anfangswertproblems ist für $(x,r,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+$ mit $r \le t$

$$\tilde{U}(x,r,t) = \frac{1}{2}\left(\tilde{G}(x,t+r) - \tilde{G}(x,t-r)\right) + \frac{1}{2}\int_{t-r}^{t+r} \tilde{H}(x,s)ds.$$

Andererseits ist $u(x,t) = \lim_{r\to 0} U(x,r,t)$ und

$$\tilde{U}(x,r,t) = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^{k-1} r^{2k-1}U(x,r,t) = \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j^k r^{j+1}\frac{\partial^j U}{\partial r^j}(x,r,t)$$

Wegen Lemma 5.2 ist $\lim_{r\to 0} r^{j-1}\frac{\partial^j U}{\partial r^j}(x,r,t) = 0$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Deshalb gilt

$$u(x,t) = \lim_{r\to 0} U(x,r,t) = \lim_{r\to 0}\frac{\tilde{U}(x,r,t)}{\beta_0^k r}$$

Damit ist die Lösung des Anfangswertproblems der Wellengleichung in ungerader Dimension gegeben durch

$$\begin{aligned}u(x,t) &= \frac{2^{k-1}(k-1)!}{(2k-1)!}\lim_{r\to 0}\left(\frac{\tilde{G}(x,t+r) - \tilde{G}(x,t-r)}{2r} + \frac{1}{2r}\int_{t-r}^{t+r}\tilde{H}(x,s)ds\right)\\ &= \frac{2^{k-1}(k-1)!}{(2k-1)!}\left(\frac{\partial \tilde{G}}{\partial t}(x,t) + \tilde{H}(x,t)\right).\end{aligned}$$

Theorem 5.5. *Für ungerades $n \ge 3$ hat das Anfangswertproblem*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \triangle u = 0 \qquad \textit{für} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$$

$$u(x,0) = g(x) \quad \textit{und} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = h(x) \qquad \textit{für} \quad x \in \mathbb{R}^n$$

mit $g \in C^{\frac{n+3}{2}}(\mathbb{R}^n)$ *und* $h \in C^{\frac{n+1}{2}}(\mathbb{R}^n)$ *für alle* $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_0^+$ *die Lösung*

$$u(x,t) = \frac{2^{\frac{n-3}{2}}(\frac{n-3}{2})!}{(n-2)!}\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-3}{2}} t^{n-2}\fint_{\partial B(x,t)} g(y)d\sigma(y) + \left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-3}{2}} t^{n-2}\fint_{\partial B(x,t)} h(y)d\sigma(y)\right).$$

Beweis Wir beweisen zunächst den Fall $g = 0$. Dann gilt wegen Lemma 5.3 (i)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{2^{\frac{n-3}{2}}(\frac{n-3}{2})!}{(n-2)!}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-3}{2}} t^{n-2}\fint_{\partial B(x,t)} h(y)d\sigma(y)\\
&= \frac{2^{\frac{n-3}{2}}(\frac{n-3}{2})!}{(n-2)!}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-1}{2}} t^{n-1}\frac{\partial}{\partial t}\fint_{\partial B(x,t)} h(y)d\sigma(y)\\
&= \frac{2^{\frac{n-3}{2}}(\frac{n-3}{2})!}{(n-2)!}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-1}{2}} t^{n-1}\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{n\omega_n}\int_{\partial B(0,1)} h(x+ty)d\sigma(y)\\
&= \frac{2^{\frac{n-3}{2}}(\frac{n-3}{2})!}{(n-2)!}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-1}{2}} \frac{t^{n-1}}{n\omega_n}\int_{\partial B(0,1)} \nabla_x h(x+ty)\cdot y d\sigma(y)\\
&= \frac{2^{\frac{n-3}{2}}(\frac{n-3}{2})!}{(n-2)!}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{n\omega_n}\int_{\partial B(x,t)} \nabla_y h(y)\cdot n(y) d\sigma(y)\\
&= \frac{2^{\frac{n-3}{2}}(\frac{n-3}{2})!}{(n-2)!}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{n\omega_n}\int_{B(x,t)} \triangle h(y)d^n y\\
&= \frac{2^{\frac{n-3}{2}}(\frac{n-3}{2})!}{(n-2)!}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-3}{2}} \frac{1}{n\omega_n t}\int_{\partial B(x,t)} \triangle h(y)d\sigma(y)\\
&= \frac{2^{\frac{n-3}{2}}(\frac{n-3}{2})!}{(n-2)!}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-3}{2}} t^{n-2}\fint_{\partial B(0,t)} \triangle_x h(x+y)d\sigma(y)\\
&= \triangle u(x,t).
\end{aligned}$$

Hier haben wir wieder den Diveregenzsatz und bei der Differentiation eines Integrals über $B(x,t)$ nach t Polarkoordinaten benutzt. Wenn wir h durch g ersetzen und $u(x,t)$ durch $v(x,t)$ mit $u(x,t) = \frac{\partial v}{\partial t}(x,t)$ erhalten wir die Lösung für $h = 0$. Also erfüllt $v(x,t)$ und damit auch $u(x,t)$ die Wellengleichung. Mithilfe von Lemmata 5.2 und 5.3 (iii) erhalten wir

$$u(x,0) = \lim_{t\to 0}\left(\frac{\partial}{\partial t} t \fint_{\partial B(x,t)} g(y)d\sigma(y) + t \fint_{\partial B(x,t)} h(y)d\sigma(y)\right) + \mathbf{O}(t) \qquad = g(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \lim_{t\to 0}\left(t \fint_{\partial B(x,t)} \triangle g(y)d\sigma(y) + \frac{\partial}{\partial t} t \fint_{\partial B(x,t)} h(y)d\sigma(y)\right) + \mathbf{O}(t) \quad = h(x).\mathbf{q.e.d.}$$

Die Lösung $u(x,t)$ hängt nur von den Werten von g und h auf $\partial B(x,t)$ abhängt. Deshalb breiten sich die Lösungen nur mit der Geschwindigkeit der Länge Eins aus. Das wird Huygen's Prinzip genannt. Außerdem ist $u(x,t)$ um $\frac{n-1}{2}$ mal weniger differzierbar als die Anfangswerte, also um $\frac{n-1}{2}$ mal weniger als g und um $\frac{n-3}{2}$ weniger als h. Dies ist ein allgemeines Phänomen für hyperbolische Gleichungen. Bei der homogenen Wärmeleitungsgleichung sind die Lösungen für eine sehr grosse Klasse von Anfangswerten immer glatt, unabhängig von der Regularität der Anfangswerte.

5.6 Lösung in geraden Dimensionen

Wir benutzen jetzt wieder die Methode des Abstiegs, um aus den Lösungen in Dimensionen $n+1$ die Lösungen in Dimensionen $n = 2k$ zu erhalten. Entscheidend ist dabei, dass die Lösung von Anfangsdaten g und h, die nur von $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ für $x = (x_1, \ldots, x_{n+1})$ abhängen, auch nur von $\bar{x}$ abhängen, also ihre Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x_{n+1}}$ verschwinden. Da die Lösungen in Dimensionen $n+1$ nur von den Funktionen

$$\fint_{\partial B(x,t)} g(y)d\sigma(y) \quad \text{und} \quad \fint_{\partial B(x,t)} h(y)d\sigma(y)$$

abhängen, folgt dies daraus, dass für eine Funktion f, die $\frac{\partial f}{\partial x_{n+1}} = 0$ erfüllt, auch gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_{n+1}} \fint_{\partial B(x,t)} f(y)d\sigma(y) = \fint_{\partial B(0,t)} \frac{\partial}{\partial x_{n+1}} f(x+y)d\sigma(y) = 0.$$

Weil das für alle $t \in \mathbb{R}^+$ gilt, gilt es auch für die entsprechenden Ableitungen nach t. Deshalb ist die Lösung in Dimensionen $n = 2k$ durch Einschränkung auf den $\mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}, x \mapsto (x,0)$ der Lösungen des Anfangswertproblems in Dimension $n+1$ mit $\bar{g}(x) = g(\bar{x})$ und $\bar{h}(x) = h(x)$ gegeben. Die beiden Hemispähren $\{(y, \pm\gamma(y)) \in \partial B(x,t) \mid y \in B(\bar{x},t)\}$ werden wieder durch den Ball $y \in B(\bar{x},t)$ parametrisiert mit

$\gamma(y) = \sqrt{t^2 - (y-\bar{x})^2}$. Und das Integral über beide Hemisphähren ist wieder zweimal das Integral über $B(\bar{x},t)$ mal der Länge von $(\Psi')^\#$ mit $\Psi : B(\bar{x},t) \to \partial B(x,t), y \mapsto (y, \pm\gamma(y))$. Die lineare Abbildung $\Psi'(y) : z \mapsto (z, \pm z\cdot\nabla_y\gamma(y))$ entspricht der $(n+1)\times n$ Matrix $\left(\begin{smallmatrix} \mathbb{1}_n \\ \pm(\nabla_y\gamma(y))^t \end{smallmatrix}\right)$ mit $(\Psi'(y))^\# = \left(\begin{smallmatrix} \mp\nabla_y\gamma(y) \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ und $\|(\Psi'(y))^\#\| = \sqrt{1+(\nabla_y\gamma(y))^2}$, wobei wir Vektoren als Spaltenvektoren auffassen. Das ergibt

$$\fint_{\partial B(x,t)} \bar{f}(y)d\sigma(y) = \frac{1}{(n+1)\omega_{n+1}t^n}\int_{\partial B(x,t)} \bar{f}(y)d\sigma(y) =$$

$$= \frac{2}{(n+1)\omega_{n+1}t^n}\int_{B(\bar{x},t)} f(y)\sqrt{1+(\nabla\gamma(y))^2}d^ny =$$

$$= \frac{2t}{(n+1)\omega_{n+1}t^n}\int_{B(\bar{x},t)} \frac{f(y)d^ny}{\sqrt{t^2-(y-\bar{x})^2}} = \frac{2t\omega_n}{(n+1)\omega_{n+1}}\fint_{B(\bar{x},t)} \frac{f(y)d^ny}{\sqrt{t^2-(y-\bar{x})^2}}.$$

Lösung der Wellengleichung in geraden Dimensionen 5.6. *Sei n eine gerade positive Zahl, $g \in C^{\frac{n+4}{2}}(\mathbb{R}^n)$ und $h \in C^{\frac{n+2}{2}}(\mathbb{R}^n)$. Dann has das Anfangswertproblem*

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \triangle u = 0 && \textit{für} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \\ &u(x,0) = g(x) \quad \textit{und} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = h(x) && \textit{für} \quad x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

für alle $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_0^+$ folgende Lösung:

$$u(x,t) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\frac{n}{2}!}\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-2}{2}} t^n \fint_{B(x,t)} \frac{g(y)}{\sqrt{t^2-(y-x)^2}}d^ny + \left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-2}{2}} t^n \fint_{B(x,t)} \frac{h(y)}{\sqrt{t^2-(y-x)^2}}d^ny\right).$$

Beweis Wir berechnen zunächst das Volumen der $(n-1)$ dimensionalen Sphäre:

$$\pi^{\frac{n}{2}} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\right)^n = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-x^2}d^nx = \int_0^\infty e^{-r^2}\int_{\partial B(0,r)} d\sigma(y)dr = \frac{n\omega_n}{2}\int_0^\infty e^{-t}t^{\frac{n}{2}-1}dt = \frac{n\omega_n}{2}\Gamma(\tfrac{n}{2}).$$

Es folgt $n\omega_n = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$. Mit $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ folgt $\omega_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$. Für gerade n gilt

$$\frac{2^{\frac{n-2}{2}}\frac{n-2}{2}!}{(n-1)!(n+1)}\frac{2\omega_n}{\omega_{n+1}} = \frac{2^{\frac{n}{2}}\frac{n}{2}!}{(n+1)!}\frac{\frac{n+1}{2}}{\frac{n}{2}}\frac{2\omega_{n-2}}{\omega_{n-1}} = \frac{2^{\frac{n}{2}}\frac{n}{2}!}{(n+1)!}\frac{(n+1)!}{(2^{\frac{n}{2}}\frac{n}{2}!)^2}\frac{4\omega_2}{3\omega_3} = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\frac{n}{2}!}.$$

q.e.d.

Die Formel zeigt, dass die Lösungen $u(x,t)$ von den Werten von g und h auf $B(x,t)$ und nicht nur auf $\partial B(x,t)$ abhängt. Sie breiten sich sich also mit den Geschwindigkeiten vom Betrag kleiner oder gleich Eins aus. Außerdem ist $u(x,t)$ $\frac{n}{2}$ mal weniger differenzierbar als g und $\frac{n-2}{2}$ mal weniger als h.

Zum Abschluss zeigen wir, dass man für $k \in \mathbb{N}$ die Lösung in der Dimension $n = 2k-1$ durch die Methode des Abstiegs auch aus der Lösung in der Dimension $n+1 = 2k$ erhalten kann. Die Anfangswerte g und h definieren als Funktionen auf $\mathbb{R}^n$ dann wieder Funktionen auf $\mathbb{R}^{n+1}$ $\bar{g}(x) = g(\bar{x})$ und $\bar{h}(x) = h(\bar{x})$ mit $\overline{(x_1,\ldots,x_{n+1})} = (x_1,\ldots,x_n)$, die nicht von x_{n+1} abhängen. Für eine differenzierbare Funktion f auf $\mathbb{R}^n$ gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_{n+1}} \int\limits_{B(x,t)} \frac{f(\bar{y})}{\sqrt{t^2-(y-x)^2}} d^{n+1}y = \int\limits_{B(0,t)} \frac{\frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}(\bar{x}+\bar{y})}{\sqrt{t^2-y^2}} d^{n+1}y = 0.$$

Also ist die entsprechende Lösung in den Dimensionen $n+1$ wieder unabhängig von x_{n+1} und definiert damit wieder eine Lösung in der Dimension n. Die Abbildung $y \mapsto \bar{y}$ bildet $B(0,t) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ auf den entsprechenden Ball $\bar{B}(0,t) \subset \mathbb{R}^n$ ab. Das Urbild von $\bar{y} \in \bar{B}(0,t)$ unter dieser Abbildung besteht aus $\{(\bar{y}, y_{n+1}) \mid y_{n+1} \in (-\sqrt{t^2-\bar{y}^2}, \sqrt{t^2-\bar{y}^2})\}$. Mit der Substitution $z = \frac{y_{n+1}}{\sqrt{t^2-\bar{y}^2}}$ erhalten wir $\sqrt{t^2-\bar{y}^2-y_{n+1}^2} = \sqrt{t^2-\bar{y}^2}\sqrt{1-z^2}$ und

$$\begin{aligned}\int_{B(0,t)} \frac{\bar{f}(x+y)}{\sqrt{t^2-y^2}} d^{n+1}y &= \int\limits_{\bar{B}(0,t)} \int_{-\sqrt{t_2-\bar{y}^2}}^{\sqrt{t_2-\bar{y}^2}} \frac{dy_{n+1}}{\sqrt{t^2-\bar{y}^2-y_{n+1}^2}} f(\bar{x}+\bar{y}) d^n\bar{y} = \\ &= \int_{\bar{B}(0,t)} \int_{-1}^{1} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} f(\bar{x}+\bar{y}) d^n\bar{y} = \pi \int_{B(\bar{x},t)} f(\bar{y}) d^n\bar{y}.\end{aligned}$$

Die Formel für die Dimension $n+1$ ergibt wieder die Lösung $u(x,t)$ der Dimension n:

$$\begin{aligned}u(x,t) &= \frac{\pi}{2^{\frac{n+1}{2}} \frac{n+1}{2}! \omega_{n+1}} \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n-1}{2}} \int\limits_{B(x,t)} g(y) d^n y + \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n-1}{2}} \int\limits_{B(x,t)} h(y) d^n y \right) \\ &= \frac{\pi n \omega_n}{2^{\frac{n+1}{2}} \frac{n+1}{2}! \omega_{n+1}} \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n-3}{2}} t^{n-2} \fint\limits_{\partial B(x,t)} g(y) d^n y + \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n-3}{2}} t^{n-2} \fint\limits_{\partial B(x,t)} h(y) d^n y \right),\end{aligned}$$

$$\frac{\pi n}{2^{\frac{n+1}{2}} \frac{n+1}{2}!} \frac{\omega_n}{\omega_{n+1}} = \frac{\pi n}{2^{\frac{n+1}{2}} \frac{n+1}{2}!} \frac{\frac{n+1}{2}\omega_{n-2}}{\frac{n}{2}\omega_{n-1}} = \frac{\pi n}{2^{\frac{n+1}{2}} \frac{n+1}{2}!} \frac{\frac{n+1}{2}! \frac{n-1}{2}! (2^{\frac{n-1}{2}})^2 \omega_1}{n! \omega_2} = \frac{\frac{n-3}{2}! 2^{\frac{n-3}{2}}}{(n-2)!}.$$

Für $n = 1$ ergibt die erste Formel mit $\omega_2 = \pi$ die D'Alembertsche Formel. Insbesondere folgt aus der Formel für die Dimension $n \in \mathbb{N}$ diejenige für alle niedrigeren Dimensionen.

5.7 Inhomogene Wellengleichung

Wieder können wir die Lösung der inhomogenen Wellengleichung

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \triangle u = f && && \text{für} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \\
&u(x,0) = 0 \quad \text{und} && \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 && \text{für} \quad x \in \mathbb{R}^n
\end{aligned}$$

mit Hilfe von Duhamel's Prinzip aus der Lösung des homogenen Wellengleichung erhalten: Für alle $s \in \mathbb{R}^+$ sei $u(x,t,s)$ die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \triangle u = 0 && && \text{für} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (s,\infty) \\
&u(x,s,s) = 0 \quad \text{und} && \frac{\partial u}{\partial t}(x,s,s) = f(x,s) && \text{für} \quad x \in \mathbb{R}^n.
\end{aligned}$$

Dann ist $u(x,t) = \int\limits_0^t u(x,t,s)ds$ eine Lösung des obigen Anfangswertproblems der inhomogenen Wellengleichung. Es gilt nämlich

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(u(x,t,t) + \int\limits_0^t \frac{\partial u}{\partial t}(x,t,s)ds\right) = \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t \frac{\partial u}{\partial t}(x,t,s)ds =$$

$$= \frac{\partial u}{\partial t}(x,t,t) + \int\limits_0^t \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t,s)ds = f(x,t) + \int\limits_0^t \triangle u(x,t,s)ds = f(x,t) + \triangle u(x,t).$$

Die Lösung des inhomogenen Anfangswertproblems

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \triangle u = f && && \text{für} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \\
&u(x,0) = g(x) \quad \text{und} && \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = h(x) && \text{für} \quad x \in \mathbb{R}^n
\end{aligned}$$

ist dann die Summe von obiger Lösung der inhomogenen Wellengleichung und der Lösung des entsprechenden homogenen Anfangswertproblems. Die Wellengleichung ist invariant unter der Zeitspiegelung $t \mapsto -t$. Deshalb lassen sich aus unseren Formeln für die Lösung des Anfangswertproblems auch solche für das "Endwertproblem"

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \triangle u = f && && \text{für} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^- \\
&u(x,0) = g(x) \quad \text{und} && \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = h(x) && \text{für} \quad x \in \mathbb{R}^n
\end{aligned}$$

gewinnen. Wir können also nicht nur von der Gegenwart aus in die Zukunft rechnen, sondern auch zurück in die Vergangenheit. Die erste Lösung wird avancierte Lösung und die zweite retardierte Lösung genannt. Beide Lösungen zusammen ergeben eine Lösung auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, die nur durch $u(x,0)$ und $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)$ mit $x \in \mathbb{R}^n$ festgelegt sind.

5.8 Energiemethoden

Hyperbolische Gleichungen erfüllen kein Maximumprinzip. Damit eine Lösung einer homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung im Inneren kein Maximum haben kann, darf die Matrix der Ableitungen zweiter Ordnung nicht negativ definit werden können. Dies wird nur durch elliptische oder parabolische Differentialgleichungen ausgeschlossen. Allerdings lassen sich Energiemethoden auf hyperbolische Differentialgleichungen anwenden und damit die Eindeutigkeit des Anfangswertproblems zeigen:

Eindeutigkeit der Lösungen der Wellengleichung 5.7. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Dann besitzt folgendes Anfangswertproblem der Wellengleichung*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \triangle u &= f && \textit{auf} \quad \Omega \times (0,T] \\
u(x,t) &= g(x,t) && \textit{auf} \quad \Omega \times \{t=0\} \qquad \textit{und auf} \quad \partial\Omega \times [0,T] \\
\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= h(x) && \textit{auf} \quad \Omega \times \{t=0\}
\end{aligned}$$

höchstens eine Lösung.

Beweis: Die Differenz zweier Lösungen löst das analoge homogene Anfangswertproblem mit $f = g = h = 0$. Von einer solchen Lösung definieren wir die Energie als

$$e(t) = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \right)^2 + (\nabla u(x,t))^2 \right) d^n x.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\frac{de}{dt}(t) &= \int\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) + \frac{\partial \nabla u}{\partial t} u(x,t) \nabla u(x,t) \right) d^n x \\
&= \int\limits_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \triangle u(x,t) \right) d^n x = 0.
\end{aligned}$$

Hier haben wir einmal partiell integriert (den Diveregnzsatz angewendet). Aufgrund der Anfangsbedingungen erfüllt $e(0) = 0$. Also ist $e(t) = 0$ für alle $t > 0$. Dann folgt $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ und $\nabla u(x,t) = 0$. Also ist u konstant. Dann folgt wieder wegen den Anfangsbedingungen $u = 0$ auf $\Omega \times \mathbb{R}^+$. **q.e.d.**

Zuletzt noch ein einfacher Beweis, dass sich die Lösungen nur mit Geschwindigkeiten der Länge nicht größer als Eins ausbreiten

Theorem 5.8. *Sei u eine Lösung der homogenen Wellengleichung mit $u = \frac{\partial u}{\partial t} = 0$ auf $B(x_0,t_0)$ bei $t = 0$. Dann verschwindet u auf dem Kegel $\{(x,t) \mid |x-x_0| \leq t_0 - t, t > 0\}$.*

Beweis: Sei

$$e(t) = \frac{1}{2} \int\limits_{B(x_0,t_0-t)} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \right)^2 + (\nabla u(x,t))^2 \right) d^n x$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\frac{de}{dt}(t) = & \int\limits_{B(x_0,t_0-t)} \left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) + \frac{\partial \nabla u}{\partial t}(x,t) \nabla u(x,t) \right) d^n x \\
& - \frac{1}{2} \int\limits_{\partial B(x_0,t_0-t)} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \right)^2 + (\nabla u(x,t))^2 \right) d\sigma(x) \\
= & \int\limits_{B(x_0,t_0-t)} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \triangle u(x,t) \right) d^n x \\
& + \int\limits_{\partial B(x_0,t_0-t)} \left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \nabla u(x,t) \cdot N(x,t) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \right)^2 - \frac{1}{2} (\nabla u(x,t))^2 \right) d\sigma(x) \\
= & \int\limits_{\partial B(x_0,t_0-t)} \left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \nabla u(x,t) \cdot N(x,t) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \right)^2 - \frac{1}{2} (\nabla u(x,t))^2 \right) d\sigma(x).
\end{aligned}$$

Weil der Normalenvektor $N(x,t)$ Länge Eins hat, folgt

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \nabla u(x,t) \cdot N(x,t) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \right)^2 + \frac{1}{2} (\nabla u(x,t))^2$$

mit $a = \nabla u(x,t)$ und $b = \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) N(x,t)$ aus folgender Ungleichung:

$$a \cdot b \leq a \cdot b + \frac{1}{2}(a-b) \cdot (a-b) = \frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{2} b^2.$$

Wegen $\dot{e}(t) \leq 0$ ist dann $e(t)$ monoton fallend. Aus $e(0) = 0$ folgt also $0 \leq e(t) \leq 0$ für alle $t \in [0,t_0]$ und damit auch $u = 0$ auf $\{(x,t) \mid |x - x_0| \leq t_0 - t, t > 0\}$. **q.e.d.**

Wegen der Invarianz unter der Zeitumkeht $t \leftrightarrow -t$ folgt auch $u = 0$ auf dem Kegel $\{(x,t) \mid |x - x_0| < t_0 + t, t < 0\}$ aus $u = 0$ und $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ für $t = 0$.