Kapitel 4

Einführung in die Differentialtopologie

Dieser Abschnitt enthält eine kleine Einfürung in die sogenannte Differentialtopologie. Das ist die Theorie der qualitativen Aspekte von differenzierbaren Abbildungen (vgl. J.W.Milnor: "Topology from the differentiable viewpoint", Princeton Univ. Press).

4.1 Der Satz von Sard

Satz von Sard 4.1. *Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen und $f \in C^\infty(U, \mathbb{R}^n)$. Dann ist das Bild $f[C]$ der Menge $C = \{x \in U \mid \operatorname{Rang} T_x(f) < n\}$ eine Nullmenge im $\mathbb{R}^n$.*

Beweis: Wir beweisen das mit vollständiger Induktion in m. Den Fall $n = 0$ mit $C = \emptyset$ können wir ausschließen. Für $n \in \mathbb{N}$ und $m = 0$ besteht C aus einem Punkt.

Für $m > 0$ betrachten wir für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Menge C_k aller Punkte, so dass alle partiellen Ableitungen höchstens k–ter Ordnung verschwinden. Diese Mengen sind ineinander enthalten: $C \supset C_1 \supset \ldots \supset C_k \supset \ldots$. Wir zeigen, dass erstens $f[C \setminus C_1]$, zweitens $f[C_k \setminus C_{k+1}]$ für $k \in \mathbb{N}$ und drittens $f[C_k]$ für $k = l - 1$ Nullmengen sind. Dann ist auch $f[C] = f[C \setminus C_1] \cup f[C_1 \setminus C_2] \cup \ldots \cup f[C_{k-1} \setminus C_k] \cup f[C_k]$ eine Nullmenge.

1. Im Fall $n = 1$ ist $C_1 = C$ und $C \setminus C_1 = \emptyset$. Für $n > 1$ zeigen wir, dass jedes $y \in C \setminus C_1$ eine Umgebung $V \subset \mathbb{R}^m$ enthält, so dass $f[V \cap (C \setminus C_1)]$ eine Nullmnge ist. Wegen $y \notin C_1$ ist mindestens eine erste partielle Ableitung von f bei y ungleich Null. Nach vertauschen der Komponenten können wir $\frac{\partial f_1(y)}{\partial x_1} \neq 0$ annehmen. Dann hat $h : U \to \mathbb{R}^m$, mit $h(x) = (f_1(x), x_2, \ldots, x_m)$ bei y eine invertierbare Ableitung und bildet wegen dem Satz der inversen Funktion eine offene Umgebung $V \subset U$ von y mit einem Diffeomorphismus auf eine offene Menge $V' \subset \mathbb{R}^m$ ab. Sei $g = f \circ h^{-1}$. Die Punkte $x \in V'$ mit $\operatorname{Rang}(T_x(g)) < n$ sind dann genau $C' = h[V \cap C]$, und $f[V \cap C] =$

$g[C']$. Aufgrund der Definition von h und g bildet g für jedes $(t, x_2, \ldots, x_m) \in V'$ die Hyperebene $H_t = \{x \in V' \mid x_1 = t\}$ nach $\{t\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ ab. Sei g_t die Einschränkung von g auf H_t. Weil $T(g)$ auf V' den Vektor $(1, 0, \ldots, 0)$ auf einen Vektor abbildet, dessen erster Eintrag nicht Null ist, und den Tangentialraum an die Hyperebene H_t auf Tangentialvektoren der Hyperebene $\{t\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ abbildet, hat $T(g_t)$ bei einem Punkt $x \in H_t$ genau dann einen kleineren Rang als $n - 1$, wenn dort $T(g)$ einen kleineren Rang als n hat, also wenn $h^{-1}(x)$ in C liegt. Nach Induktionsvorausetzung ist das Bild $g_t[H_t \cap C']$ für alle diese Hyperebenen eine Nullmenge in $\{t\} \times \mathbb{R}^{n-1}$. Im Satz von Fubini wird gezeigt, dass eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge ist, wenn $A \cap (\{t\} \times \mathbb{R}^{n-1})$ für alle $t \in \mathbb{R}$ eine Nullmenge von $\{t\} \times \mathbb{R}^{n-1} \simeq \mathbb{R}^{n-1}$ ist. Also ist $g[V' \cap C'] = f[V \cap C]$ eine Nullmenge in $\mathbb{R}^n$. Weil jede solche Umgebung V von y einen Ball $B(z, r) \ni y$ mit $z \in \mathbb{Q}^m$ und $r \in \mathbb{Q}$ enthält, gibt es eine abzählbare Überdeckung von $C \setminus C_1$, deren Bilder unter f Nullmengen sind. Dann ist $f[C \setminus C_1]$ eine Nullmenge.

2. Für $y \in C_k \setminus C_{k+1}$ ist mindestens eine $(k + 1)$–te partielle Ableitung ungleich 0. Nach Vertauschen der Komponenten können wir annehmen, dass für einen Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^m$ der Ordnung $k = \alpha_1 + \ldots + \alpha_m$ und ein $r \in \{1, \ldots, n\}$ die Funktion $w(x) = \partial^\alpha f_r(x)$ bei y verschwindet, aber $\frac{\partial w}{\partial x_1}$ nicht. Wegen dem Satz der inversen Funktion bildet $x \mapsto h(x) = (w(x), x_2, \ldots, x_m)$ mit einem Diffeomorphismus eine offenen Umgebung $V \subset U$ von y auf eine offene Teilmenge $V' \subset \mathbb{R}^m$ ab. Weil auf C_k alle k–ten Ableitungen verschwinden, bildet sie $C_k \cap V$ auf die Hyperebene $H = \{0\} \times \mathbb{R}^{m-1} \cap V'$ ab. Die Einschränkung $g|_H$ der Abbildung $g = f \circ h^{-1}$ auf H bildet laut Induktionsvorausetzung alle Punkte $x \in H \cap V$, an denen der Rang von $T(g|_H)$ kleiner als n ist, auf eine Nullmenge ab. Alle Punkte von $h[C_k \cap V]$ sind in dieser Menge enthalten. Deshalb ist $g|_H[h[C_k \cap V]] = f[C_k \cap V]$ eine Nullmenge. Weil jede solche Umgebung V von y einen Ball $B(z, r) \ni y$ mit $z \in \mathbb{Q}^m$ und $r \in \mathbb{Q}$ enthält, gibt es eine abzählbare Überdeckung von $C_k \setminus C_{k+1}$ deren Bilder unter f Nullmengen sind. Dann ist $f[C_k \setminus C_{k+1}]$ eine Nullmenge.

3. Wir zeigen dass $f[C_k]$ in $\mathbb{R}^n$ für $k > \frac{m}{n} - 1$ eine Nullmenge ist. Sei $\|\cdot\|_\infty$ die Supremumsnorm von $\mathbb{R}^m$ und $Q = \overline{B(x, r)} \subset U$ ein abgeschlossener Ball bezüglich dieser Norm, also ein Quader mit den Kantenlängen $2r$. Weil f $(k + 1)$–mal stetig differenzierbar ist, gibt es wegen der Restgliedabschätzung im Satz von Taylor und der Kompaktheit von Q ein $c > 0$ mit

$$\|f(x + h) - f(x)\|_\infty \leq c\|h\|_\infty^{k+1} \qquad \text{für alle } x \in C_k \cap Q \text{ und } x + h \in Q.$$

Wir unterteilen Q in l^m Quader mit Kantenlängen $\frac{2r}{l}$. Sei $\tilde{Q}$ ein solcher Quader, der ein $x \in C_k$ enthält. Dann gilt $\|h\|_\infty \leq \frac{2r}{l}$ für jeden Punkt $x + h \in \tilde{Q}$. Mit der obigen Abschätzung folgt, dass $f[\tilde{Q}]$ in einem abgeschlossenen Ball bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ mit dem Radius $c(\frac{2r}{l})^{k+1}$ enthalten ist, also höchstens das Volumen $(2c)^n(\frac{2r}{l})^{(k+1)n}$ hat. Dann hat

$f[C_k \cap Q]$ höchstens das l^m fache Volumen $2^{n(k+2)}c^n r^{n(k+1)} l^{m-(k+1)n}$. Wegen $k+1 > \frac{m}{n}$ konvergiert diese obere Schranke im Grenzwert $l \to \infty$ gegen Null.

Im Fall $m < n$ und $C = U$ ist $f[U]$ wegen **3.** eine Nullmenge. **q.e.d.**

Die Aussage dieses Satzes gilt auch für $f \in C^l(U, \mathbb{R}^n)$ mit $l > \max\{0, m-n\}$. Um das zu zeigen muss im zweiten Schritt $g = f \circ h^{-1}$ auf H die Induktionsvorraussetzungen erfüllen. Dafür benötigt man ein weiteres Argument und die stärkere Bedingung $l > \max\{0, m-n\}$ anstatt der Bedingung $l \geq \frac{m}{n}$ aus dem dritten Schritt.

Korollar 4.2 (A.B. Brown)**.** *Für eine glatte Abbildung $f : X \to Y$ zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten ist $Y \setminus \{f(x) \mid x \in X \text{ mit } \operatorname{Rang} T_x(f) < \dim T_{f(x)}Y\}$ eine überall dichte (mit keiner offenen nichtleeren Menge schnittfremde) Teilmenge von Y.*

Beweis: Weil jede offene Teilmenge einen offenen Ball enthält, hat sie auch positives Volumen. Wegen dem Satz von Sard enthält dann jede offene Teilmenge von Y Punkte aus diesem Komplement. Damit ist das Komplement überall dicht. **q.e.d.**

Lemma 4.3. *Sei $f : X \to Y$ eine glatte Abbildung zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten mit $\dim X \geq \dim Y$. Für reguläre Werte y von f, d.h.*

$$y \in f[X] \setminus \{f(x) \mid x \in X \text{ mit } \operatorname{Rang} T_x(f) < \dim T_{f(x)}Y\},$$

ist $f^{-1}[\{y\}]$ eine $\dim X - \dim Y$–dimensionale Untermannigfaltigkeit von X. Für $x \in f^{-1}[\{y\}]$ ist $T_x f^{-1}[\{y\}]$ der Kern von $T_x(f)$.

Beweis: Auf $f^{-1}[\{y\}]$ gilt $\operatorname{Rang} T(f) = \dim Y$. Wegen Satz 1.44 ist $\operatorname{Rang} T(f)$ auf einer Umgebung von $f^{-1}[\{y\}]$ konstant. Dann ist $T_x(f)$ für alle $x \in f^{-1}[\{y\}]$ surjektiv und die Aussagen folgen aus Korollar 1.46. **q.e.d.**

Wir wollen diese Aussagen jetzt auf Mannigfaltigkeiten mit Rand verallgemeinern.

Korollar 4.4. *Sei $f : X \to Y$ eine glatte Abbildung von der differenzierbaren Mannigfaltigkeit X mit Rand auf die differenzierbare Mannigfaltigkeit Y ohne Rand mit $\dim X > \dim Y$. Für reguläre Werte y von f, die auch reguläre Werte von $f|_{\partial X}$ sind, ist $f^{-1}[\{y\}]$ eine Mannigfaltigkeit mit Rand $\partial f^{-1}[\{y\}] = f^{-1}[\{y\}] \cap \partial X$.*

Beweis: Die Aussage folgt aus Lemma 4.3 angewendet auf f und $f|_{\partial X}$. **q.e.d.**

Satz 4.5. *Jede zusammenhängende eindimensionale Mannigfaltigkeit X mit oder ohne Rand ist diffeomorph zu einem Intervall (d.h. $(0,1)$, $[0,1)$ oder $[0,1]$) oder $\mathbb{S}^1$.*

Beweis: Sei X eine eindimensionale Mannigfaltigkeit. Wir wählen einen Atlas von Karten mit einer entsprechenden glatten Zerlegung der Eins $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$. Jede Funktion

f_m verschwinde außerhalb einer kompakten Teilmenge des Definitionsbereiches U_m der Karte $\phi_m : U_m \to \mathbb{H}^1 = [0, \infty)$. Wir definieren eine Abbildung $g : TX \to [0, \infty)$ durch

$$g(v) = \sum_{\{m \mid x \in U_m\}} |f_m(x) d\phi_m(v)| \quad \text{für alle} \quad v \in T_x X.$$

Insbesondere ist $g^{-1}[\{0\}]$ der Nullschnitt von TX und g außerhalb des Nullschnittes glatt. Für alle $x \in X$ gibt es genau zwei $v \in T_x X$ mit $g(v) = 1$, die auseinander durch Multiplikation mit -1 hervorgehen. Jedes solche v setzt sich auf einer Umgebung von x eindeutig zu einem glatten Vektorfeld nach $g^{-1}[\{1\}]$ fort. Die Integralkurven dieser lokalen Vektorfeldern sind differenzierbare Abbildungen $\phi : I \to X$ auf Intervallen mit

$$g(T_t(\phi)(1)) = 1 \quad \text{für alle} \quad t \in I \quad \text{und} \quad 1 \in T_t I \simeq \mathbb{R}.$$

Weil die entsprechenden Vektorfelder glatt und bis auf ein Vorzeichen eindeutig sind, übertragen sich die Sätze 2.5 und 2.7. Solche ϕ sind glatte Immersionen und zwei $\phi_1 : I_1 \to X$ und $\phi_2 : I_2 \to X$ mit $\phi_1(t_1) = \phi_2(t_2)$ erfüllen eine der folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned} \phi_1(t + t_1) &= \phi_2(t + t_2) && \text{für alle } t \in I_1 - t_1 \cap I_2 - t_2 \\ \phi_1(t + t_1) &= \phi_2(t_2 - t) && \text{für alle } t \in I_1 - t_1 \cap t_2 - I_2. \end{aligned}$$

Außerdem gibt es für jedes x ein maximales $\phi : I \to X$ mit $\phi(0) = x$, so dass alle anderen solchen $\tilde{\phi}$ mit $\tilde{\phi}(0) = x$ Einschränkungen von ϕ auf ein Teilintervall von I sind, oder Einschränkungen von $t \mapsto \phi(-t)$ auf ein Teilintervall von $-I$. Wir lassen hierbei auch zu, dass I einen Rand hat. Maximale ϕ bilden Randpunkte von I auf Randpunkte von X ab, weil sich sonst die Integralkurve fortsetzen läßt. Also ist das Bild eines maximalen ϕ in X offen. Wenn $\phi(t_k)$ für eine Folge $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ im Definitionsbereich I eines maximalen ϕ gegen $x \in X$ konvergiert, dann existiert ein solches $\tilde{\phi} : \tilde{I} \to X$ mit $\tilde{\phi}(0) = x$. Das Bild $\tilde{\phi}[\tilde{I}]$ ist eine Umgebung von x und enthält unendlich viele $\phi(t_k)$. Damit läßt sich ϕ so fortsetzten, dass $\phi[I]$ x enthält. Also ist $\phi[I]$ auch abgeschlossen. Weil X zusammenhängend ist, ist ϕ surjektiv. Wenn $\phi(t_1) = \phi(t_2)$ gilt, dann folgt entweder $\phi(t + t_1) = \phi(t_2 - t)$ oder $\phi(t + t_1) = \phi(t + t_2)$. Im ersten Fall folgt für $t_1 \neq t_2$

$$\phi\left(\tfrac{t_1 + t_2}{2} + \epsilon\right) = \phi\left(\tfrac{t_1 + t_2}{2} - \epsilon\right) \quad \text{für kleine } \epsilon.$$

Da ϕ eine Immersion ist wiederspricht das der lokalen Injektivität von ϕ. Im zweiten Fall gilt $\phi(t + \gamma) = \phi(t)$ für $\gamma = t_2 - t_1$. Für $t_2 \neq t_1$ ist ϕ periodisch und $I = \mathbb{R}$. Weil ϕ als Immersion lokal injektiv ist, muss es eine kleinste positive Periode $\gamma_{\min}$ von ϕ geben. Also ist ϕ ein Diffeomorphismus oder induziert einen von $\mathbb{R}/\gamma_{\min}\mathbb{Z}$ nach X. **q.e.d.**

Lemma 4.6 (Hirsch). *Auf einer kompakten Mannigfaltigkeit X mit Rand gibt es keine glatte Abbildung $f : X \to \partial X$ mit $f|_{\partial X} = \mathbb{1}_{\partial X}$.*

Beweis: Sei f eine solche Abbildung mit $f|_{\partial X} = \mathbb{1}_{\partial X}$. Dann gibt es wegen dem Satz von Sard ein $y \in \partial X$, das die Voraussetzungen von Korollar 4.4 erfüllt. Dann ist $f^{-1}[\{y\}]$ eine kompakte eindimensionale Mannigfaltigkeit mit $\partial f^{-1}[\{y\}] = \{y\}$. Die kompakten eindimensionalen Mannigfaltigkeiten mit Rand sind wegen Satz 4.5 diffeomorph zu disjunkten Vereinigungen von $\mathbb{S}^1$ und $[0,1]$. Also haben sie eine gerade Anzahl an Randpunkten. Das widerspricht der Annahme. **q.e.d.**

Fixpunktsatz von Brouwer 4.7. *Jede stetige Abbildung f von dem abgeschlossenen Einheitsball $\overline{B(0,1)} \subset \mathbb{R}^n$ auf sich selber hat einen Fixpunkt.*

Beweis: Wir zeigen die Aussage zuerst für eine glatte Abbildung $f : \overline{B(0,1)} \to \overline{B(0,1)}$. Wenn f keinen Fixpunkt hat, dann sei $g(x)$ für alle $x \in \overline{B(0,1)}$ der Schnittpunkt von der Geraden durch x und $f(x)$ mit $\partial B(0,1)$, der näher bei x liegt. Dann widerspricht die glatte Abbildung g dem Lemma 4.6. Also hat ein glattes f einen Fixpunkt.

Sei jetzt f eine solche stetige Abbildung ohne Fixpunkt. Dann besitzt die stetige Abbildung $x \mapsto \|x - f(x)\|$ auf der kompakten Menge $\overline{B(0,1)}$ ein Minimum $\epsilon > 0$. Wegen dem Satz von Stone-Weierstraß gibt es n reelle Polynome $p = (p_1, \ldots, p_n)$ mit

$$\|f(x) - p(x)\| < \tfrac{\epsilon}{2} \qquad \text{für alle} \qquad x \in \overline{B(0,1)}.$$

Dann bildet $x \mapsto \frac{2}{2+\epsilon}p(x)$ alle Elemente von $\overline{B(0,1)}$ auf Vektoren einer Länge kleiner als $\frac{2}{2+\epsilon}(1 + \frac{\epsilon}{2}) = 1$ ab. Also ist das eine glatte Abbildung von $\overline{B(0,1)}$ auf sich selber mit einem Fixpunkt $x \in \overline{B(0,1)}$. Dort gilt wegen $\frac{2}{2+\epsilon}p(x) = p(x) - \frac{\epsilon}{2}\frac{2}{2+\epsilon}p(x)$

$$\epsilon \le \|x - f(x)\| = \|\tfrac{2}{2+\epsilon}p(x) - f(x)\| \le \|p(x) - f(x)\| + \|\tfrac{\epsilon}{2}\tfrac{2}{2+\epsilon}p(x)\| < \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Das widerspricht der Annahme, dass f keinen Fixpunkt hat. **q.e.d.**

Wir beweisen noch mit einem auf Hausdorff zurückgehenden Spezialfalls des Fortsetzungssatzes von Tietzsche den Gebietsinvarianzsatz von Brouwer.

Lemma 4.8 (Hausdorff)**.** *Sei $f : A \to \mathbb{R}$ auf einer abschlossenen Teilmenge A eines metrischen Raums X stetig und beschränkt, und $d(x,A) = \inf_{a \in A} d(x,a)$ für alle $x \in X$. Dann läßt sich f folgendermaßen stetig und beschränkt auf X fortsetzen:*

$$g : X \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in A, \\ \inf\limits_{a \in A} \left(f(a) + \frac{d(x,a)}{d(x,A)} - 1 \right) & \text{für } x \notin A. \end{cases}$$

Beweis: Weil A abgschlossen ist, sind alle $x \in X \setminus A$ in einem Ball $B(x,\epsilon) \subset X \setminus A$ enthalten und $d(x,A) \ge \epsilon > 0$. Also ist g ist wohldefiniert. Weil $d(x,a) \ge d(x,A)$ für alle $a \in A$ gilt, ist $g(x) \ge \inf_{a \in A} f(a)$. Andereseits gibt es für alle $x \in X \setminus A$

und $\epsilon > 0$ ein $b \in A$ mit $d(x,b) \leq d(x,A)(1+\epsilon)$. Dann folgt $g(x) \leq f(b)+\epsilon$, und $g(x) \leq \sup_{a\in A} f(a)$, weil das für alle $\epsilon > 0$ gilt. Also ist g beschränkt.

Als nächstes zeigen wir die Stetigkeit von g bei $x \in A$. Weil f auf A stetig ist, genügt es $y \in X \setminus A$ zu betrachten. Für alle $\epsilon > 0$ gibt es zwei $a, b \in A$ mit

$$f(a) + \frac{d(y,a)}{d(y,A)} - 1 - \epsilon \leq g(y) \leq f(b) + \frac{d(y,b)}{d(y,A)} - 1 \leq f(b) + \epsilon.$$

Dabei ist $b \in A$ so gewählt, dass $d(y,b) \leq d(y,A)(1+\epsilon) \leq d(y,x)(1+\epsilon)$ gilt. Wegen $d(y,a) \geq d(y,A)$ liegt dann $g(y)$ in $(f(a)-\epsilon, f(b)+\epsilon)$. Für $d(y,a)$ folgt

$$d(y,a) \leq (f(b) - f(a) + 1 + 2\epsilon)d(y,A) \leq (M+1+2\epsilon)d(x,y)$$

mit $M = \sup_{a\in A} f(a) - \inf_{a\in A} f(a)$. Insbesondere sind sowohl $d(x,a)$ als auch $d(x,b)$ kleiner als $(M+2+2\epsilon)d(x,y)$. Wegen der Stetigkeit von f liegen dann $f(a)$ und $f(b)$ beliebig nahe bei $f(x)$, wenn $d(x,y)$ hinreichend klein ist. Also ist g bei $x \in A$ stetig.

Für $x, y \in X \setminus A$ und $\epsilon > 0$ gibt es Elemente $a, b \in A$, so dass folgendes gilt:

$$\begin{aligned}
f(a) + \frac{d(x,a)}{d(x,A)} - 1 - \epsilon \leq g(x) &\leq f(b) + \frac{d(x,b)}{d(x,A)} - 1, \\
f(b) + \frac{d(y,b)}{d(y,A)} - 1 - \epsilon \leq g(y) &\leq f(a) + \frac{d(y,a)}{d(y,A)} - 1, \\
|g(x) - g(y)| &\leq \left|\frac{d(x,a)}{d(x,A)} - \frac{d(y,a)}{d(y,A)}\right| + \left|\frac{d(x,b)}{d(x,A)} - \frac{d(y,b)}{d(y,A)}\right| + \epsilon.
\end{aligned}$$

Dabei gilt hier $d(x,a) \leq (M+1+2\epsilon)d(x,A)$ und $d(y,b) \leq (M+1+2\epsilon)d(y,A)$ wie oben für $d(y,a)$. Dann folgt die Stetigkeit von g bei $x \in X \setminus A$ aus

$$\begin{aligned}
\left|\frac{d(x,a)}{d(x,A)} - \frac{d(y,a)}{d(y,A)}\right| &\leq \frac{d(x,a)}{d(x,A)} \frac{|d(y,A) - d(x,A)|}{d(y,A)} + \frac{|d(x,a) - d(y,A)|}{d(y,A)}, \\
\left|\frac{d(x,b)}{d(x,A)} - \frac{d(y,b)}{d(y,A)}\right| &\leq \frac{|d(x,b) - d(y,b)|}{d(x,A)} + \frac{d(y,b)}{d(y,A)} \frac{|d(y,A) - d(x,A)|}{d(x,A)}.
\end{aligned}$$

q.e.d.

Gebietsinvarianzsatz von Brouwer 4.9. *Das Bild $f[U]$ einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ unter einer injektiven stetigen Abbildung $f : U \to \mathbb{R}^n$ ist offen.*

Beweis: Um jedes $x \in U$ ist für ein $r > 0$ der abgeschlossener Ball $\overline{B(x,r)}$ von $\mathbb{R}^n$ in U enthalten. Deshalb genügt es für eine stetige injektive Abbildung $f : \overline{B(x,r)} \to \mathbb{R}^n$ zu zeigen, dass $B(f(x),\epsilon)$ für ein $\epsilon > 0$ in $f[\overline{B(x,r)}]$ liegt. Weil alle abgeschlossenen Bälle homöomorph sind, genügt es eine stetige injektive Abbildung auf $B = \overline{B(0,1)}$ zu betrachten. Weil das Bild jeder abgeschlossenen Teilmenge von B kompakt ist, ist die

Umkehrabbildung $f^{-1} : f[B] \to B$ stetig und $A = f[B]$ kompakt. Wegen Lemma 4.8 gibt es eine stetige Fortsetzung $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ von f^{-1}. Wegen $g(f(0)) = 0$ gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass $\|g(y)\| < \frac{1}{3}$ auf $y \in B(f(0), 2\epsilon)$ gilt. Wir zeigen jetzt $B(f(0), \epsilon) \subset A$. Andernfalls sei $z \in B(f(0), \epsilon) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A)$. Dann liegt $f(0)$ in $B(z, \epsilon) \cap A$ und damit außerhalb der beiden folgenden kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}^n$:

$$C = \{y \in A \mid \|y - z\| \geq \epsilon\}, \qquad D = \partial B(z, \epsilon).$$

Also hat g auf C keine Nullstellen. Sei $\delta = \min\{\inf_{y \in C} \|g(y)\|, 1/3\} > 0$. Wegen $z \notin A$ bildet die folgende stetige Abbildung $y \in C$ auf y und $A \setminus C$ nach $D \subset B(f(0), 2\epsilon)$ ab:

$$h : A \to C \cup D, \qquad y \mapsto z + \max\left\{1, \frac{\epsilon}{\|y - z\|}\right\}(y - z),$$

Wegen dem Satz von Stone und Weierstraß gibt es Polynome

$$p = (p_1, \ldots, p_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad \text{mit} \quad \|p(x) - g(y)\| < \delta \quad \text{für alle} \quad y \in C \cup D.$$

Aufgrund der Wahl von δ hat dann p auf C keine Nullstellen. Weil p auf $\overline{B(z, \epsilon)}$ lipschitzstetig ist, ist $p[D]$ genauso wie D in $\mathbb{R}^n$ eine Nullmenge. Also können wir durch eine hinreichend kleine Verscheibung zusätzlich erreichen, dass p auch auf D keine Nullstellen hat. Dann hat die Abbildung $p \circ h$ auf A keine Nullstellen und erfüllt

$$\|g(y) - p(h(y))\| = \|g(y) - p(y)\| < \delta \leq \frac{1}{3} \quad \text{auf} \quad y \in C.$$

Auf $y \in A \setminus C \subset B(f(0), 2\epsilon)$ gilt sowohl $\|g(y)\| \leq \frac{1}{3}$ als auch $\|g(h(y))\| \leq \frac{1}{3}$. Also folgt

$$\begin{aligned}\|g(y) - p(h(y))\| &\leq \|g(y) + g(h(y)) + p(h(y)) - g(h(y))\| \leq \\ &\leq \|g(y)\| + \|g(h(y))\| + \|p(h(y) - g(h(y))\| \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \delta \leq 1.\end{aligned}$$

Wegen dem Brouwerschen Fixpunktsatz hat dann folgende Abbildung einen Fixpunkt

$$\overline{B(0, 1)} \to \overline{B(0, 1)}, \qquad x \mapsto x - p(h(f(x))) = g(f(x)) - p(h(f(x)))$$

Also hat $p \circ h$ auf A eine Nullstelle im Widerspruch zu $B(f(0), \epsilon) \not\subset A$. **q.e.d.**

4.2 Der Grad glatter Abbildungen

Definition 4.10. *Zwei glatte Abbildungen $f, g : X \to Y$ heißen glatt homotop, wenn es eine glatte Abbildung $F : X \times [0, 1] \to Y$ gibt, mit $F(x, 0) = f(x)$ und $F(x, 1) = g(x)$ für alle $x \in X$. Zwei solche Diffeomorphismen heißen glatt isotop, wenn $x \mapsto F(x, t)$ für alle $t \in [0, 1]$ zusätzlich ein Diffeomorphismus ist.*

Für eine glatte Abbildung $f : X \to Y$ zwischen gleichdimensionalen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten und für $y \in Y \setminus \{f(x) \mid x \in X \text{ mit } \operatorname{Rang}(T_x(f)) < \dim Y\}$ ist $f^{-1}[\{y\}]$ wegen Satz 1.37 eine diskrete Teilmenge von X, von der je zwei verschiedene Elemente disjunkte Umgebungen besitzen. Wenn X kompakt ist, hat diese Menge also nur eine endliche Anzahl $\#f^{-1}[\{y\}]$ an Elementen. Wir zeigen zuerst

Satz 4.11. *Seien $f, g : X \to Y$ glatt homotope glatte Abbildungen zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten mit X kompakt und* $\dim X = \dim Y$. *Wenn $y \in Y$ nicht zu folgender Menge gehört, dann ist $\#f^{-1}[\{y\}] - \#g^{-1}[\{y\}]$ eine gerade Zahl:*

$$\{f(x) \mid x \in X \textit{ mit } \operatorname{Rang}(T_x(f)) < \dim Y\} \cup \{g(x) \mid x \in X \textit{ mit } \operatorname{Rang}(T_x(g)) < \dim Y\}.$$

Wenn Y zusammenhängend ist, dann ist $\#f^{-1}[\{y\}]$ bis auf eine gerade Zahl unabhängig von der Wahl von $y \in Y \setminus \{f(x) \mid x \in X \textit{ mit } \operatorname{Rang}(T_x(f)) < \dim Y\}$.

Beweis: Sei $F : X \times [0,1] \to Y$ eine glatte Homotopie zwischen f und g. Wenn y zusätzlich nicht zu $\{F(x,t) \mid (x,t) \in X \times [0,1] \text{ und } \operatorname{Rang}(T_x(F)) < \dim Y\}$ gehört, dann ist $F^{-1}[\{y\}]$ wegen Korollar 4.4 eine kompakte eindimensionale Untermannigfaltigkeit mit dem Rand $(f^{-1}[\{y\}] \times \{0\}) \cup (g^{-1}[\{y\}] \times \{1\})$. Wegen Satz 4.5 enthält dieser Rand eine gerade Anzahl an Punkten und $\#f^{-1}[\{y\}] - \#g^{-1}[\{y\}]$ ist gerade.

Aufgrund der Voraussetzung an y und dem Satz der inversen Funktion sind die beiden Funktionen $z \mapsto \#f^{-1}[\{z\}]$ und $z \mapsto \#g^{-1}[\{z\}]$ auf einer kleinen Umgebung von y konstant. Wegen dem Satz von Sard enthält diese Umgebung einen Punkt z in obiger Menge. Also gilt die erste Aussage. Für die zweite beutzen wir

Lemma 4.12. *Seien $y, z \in Y$ Punkte einer zusammenhängenden differenzierbaren Mannigfaltigkeit. Dann bildet ein zu $\mathbb{1}_y$ isotoper Diffeomorphismus von Y y auf z ab.*

Beweis: Für je zwei Punkte in $(0,1)$ gibt es eine streng monotone wachsende stückweise lineare Funktion, die außerhalb einer kompakten Teilmenge von $(0,1)$ gleich $\mathbb{1}_{(0,1)}$ ist, und den eine Punkt auf den anderen abbildet. Dann gibt es auch einen Diffeomorphismus ϕ von $\mathbb{R}$ auf sich selber, der außerhalb einer kompakten Teilmenge von $(0,1)$ die identische Abbildung ist und den einen Punkt auf den anderen abbildet. Die Abbildung $(x,t) \mapsto tx + (1-t)\phi(x)$ definiert dann eine glatte Isotopie von ϕ zu der Identität. Wenn wir für einen Punkt von $B(0,R) \subset \mathbb{R}^n$ auf der Verbindungsgeraden mit 0 einen geeigneten Punkt a wählen, ist die Abbildung von der Form $x \mapsto a + r\phi(\frac{|x-a|}{r})\frac{x-a}{|x-a|}$ ein Diffeomeorphismus von $B(0,R)$, der außerhalb einer kompakten Menge in $B(a,r) \subset B(0,R) \subset \mathbb{R}^n$ gleich $\mathbb{1}_{B(0,R)}$ ist, und 0 auf den Punkt von $B(0,R)$ abbildet. Außerdem ist Φ zu $\mathbb{1}_{B(0,R)}$ isotop. Mit einem solchen Diffeomorphismus gilt die Aussage für Punkte y und z im Definitionsbereich einer Karte. Weil die Aussage in y und z transitiv ist, ist die Menge der Punkte z, so dass die Aussage für y und z gilt, dann offen und abgeschlossen, und damit gleich Y. **q.e.d.**

Fortsetzung des Beweises von Satz 4.11: Wegen dem Lemma gibt es für zwei Punkte $y,z \in Y \setminus \{f(x) \mid x \in X \text{ mit } \operatorname{Rang}(T_x(f)) < \dim Y\}$ einen zu $\mathbb{1}_Y$ glatt isotopen Diffeomorphismus Φ von Y, der z auf y abbildet. Dann sind f und $g = \Phi \circ f$ glatt homotop mit $g^{-1}[\{z\}] = f^{-1}[\{y\}]$. Also folgt die zweite Aussage aus der ersten. **q.e.d.**

Dieser Satz zeigt, dass $\deg_2(f) = \# f^{-1}[\{y\}] \mod 2$ unabhängig von der Wahl des Punktes $y \in Y \setminus \{f(x) \mid x \in X \text{ mit } \operatorname{Rang}(T_x(f)) < \dim Y\}$ ist und eine Homotopieinvariante von solchen glatten Abbildungen $f : X \to Y$ definiert. Wenn f nicht surjektiv ist, dann ist die Anzahl für Werte y außerhalb des Bildes von f Null und damit $\deg_2(f) = 0 \mod 2$. Weil das Bild $f[X]$ immer kompakt ist, ist f nicht surjektiv wenn Y nicht kompakt ist, und $\deg_2(f) = 0 \mod 2$.

Beispiel 4.13. (i) *Jede konstante Abbildung* $f : X \to X$ *hat* $\deg_2(f) = 0 \mod 2$.

(ii) *Die Identität einer kompakten Mannigfaltigkeit* $\mathbb{1}_X$ *hat* $\deg_2(\mathbb{1}_X) = 1 \mod 2$.

(iii) *Die Aussage für* $X = Y = \mathbb{S}^n$ *impliziert die Aussage von Lemma 4.6 für* $X = \overline{B(0,1)} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *und damit den Brouwerschen Fixpunktsatz 4.7, weil jede glatte Abbildung* $f : \overline{B(0,1)} \to \mathbb{S}^n$ *mit* $f|_{\mathbb{S}^n} = \mathbb{1}_{\mathbb{S}^n}$ *eine glatte Homotopie von* $\mathbb{1}_{\mathbb{S}^n}$ *zu einer konstanten Abbildung definiert.*

Definition 4.14. *Für eine glatte Abbildung* $f : X \to Y$ *zwischen orientierten differenzierbaren Mannigfaltigkeiten mit* X *kompakt und* $\dim X = \dim Y$ *hängt das Vorzeichen von* $\det(T_x(f))$ *bei* $x \in X$ *nur von den Orientierungen von* X *und* Y *ab. Wir definieren*

$$\deg(f,y) = \sum_{x \in f^{-1}[\{y\}]} \frac{\det(T_x(f))}{|\det(T_x(f))|} \text{ für } y \in Y \setminus \{f(x) \mid x \in X \text{ mit } \operatorname{Rang}(T_x(f)) < \dim Y\}.$$

Satz 4.15. *Seien* $f,g : X \to Y$ *glatt homotope glatte Abbildungen zwischen orientierten differenzierbaren Mannigfaltigkeiten mit* X *kompakt und* $\dim X = \dim Y$. *Wenn* $y \in Y$ *nicht zu folgender Menge gehört, dann ist* $\deg(f,y) = \deg(g,y)$:

$$\{f(x) \mid x \in X \text{ mit } \operatorname{Rang}(T_x(f)) < \dim Y\} \cup \{g(x) \mid x \in X \text{ mit } \operatorname{Rang}(T_x(g)) < \dim Y\}.$$

Wenn Y *zusammenhängend ist, dann ist* $\deg(f,y)$ *unabhängig von der Wahl von*

$$y \in Y \setminus \{f(x) \mid x \in X \text{ mit } \operatorname{Rang}(T_x(f)) < \dim Y\}.$$

Beweis: Wir zeigen zuerst, dass für $y \in Y \setminus \{f(x) \mid x \in X \text{ mit } \operatorname{Rang}(T_x(f)) < \dim Y\}$ $\deg(f,y) = 0$ gilt, wenn X der Rand einer kompakten orientierten Mannigfaltigkeit Z ist und f sich zu einer glatten Abbildung $F : Z \to Y$ fortsetzt. Wenn $y \in Y$ zusätzlich nicht in $\{F(z) \mid z \in Z \text{ mit } \operatorname{Rang}(T_z(F)) < \dim Y\}$ liegt, dann ist $F^{-1}[\{y\}]$ wegen Korollar 4.4 eine endliche Vereinigung von eindimensionalen Untermannigfaltigkeiten von Z, deren Rand in $X = \partial Z$ liegt. Sei $A \subset F^{-1}[\{y\}]$ eine Zusammenhangskomponente mit nicht verschwindendem Rand $\partial A = \{a\} \cup \{b\}$. Die Orientierungen von Z und Y induzieren eine Orientierung von A, deren äußeres Produkt mit der durch f zurückgezogenen nicht verschwindenden Volumenform von Y positiv proportional zu der nichtverschwindenden Volumenform von Z ist. Wegen Satz 4.5 ist A als eine kompakte zusammenhängende eindimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand ein abgeschlossenes Intervall, und die Orientierung von A zeigt an einem Ende aus A heraus und an dem anderen Ende nach A hinein. Daraus folgt, dass die Vorzeichen von $\det(T_a(f))$ und $\det(T_b(f))$ unterschiedlich sind, und deshalb $\deg(f, y)$ verschwindet. Für $y \in \{F(z) \mid z \in Z \text{ mit } \operatorname{Rang}(T_z(F)) < \dim Y\}$ ist die Funktionen $y' \mapsto \deg(f, y')$ wegen Satz 1.37 auf einer Umgebung von y konstant. Wegen dem Satz von Sard gibt es in dieser Umgebung ein $y' \in Y \setminus \{F(z) \mid z \in Z \text{ mit } \operatorname{Rang}(T_z(F)) < \dim Y\}$. Daraus folgt $\deg(f, y) = 0$, wenn sich f zu einem $F : Z \to Y$ fortsetzt.

Wenn f und g glatt homotop sind, dann sind f und g die Randwerte von $F : X \times [0,1] \to Y$ mit $\partial(X \times [0,1]) = (X \times \{0\}) \cup (X \times \{1\})$. Weil beide Randwerte bezüglich der Orientierung von $X \times [0,1]$ umgekehrtes Vorzeichen haben folgt die erste Aussage. Die zweite Aussage folgt aus der ersten wie im Beweis von Satz 4.11. **q.e.d.**

Aus Satz 4.15 folgt ein zweiter Beweis des Satzes vom Igel:

Satz vom Igel 4.16. *Die n–dimensionale Sphähre $\mathbb{S}^n$ hat genau dann ein nichtverschwindendes glattes Vektorfeld, wenn n ungerade ist.*

Beweis: Wenn wir $\mathbb{S}^n$ mit $\partial\overline{B(0,1)} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ identifizieren, dann wird in jedem Punkt $x \in \partial\overline{B(0,1)}$ der Tangentialraum $T_x\partial\overline{B(0,1)}$ mit $\{y \in \mathbb{R}^{n+1} \mid y \cdot x = 0\}$ identifizert. Deshalb werden die Vektorfelder von $\mathbb{S}^n$ durch Abbildungen

$$F : \partial\overline{B(0,1)} \to \mathbb{R}^{n+1}, \quad x \mapsto F(x) \quad \text{mit} \quad x \cdot F(x) = 0$$

beschrieben. Für ungerades n beschreibt $x \mapsto (x_2, -x_1, x_3, -x_4, \ldots, x_{n+1}, -x_n)$ ein solches glattes nicht verschwindendes Vektorfeld. Für gerades n hat die Antipodenabbildung von $\mathbb{S}^n$ als eine Verkettung von den $n+1$ Abbildungen, die jeweils eine Koordinate von $\mathbb{R}^{n+1}$ mit -1 multiplizieren den Grad $(-1)^{n+1}$ und ist wegen Satz 4.15 nicht glatt homotop zu $\mathbb{1}_{\mathbb{S}^n}$. Die Abbildung F zu einem glatten nichtverschwindenden Vektorfeld definiert aber folgende glatte Homotopie von $\mathbb{1}_{\mathbb{S}^n}$ zu der Antipodenabbildung:

$$\mathbb{S}^n \times [0,1] \to \mathbb{S}^n, \quad (x,t) \mapsto \cos(t\pi)x + \sin(t\pi)\frac{F(x)}{\|F(x)\|}.$$

Für gerades n kann es also kein solches Vektorfeld F geben. **q.e.d.**

4.3 Vektorfelder

In diesem Abschnitt untersuchen wir qualitative Aspekte von Vektorfeldern auf differenzierbaren Mannigfaltigkeiten. Lokal sieht jede differenzierbare Mannigfaltigkeit wie der $\mathbb{R}^n$ aus. Deshalb betrachten wir zunächst Vektorfelder F auf dem $\mathbb{R}^n$ mit einer isolierten Nullstelle. Sei also $F : B(x_0, R) \to \mathbb{R}^n$ ein glattes Vektorfeld mit $F(x_0) = 0$ und $F(x) \neq 0$ für $x \in B(x_0, R) \setminus \{0\}$. Dann definiert für alle $0 < r < R$ die Abbildung

$$\mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{S}^{n-1}, \quad x \mapsto \frac{F(x_0 + rx)}{\|F(x_0 + rx)\|}$$

eine glatte Abbildung. Diese Abbildungen sind für alle $0 < r < R$ zueinander glatt homotop und haben deshalb den gleichen Grad. Den Grad dieser Abbildung bezeichen wir als den Index(F, x_0) des Vektorfeldes F an der isolierten Nullstele x_0.

Lemma 4.17. *Für ein glattes Vektorfeld $F : U \to \mathbb{R}^n$ auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ mit einer isolierten Nullstelle bei $x_0 \in U$ und einen Diffeomorphismus $\Phi : U \to V$ auf eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^n$ hat $T(\Phi) \circ F \circ \Phi^{-1}$ eine isolierte Nullstelle bei $\Phi(x_0)$ mit*

$$\mathrm{Index}(T(\Phi) \circ F \circ \Phi^{-1}, \Phi(x_0)) = \mathrm{Index}(F, x_0).$$

Beweis: Wir zeigen zuerst, dass jeder orientierungserhaltende Diffeomorphismus Φ von $\mathbb{R}^n$ glatt isotop zu $\mathbb{1}_{\mathbb{R}^n}$ ist. Nach Verkettung mit einer Translation haben wir $\Phi(0) = 0$.

$$F : \mathbb{R}^n \times [0,1] \to \mathbb{R}^n, \quad (x,t) \mapsto \begin{cases} \frac{1}{t}\Phi(tx) & \text{für } t \in (0,1] \\ T_0(\Phi) & \text{für } t = 0 \end{cases}$$

definiert dann eine Isotopie von dem linearen Isomorphismus $T_0(\Phi)$ nach Φ. Wegen $\Phi(0) = 0$ läßt sich $\Phi(x)$ schreiben als $\Phi(x) = x_1\phi_1(x) + \ldots + x_n\phi_n(x)$ mit glatten Funktionen $\phi_1, \ldots, \phi_n$. Dann ist $F(x,t) = x_1\phi_1(tx) + \ldots + x_n\phi_n(tx)$ und deshalb auch bei $t = 0$ eine glatte Isotopie. Dann folgt die Aussage daraus, dass die Gruppe der linearen orientierungerhaltender Isomorphismen zusammenhängend ist.

Wenn Φ orientierungserhaltend ist, konstruieren wir mithilfe der Isotopie aus dem ersten Teil eine eine glatte Homotopie zwischen der Einbettung $U \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ und dem Diffeomorphismus $\Phi : U \to \mathbb{R}^n$. Das definiert eine glatte Homotopie zwischen den entsprechenden glatten Abbildungen von $\mathbb{S}^{n-1} \sim \partial B(x_0, R)$ nach $\mathbb{S}^{n-1}$. Dann folgt die Aussage aus Satz 4.15. Wenn Φ nicht orientierungserhalten ist, genügt es zu zeigen, dass der Index nicht von der Orientierung abhängt. Für den speziellen Fall $x_0 = 0$ und einer Reflektion einer Koordinate ändert sich der Grad nicht, weil die Ableitung der entsprechenden Abbildung von $\mathbb{S}^{n-1}$ auf sich selber mit der Reflektion konjugiert wird, und deshalb die Determinante das Vorzeichen nicht ändert. **q.e.d.**

Wegen diesem Lemma ist der Index eines glatten Vektorfeldes einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit bei einer isolierten Nullstelle unabgängig von der Karte definiert.

Lemma 4.18. *Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge mit glattem Rand, also eine n–dimensionale kompakte Untermannigfaltigkeit mit Rand, und $F : X \to \mathbb{R}^n$ ein glattes Vektorfeld mit isolierten Singularitäten, das auf ∂X nach Außen zeigt, also in den Karten in die obere Halbebene eine negative letzte Komponente hat. Dann ist*

$$\sum_{x \in F^{-1}[\{0\}]} \mathrm{Index}(F, x)$$

gleich dem Grad der äußeren Normalen N, als glatte Abbildung von ∂X nach $\mathbb{S}^{n-1}$.

Beweis: Mithilfe des in Satz 3.30 (ii) konstruierten Kragens, können wir eine glatte Homotopie von einem glatten Vektorfeld, das auf ∂X nach Außen zeigt auf das dort definierte Vektorfeld $-N$ definieren. Wegen Satz 4.15 können wir dann annehmen, dass das Vektorfeld auf ∂X mit dieser äußeren Normalen übereinstimmt. Wir schneiden um jede isolierte Nullstelle eine kleinen Ball aus X heraus. Auf der entstehenden glatten Mannigfaltigkeit mit Rand definiert das normierte Vektorfeld eine glatte Abbildung nach $\mathbb{S}^{n-1}$, deren Grad auf dem Rand wegen des ersten Teils des Beweises von Satz 4.15 verschwindet. Dieser Grad ist die Summe des Grades der äußeren Normalen auf ∂X minus der Summe über die Indizes von dem Vektorfeld. **q.e.d.**

Allgemein kann man folgendes zeigen:

Satz von Poincare und Hopf 4.19. *Sei F ein glattes Vektorfeld auf einer kompakten Mannigfaltigkeit X, das nur isolierte Nullstellen hat, und wenn X einen Rand hat auf ∂X nach Außen zeigt. Dann ist die Summe der Indizes von F unabhängig von der Wahl eines solchen Vektorfeldes und gleich der sogenannten Eulerchrakteristik von X:*

$$\sum_{x \in \textit{Nullstellen von } F} \mathrm{Index}(F, x) = \chi(X).$$

4.4 Pontryagins Kobordismen

Definition 4.20. *Zwei Untermannigfaltigkeiten Y und Z einer Mannnigfaltigkeit X heißen kobordant, wenn sich die Untermannigfaltigkeiten mit Rand $Y \times [0, \epsilon)$ und $Z \times (1 - \epsilon, 1]$ von $X \times [0, 1]$ zu einer kompakten Untermannigfaltigkeit W mit Rand von $X \times [0, 1]$ fortsetzen läßt mit $\partial W = (Y \times \{0\}) \cup (Z \times \{0\})$.*

Definition 4.21. *Eine Rahmung einer Untermannigfaltigkeit $Y \subset X$ ist eine glatte Basis auf Y des orthogonalen Komplements von TY bzüglich der natürlichen Paarung zwischen $T_y X$ und $T'_y X$ als Unterbündel von $T'X|_Y$. Zwei gerahmte Untermannigfaltigkeiten Y und Z einer kompakten differenzierbaren Mannigfaltigkeit X heißen kobordant, wenn sich die beiden gerahmten Untermannigfaltigkeiten $Y \times [0, \epsilon)$ und $Z \times (1 - \epsilon, 1]$ von $X \times [0, 1]$ zu einer gerahmten kompakten Untermannigfaltigkeit fortsetzen.*

Definition 4.22. *Sei $f : X \to \mathbb{S}^n$ eine glatte Abbildung und $y \in \mathbb{S}^n$ kein Element von $\{f(x) \mid x \in X \text{ mit } Rang(T_x(f)) < n\}$. Dann ist $f^{-1}[\{y\}]$ eine Untermannigfaltigkeit. Für alle $x \in f^{-1}[\{y\}]$ bildet die duale Abbildung von $T_x(f)$ eine orientierte Basis von $T_y\mathbb{S}^n$ auf eine Basis des orthogonalen Komplements von $T_x f^{-1}[\{y\}]$ in $T'_x X$ ab. Jede orientierete Basis von $T_y\mathbb{S}^n$ induziert also eine Rahmung von $f^{-1}[\{y\}]$. Die gerahmte Untermannigfaltigkeit $f^{-1}[\{y\}] \subset X$ heißt Pontryaginmannigfaltigkeit von f.*

Wir beweisen in diesem Abschnitt folgenden Satz

Satz 4.23. *Sei $f : X \to \mathbb{S}^n$ eine glatte Abbildung auf einer m–dimensionalen zusammenhängenden kompakten Mannigfaltigkeit X mit $m \geq n$. Dann gilt:*

A *Seien $y, z \in \mathbb{S}^n \setminus \{f(x) \mid x \in X \text{ mit } \mathrm{Rang}(T_x(f)) < n\}$. Dann sind die beiden Pontryaginmannigfaltigkeiten $f^{-1}[\{y\}]$ und $f^{-1}[\{z\}]$ kobordant.*

B *Zwei Abbildungen $f, g : X \to \mathbb{S}^n$ sind genau dann glatt homotop, wenn die entsprechenden Pontryaginmannigfaltigkeiten kobordant sind.*

C *Jede kompakte gerahmte Untermannigfaltigkeit von X der Dimension $m - n$ ist die Pontryaginmannigfaltigkeit einer glatten Abbildung $f : X \to \mathbb{S}^n$.*

Beweis: 1. Eine orientierte Basis von $T_y\mathbb{S}^n$ bildet eine orientierte Basis des orthogonalen Komplementes von y in $\mathbb{R}^{n+1}$. Wenn wir diese orthogonale Komplement mit $\mathbb{R}^n$ identifizieren, dann setzt sich eine orientierte Basis zu einer $n \times n$ Matrix mit positiver Determinante zusammen. Dadurch werden die orientierten Basen von $T_y\mathbb{S}^n$ sogar mit allen $n \times n$ Matrizen mit positiver Determinante identifiziert. Weil diese offene Menge der $n \times n$ Matrizen zusammenhängend ist, hängt die Klasse der kobordanten Pontryaginmannigfaltigkeiten $f^{-1}[\{y\}]$ nicht von der orientierten Basis von $T_y\mathbb{S}^n$ ab.
2. Sei jetzt y kein Element von $\{f(x) \mid x \in X \text{ mit } \mathrm{Rang}(T_x(f) < n\}$. Wegen dem Rangsatz 1.44 ist diese Menge abgeschlossen. Deshalb gibt es einen offenen Ball um y der nur solche Elemente enthält. Für ein z aus diesem Ball wählen wir eine glatte Familie $(r_t)_{t\in[0,1]}$ von Rotationen von $\mathbb{R}^{n+1}$, die auf $t \in [0, \epsilon)$ konstant gleich der Identität sind, auf $t \in (1-\epsilon, 1]$ konstant gleich einer Rotation, die y auf z abbildet, und y für alle $t \in [0, 1)$ nur auf Punkte auf dem Großkreis durch y und z, also innerhalb der Balles abbildet. Für die glatte Homotopie $F(t, x) = r_t \circ f(x)$ ist z ein regulärer Wert, und $F^{-1}[\{z\}]$ ein Kobordimus der gerahmten Untermannigfaltigkeit $f^{-1}[\{z\}]$ auf $f^{-1}[\{y\}]$. Also sind diese Pontryaginmannigfaltigkeiten kobordant.
3. Wenn f und g zwei glatt homotope glatte Abbildungen von X nach $\mathbb{S}^n$ sind, dann wählen wir eine Homotopie F von f nach g, die auf $t \in [0, \epsilon)$ konstant gleich f ist und auf $t \in (1 - \epsilon, 1]$ konstant gleich g. Für ein y, das weder zu $\{f(x) \mid x \in X \text{ mit } \mathrm{Rang}(T_x(f)) < n\}$ noch zu $\{g(x) \mid x \in X \text{ mit } \mathrm{Rang}(T_x(g)) < n\}$ gehört, gibt

es wegen dem Satz von Sard ein z in jeder kleinen Umgebung von y, das nicht zu $\{F(x,t) \mid (x,t) \in X \times [0,1] \text{ mit } \mathrm{Rang}(T_{(x,t)}(F)) < n\}$ gehört. Dann ist $F^{-1}[\{z\}]$ ein Kobordimus von $f^{-1}[\{z\}]$ nach $g^{-1}[\{z\}]$. Wegen **2.** sind dann $f^{-1}[\{y\}]$ und $g^{-1}[\{y\}$ kobordant.

Beweis von A: Für zwei y, z die nicht zu $\{f(x) \mid x \in X \text{ mit } \mathrm{Rang}(T_x(f) < n\}$ gehören, wählen wir eine glatte Isotopie von $\mathbb{1}_{\mathbb{S}^n}$ zu einer Rotation, die y auf z abbildet. Dann sind $f^{-1}[\{y\}]$ und $f^{-1}[\{z\}]$ wegen **3.** kobordant.

Beweis von C: Sei $Y \subset X$ eine $m-n$ dimensionale kompakte gerahmte Untermannigfaltigkeit ohne Rand. Dann besitzt wegen Satz 1.45 eine offenen Umgebung von $Y \subset X$ einen Atlas von Karten, die jeweils Y auf $\mathbb{R}^{m-n} \subset \mathbb{R}^m$ abbilden. Wenn wir die Basen von $\mathbb{R}^m$ mit den invertierbaren $m \times m$ Matrizen, und damit mit Diffeomorphismen vom $\mathbb{R}^m$ identifizieren, dann entspricht der Rahmen von Y in den Koordinaten dieser Karten einer glatte Abbildung von Y in die linearen Diffeomorphismen von $\mathbb{R}^n$. Eine solche Abbildung induziert auch einen Diffeomorphismus von $Y \times \mathbb{R}^n$, der auf $Y \times \{0\}$ gleich der Identität ist. Die Verkettung der Karten mit diesem Difeeomorphismus definiert dann auf einer Umgebung einer $(m-n)$–dimensionalen gerahmten Untermannigfaltigkeit Y von X einen Atlas von Karten von X, die Y auf $\mathbb{R}^{m-n}$ und auf Y den Rahmen auf die Einsformen $dx_{m-n+1}, \ldots, dx_m$ abbilden. Mit einer Zerlegung der Eins erhalten wir dann einen Diffeomorphismus von dem kartesischen Produkt von Y mit einem Ball $B(0,\epsilon) \subset \mathbb{R}^n$ auf eine offene Untermannigfaltigkeit von X, dessen Einschränkung auf $Y \times \{0\}$ die Identität von Y ist, so dass der Rahmen durch die Koordinateneinsformen von $\mathbb{R}^n$ gegeben ist. Die Verkettung mit dem Diffeomorphismus $x \mapsto \frac{\epsilon^2 x}{\epsilon^2 - \|x\|^2}$ von $B(0,\epsilon)$ nach $\mathbb{R}^n$ ergibt einen Diffeomorphismus Φ von $Y \times \mathbb{R}^n$ auf eine offenen Untermannigfaltigkeit V von X, der die gerahmte Untermannigfaltigkeit $Y \times \{0\}$ auf Y abbildet. Dann gibt es eine eindeutige glatte Abbildung $g : V \to \mathbb{R}^n$ mit $g(\Phi(y,t)) = t$ für alle $(y,t) \in Y \times \mathbb{R}^n$. Sei h eine glatte Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{S}^n$, die die Punkte außerhalb von $B(0,1)$ auf einen Punkt $y \in \mathbb{S}^n$ abbildet, und $B(0,1)$ glatt auf $\mathbb{S}^n \setminus \{y\}$ immersiert. Dann ist Y die Pontryaginmannigfaltigkeit $f^{-1}[\{y\}]$ von $f = h \circ g$.

4. Seien $f, g : X \to \mathbb{S}^n$ zwei glatte Abbildungen und y kein Element von $\{f(x) \mid x \in X \text{ mit } \mathrm{Rang}(T_x(f)) < n\}$ und $\{g(x) \mid x \in X \text{ mit } \mathrm{Rang}(T_x(g)) < n\}$ mit $Y = f^{-1}[\{y\}] = g^{-1}[\{y\}]$. Für eine Basis von $T_y\mathbb{S}^n$ sind dann die entsprechenden Rahmen genau dann gleich, wenn $T_x(f) = T_x(g)$ für alle $x \in f^{-1}[\{y\}]$ gilt. Wir zeigen in diesem Fall, dass f glatt homotop zu einer Abbildung $X \to \mathbb{S}^n$ ist, die auf einer Umgebung von Y mit g übereinstimmt. Dazu wählen wir wieder einen Diffeomorphismus Φ von $Y \times \mathbb{R}^n$ auf eine offene Umgebung von $Y \subset X$, die die gerahmte Untermannigfaltigkeiten Y auf sich selber abbildet. Wir können dabei das Bild von Φ so klein wählen, dass sowohl f als auch g das Bild von Φ in das Komplement von $-y \in \mathbb{S}^n$ abbilden. Die Verkettung einer Rotation mit der stereographischen Projektion ist dann ein Diffeomorphismus Ψ von $\mathbb{S}^n \setminus \{-y\}$ nach $\mathbb{R}^n$, die y auf 0 abbildet. Die beiden Abbildungen $\tilde{f} = \Psi \circ f \circ \Phi$

und $\tilde{g} = \Psi \circ g \circ \Phi$ sind glatte Abbildungen von $Y \times \mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^n$, die $Y \times \{0\}$ auf 0 abbilden, und deren Ableitungen auf $Y \times \{0\}$ übereinstimmen. Dann genügt es zu zeigen, dass $\tilde{f}$ glatt homotop zu einer Abbildung $Y \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist, die auf $Y \times B(0,1)$ mit $\tilde{g}$ übereinstimmt, und auf $Y \times (\mathbb{R}^n \setminus B(0,2))$ mit $\tilde{f}$ übereintimmt. Sei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion, die auf $[0,1]$ gleich Null ist und auf $[2,\infty)$ gleich Eins. Dann ist

$$F((x,s),t) = (1-t)\tilde{f}(x,s) + t(h(\|s\|)\tilde{f}(x,s) + (1-h(\|s\|))\tilde{g}(x,s))$$

eine glatte Homotopie von $\tilde{f}$ auf eine solche Funktion von $Y \times \mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^n$.
5. Seien $f, g : X \to \mathbb{S}^n$ zwei glatte Abbildungen und y kein Element von $\{f(x) \mid x \in X \text{ mit } \mathrm{Rang}(T_x(f)) < n\}$ und $\{g(x) \mid x \in X \text{ mit } \mathrm{Rang}(T_x(g)) < n\}$ mit $Y = f^{-1}[\{y\}] = g^{-1}[\{y\}]$, so dass f und g auf offenen Umgebungen von $Y \subset X$ übereinstimmen. Die Verkettung einer Rotation mit der stereographischen Projektion ist ein Diffeomorphismus Ψ von $\mathbb{S}^n \setminus \{y\}$ nach $\mathbb{R}^n$. Dann sind $\tilde{f} = \Psi \circ f$ und $\tilde{g} = \Psi \circ g$ glatte Abbildungen von $X \setminus Y$ nach $\mathbb{R}^n$. Weil f und g auf einer Umgebung von $Y \subset X$ übereinstimmen, ist folgende Abbildung eine glatte Homotopie von f nach g

$$F(x,t) = \Psi^{-1}((1-t)\tilde{f}(x) + t\tilde{g}(x)).$$

Beweis von B: Wenn f und g glatt homotop sind, dann zeigt **3.**, dass die entsprechenden Pontryaginmannigfaltigkeiten kobordant sind. Wenn umgekehrt zwei gerahmte Untermannigfaltigkeiten von X kobordant sind, dann definiert die Konstruktion in dem **Beweis von C** für die entsprechende gerahmte Untermannigfaltigkeit von $X \times [0,1]$ mit Rand eine glatte Homotopie von einer Abbildung $\tilde{f}$ auf eine Abbildung $\tilde{g}$, deren Pontryaginmannigfaltigkeiten mit denen von f bzw. g übereintimmen. Aus **4.** und **5.** folgt, dass f und $\tilde{f}$ bzw. g und $\tilde{g}$ und damit f und g glatt homotop sind. **q.e.d.**

Ein analoger Satz gilt auch für Mannigfaltigkeiten X mit Rand. In diesem Fall wird zusätzlich gefordert, dass der Rand auf einen fest gewählten Basispunkt von $\mathbb{S}^n$ abgebildet wird.

Mit Hilfe dieses Satzes lassen sich einige Aussagen über die Homotopiegruppen von Mannigfaltigkeiten treffen, deren Elemente gerade die Homotopieklassen von Abbildungen nach $\mathbb{S}^n$ sind. Das führt nur in einigen Fällen zu einem befriedigenden Verständnis der Homotopiegruppen. Im Fall $\dim X = n$ bestehen die Pontryaginmannigfaltigkeiten nur aus endlich vielen Punkten mit einem Vorzeichen. Zwei solche endliche Teilmengen sind genau dann kobordant, wenn die Summe der Vorzeichen gleich ist.

Satz von Hopf 4.24. *Auf einer n–dimensionalen kompakten orientierten Mannigfaltigkeit X sind zwei glatte Abbildungen $f, g : X \to \mathbb{S}^n$ genau dann glatt homotop, wenn die Grade aus Satz 4.15 gleich sind.* **q.e.d.**

Daraus läßt sich mithilfe der Theorie der Überlagerungen auch folgern, dass auf kompakten n–dimensionalen nichtorientierbaren Mannigfaltigkeiten zwei glatte Abbildungen genau dann glatt homotop sind, wenn die Grade aus Satz 4.11 gleich sind.