Kapitel 3

Differentialformen

3.1 Multilineare Algebra

Definition 3.1. *Seien* $V_1, \ldots, V_n$ *und* W *Vektorräume über* $\mathbb{K}$*. Dann heißt eine Abbildung* $A : V_1 \times \ldots \times V_n \to W$ n*–linear wenn für alle* $i = 1, \ldots, n$ *gilt*

$$A((x_1, \ldots, x_n)) + A((x_1, \ldots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)) = A((x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + y_i, x_{i+1}, x_n))$$

$$A((x_1, \ldots, x_{i-1}, \lambda x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)) = \lambda A((x_1, \ldots, x_n)).$$

Durch die punktweise Addition und Skalarmultiplikation wird der Raum aller n*–linearen Abbildungen von* $V_1 \times \ldots \times V_n$ *nach* W *offenbar zu einem Vektorraum. Wenn* $V_1, \ldots, V_n$ *und* W *normierte Vektorräume sind, dann besitzt der Vektorraum aller* n*–linearen Abbildungen von* $V_1 \times \ldots \times V_n$ *nach* W *folgende Norm:*

$$\| A \| = \sup\{\| A((x_1, \ldots, x_n)) \| \mid \| x_1 \| \leq 1, \ldots, \| x_n \| \leq 1\}$$

Der entsprechende normierte Vektorraum wird mit $\mathcal{L}(V_1, \ldots, V_n; W)$ *bezeichnet.*

Definition 3.2. *Seien* $V_1, \ldots, V_n$ *endlichdimensionale normierte Vektorräume (oder reflexive Banachräume) über* $\mathbb{K}$*. Dann ist das Tensorprodukt* $V_1' \otimes \ldots \otimes V_n'$ *definiert als*

$$V_1' \otimes \ldots \otimes V_n' = \mathcal{L}(V_1, \ldots, V_n; \mathbb{K}).$$

Seien $(A_1, \ldots, A_n) \in V_1' \times \ldots \times V_n'$ *entsprechende Elemente. Dann bezeichnen wir mit* $A_1 \otimes \ldots \otimes A_n$ *das Element von* $V_1' \otimes \ldots \otimes V_n'$ *mit*

$$A_1 \otimes \ldots \otimes A_n : V_1 \times \ldots \times V_n \to \mathbb{K}, \quad (v_1, \ldots, v_n) \mapsto A_1(v_1) \cdots A_n(v_n).$$

Die Elemente dieser Form werden kohärente Vektoren genannt.

Für endlichdimensionale $V_1, \ldots, V_n$ ist die Lineare Hülle der kohärenten Vektoren von $V_1' \otimes \ldots \otimes V_n'$ das ganze Tensorprodukt. Im Tensorprodukt mit einem unendlichdimensionalen Vektorraum liegt die lineare Hülle der kohärenten Vektoren nur dicht. Im Folgenden werden wir des öfteren lineare Abbildungen auf Tensorprodukten dadurch definieren, dass wir sie auf den kohärenten Vektoren festlegen. Wegen der Linearität sind diese Abbildungen dann im endlichdimensionalen Fall eindeutig bestimmt. Im unendlichdimensionalen Fall benötigen wir noch die Stetigkeit der entsprechenden linearen Abbildung. In unseren Anwendungen sind die vorkommenden Vektorräume endlichdimensional, so dass diese Abbildungen durch die Linearität eindeutig bestimmt sind.

Auf dem n–fachen Tensoprodukt $V^{\otimes n}$ eines normierten endlichdimensionalen Vektorraumes V mit sich selber, wirkt die symmetrische Gruppe S_n aller Permutationen von n Elementen. Diese Permutationsgruppe besitzt zwei eindimensionale Darstellungen. Einerseits die triviale Darstellung und andererseits die alternierende Darstellung

$$S_n \to \{1\}, \quad \sigma \mapsto 1 \qquad\qquad S_n \to \{1, -1\}, \quad \sigma \mapsto \operatorname{sgn}(\sigma),$$

wobei $\operatorname{sgn}(\sigma)$ gleich ± 1 ist je nachdem ob sich σ schreiben lässt als das Produkt einer geraden oder ungeraden Anzahl von Transpositionen. Entsprechend enthält $V^{\otimes n}$ zwei lineare Unterräume, nämlich aller Vektoren, die sich unter der Wirkung der Permutationsgruppe S_n wie die triviale bzw. die alternierende Darstellung transformieren.

Definition 3.3. *Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum. Dann wirkt für alle $n \in \mathbb{N}$ die Permutationsgruppe S_n auf $V'^{\otimes n}$ durch*

$$A \mapsto \sigma.A \textit{ mit } \quad \sigma.A : V^n \to \mathbb{K} \quad (v_1, \ldots, v_n) \mapsto A\left(v_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, v_{\sigma^{-1}(n)}\right)$$

für alle $A \in V'^{\otimes n}$ und $\sigma \in S_n$. Auf den kohärenten Vektoren wirkt $\sigma \in S_n$ dann wie

$$\begin{aligned}\sigma.(A_1 \otimes \ldots \otimes A_n)(v_1, \ldots, v_n) &= A_1(v_{\sigma^{-1}(1)}) \cdots A_n(v_{\sigma^{-1}(n)}) = \\ &= A_{\sigma(1)}(v_1) \cdots A_{\sigma(n)}(v_n) = (A_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes A_{\sigma(n)})(v_1, \ldots, v_n) \textit{ für } (v_1, \ldots, v_n) \in V^n.\end{aligned}$$

Die symmetrischen und antisymmetrischen Tensorprodukte sind definiert als

$$S^n V' = \{A \in V'^{\otimes n} | \sigma.A = A \textit{ für alle } \sigma \in S_n\}$$

$$\bigwedge^n V' = \{A \in V'^{\otimes n} | \sigma.A = \operatorname{sgn}(\sigma) A \textit{ für alle } \sigma \in S_n\}.$$

Mit SV' und $\bigwedge V'$ bezeichnen wir die direkten Summen

$$SV' = \bigoplus_{n=0}^{\infty} S^n V' \quad \textit{und} \quad \bigwedge V' = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \bigwedge^n V'.$$

Dabei bezeichnet $S^0 V' = \mathbb{K}$ und $\bigwedge^0 V' = \mathbb{K}$ im Tensorprodukt $V'^{\otimes 0} = \mathbb{K}$.

Satz 3.4. *Sei V ein n–dimensionaler $\mathbb{K}$–Vektorraum. Dann gibt es lineare Abbildungen*

$$\bigwedge^p V' \times \bigwedge^q V' \to \bigwedge^{p+q} V', \quad (A,B) \mapsto A \wedge B$$

so dass $\bigwedge V'$ zu einer distributiven $\mathbb{K}$–Algebra wird. In dieser Algebra gilt

$$B \wedge A = (-1)^{pq} A \wedge B \text{ für alle } A \in \bigwedge^p V' \text{ und } B \in \bigwedge^q V'.$$

Für alle $p = 0, \ldots, n$ haben sie die Dimensionen $\dim \bigwedge^p V' = \binom{n}{p}$ und $\dim \bigwedge V' = 2^n$.

Beweis: Wir definieren die Abbildung

$$\bigwedge^p V' \times \bigwedge^q V' \to \bigwedge^{p+q} V', \quad (A,B) \mapsto A \wedge B = \frac{1}{p!q!} \mathcal{A}^{p+q}(A \otimes B)$$

mit

$$\mathcal{A}^{p+q}(A \otimes B) = \sum_{\sigma \in S_{p+q}} \operatorname{sgn}(\sigma)\sigma.(A \otimes B).$$

Dann gilt $\mathcal{A}^p(A) = p!A$ für alle $A \in \bigwedge^p V'$ und $\frac{1}{p!}\mathcal{A}^p : V'^{\otimes p} \to \bigwedge^p V'$ mit $A \mapsto \frac{1}{p!}\mathcal{A}^p(A)$ ist eine Projektion von $V'^{\otimes p}$ auf dem Unterraum $\bigwedge^p V' \subset V'^{\otimes p}$. Offenbar gilt

$$\mathcal{A}^{p+q}(\mathcal{A}^p(A) \otimes B) = \sum_{\sigma \in S_p} \operatorname{sgn}(\sigma)\, \mathcal{A}^{p+q}(\sigma.A \otimes B) = \sum_{\sigma \in S_p} \mathcal{A}^{p+q}(A \otimes B) = p!\, \mathcal{A}^{p+q}(A \otimes B)$$

$$\mathcal{A}^{p+q}(A \otimes \mathcal{A}^q(B)) = \sum_{\sigma \in S_q} \operatorname{sgn}(\sigma)\, \mathcal{A}^{p+q}(A \otimes \sigma.B) = \sum_{\sigma \in S_q} \mathcal{A}^{p+q}(A \otimes B) = q!\, \mathcal{A}^{p+q}(A \otimes B)$$

für alle $A \in V'^{\otimes p}$, $B \in V'^{\otimes q}$. Daraus folgt für alle $A \in \bigwedge^p V'$, $B \in \bigwedge^q V'$ und $C \in \bigwedge^r V'$

$$\begin{aligned} C \wedge (B \wedge A) &= \frac{1}{(p+q)!r!} \mathcal{A}^{p+q+r}\left(C \otimes \frac{1}{p!q!} \mathcal{A}^{p+q}(B \otimes A)\right) = \frac{1}{r!p!q!} \mathcal{A}^{p+q+r}(C \otimes B \otimes A) \\ &= \frac{1}{(q+r)!p!} \mathcal{A}^{p+q+r}\left(\frac{1}{q!r!} \mathcal{A}^{q+r}(C \otimes B) \otimes A\right) = (C \wedge B) \wedge A. \end{aligned}$$

Also ist $\wedge$ ein assoziatives Produkt. Induktiv in n folgt für alle $A_1, \ldots, A_n \in V'$

$$\begin{aligned} A_1 \wedge \ldots \wedge A_n &= \tfrac{1}{(n-1)!1!} \mathcal{A}^n \left((A_1 \wedge \ldots \wedge A_{n-1})) \otimes A_n\right) \\ &= \tfrac{1}{(n-1)!} \mathcal{A}^n \left(\mathcal{A}^{n-1}(A_1 \otimes \ldots \otimes A_{n-1}) \otimes A_n\right) = \mathcal{A}^n(A_1 \otimes \ldots \otimes A_n). \end{aligned}$$

Die Distributivität folgt aus der Bilinearität der Abbildung

$$\wedge : \bigwedge^p V' \times \bigwedge^q V' \to \bigwedge^{p+q} V', \quad (A, B) \mapsto A \wedge B.$$

Für alle $p, q \in N$ hat folgende Permutation

$$(1, \ldots, p+q) \to (p+1, \ldots, p+q, 1, \ldots, p)$$

die Signatur $(-1)^{pq}$ weil sie aus pq–Transpositionen zusammengesetzt werden kann. Dann folgt für alle $A \in \bigwedge^p V'$ und $B \in \bigwedge^q V'$

$$B \wedge A = \frac{1}{p!q!}\mathcal{A}(B \otimes A) = (-1)^{pq}\frac{1}{p!q!}\mathcal{A}(A \otimes B) = (-1)^{pq} A \wedge B.$$

Sei $E_1, \ldots, E_n$ eine Basis von V'. Dann gilt offenbar

$$E_{i_1} \wedge \ldots \wedge E_{i_p} = \operatorname{sgn}(\sigma) E_{i_{\sigma(1)}} \wedge \ldots \wedge E_{i_{\sigma(p)}} \quad \text{für alle } \sigma \in S_p.$$

Wenn zwei Indizes gleich sind, dann gibt es eine Transposition, unter der dieses äußere Produkt das Vorzeichen wechselt. Deshalb ist das Produkt $E_{i_1} \wedge \ldots \wedge E_{i_p}$ nur dann ungleich Null, wenn die Indizes $i_1, \ldots, i_p$ paarweise verschieden sind. Also bilden $E_{i_1} \wedge \ldots \wedge E_{i_p}$ mit $i_1 < \ldots < i_p$ eine Basis von $\bigwedge^p V'$. Die Anzahl solcher äußeren Produkte ist gleich $\binom{n}{p} = \dim \bigwedge^p V'$. Mit $\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} = (1+1)^n = 2^n$ folgt $\dim \bigwedge V' = 2^n$. **q.e.d.**

Satz 3.5. *Seien $A_1, \ldots, A_p \in \mathcal{L}(V; W)$ lineare Abbildungen zwischen den endlichdimensionalen normierten $\mathbb{K}$–Vektorräume V und W. Dann definiert*

$$A_1' \otimes \ldots \otimes A_p' : W'^{\otimes p} \to V'^{\otimes p}, \quad B \to B \circ (A_1 \times \ldots \times A_p)$$

eine lineare Abbildung von $W'^{\otimes p}$ nach $V'^{\otimes p}$. Für $A = A_1 = \ldots = A_p$ bildet diese Abbildung $S^p W'$ auf $S^p V'$ und $\bigwedge^p W'$ auf $\bigwedge^p V'$ ab. Die entsprechende Abbildung $\bigwedge A' : \bigwedge W' \to \bigwedge V'$ ist ein Algebrahomomorphismus bezüglich des äußeren Produktes.

Beweis: $A_1' \otimes \ldots \otimes A_p'$ bildet $W'^{\otimes p}$ nach $V'^{\otimes p}$ ab und ist linear. Für $A \in \mathcal{L}(V, W)$ gilt

$$A'^{\otimes p+q}(B \otimes C) = A'^{\otimes p}(B) \otimes A'^{\otimes q}(C) \qquad \text{für alle } B \in W'^{\otimes p} \text{ und } C \in W'^{\otimes q}.$$

Außerdem ist die Abbildung $A'^{\otimes p}$ verträglich mit der Wirkung der Permutationsgruppe:

$$A'^{\otimes p}(\sigma.B) = \sigma.(A'^{\otimes p}(B)) \text{ für alle } B \in W'^{\otimes p} \text{ und } \sigma \in S_p.$$

Daraus folgt, dass $A'^{\otimes p}$ sowohl $S^p W'$ auf $S^p V'$ abbildet, als auch $\bigwedge^p W'$ auf $\bigwedge^p V'$. Zuletzt folgt auch, dass $A'^{\otimes p}$ mit $\mathcal{A}^p$ vertauscht, und deshalb

$$A'^{\otimes (p+q)}(B \wedge C) = A'^{\otimes p}(B) \wedge A'^{\otimes q}(C)$$

für alle $B \in \bigwedge^p W'$ und $C \in \bigwedge^q W'$ gilt. **q.e.d.**

Für die symmetrische Algebra $SV' = \bigoplus_{p=0}^{\infty} S^pV'$ gilt eine analoge Aussage zu Satz 3.4:

$$A_1 \cdots A_p = \sum_{\sigma \in S_p} \sigma.(A_1 \otimes \ldots \otimes A_p) \text{ für alle } A_1, \ldots, A_p \in V'.$$

Eine Basis von S^pV' bilden dann $E_{i_1} \cdots E_{i_p}$. Seine Dimension ist gleich der Anzahl der Möglichkeiten p Elemente aus $1, \ldots, n$ mit Wiederholung und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge auszuwählen. Wenn wir die Elemente einer solchen Auswahl der Größe nach anordnen, dann ist jede Auswahl eindeutig beschrieben, durch die Angabe, an welcher Stelle wir jeweils zu größeren Elementen von $\{1, \ldots, n\}$ übergehen, also zu der Anzahl $\binom{n-1+p}{n-1} = \binom{n+p-1}{p}$ aus einer Menge mit $n - 1 + p$ verschiednen Elementen ohne Wiederholung und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge $n - 1$ Elementen auszuwählen. Diese Dimension wächst also mit p an und SV' ist unendlichdimensional. Diese Algebra lässt sich mit dem Raum der Polynome auf V identifizieren. Im Folgenden benutzen wir nur die endlichdimensionale antisymmetrische Algebra.

3.2 Tensorfelder

Auf einem endlichdimensionalen Vektorraum V definiert jedes $v \in V$ das Element $A \mapsto A(v)$ von V''. Die entsprechende Abbildung von V nach V'' ist ein isometrischer Isomorphismus. Wir definieren das Tensorprodukt $V^{\otimes p}$ als $\mathcal{L}(V', \ldots, V'; \mathbb{K})$. Es enthält eine Basis von kohärenten Vektoren $v_1 \otimes \ldots \otimes v_p$ mit $v_1, \ldots, v_p \in V$. Für $A \in \mathcal{L}(V, W)$ wird dann A'' auf natürliche Weise mit A identifiziert: $A''(v)(B) = B(A(v)) = A(v)(B)$.

Wir definieren jetzt auf jeder differenzierbaren Mannigfaltigkeit X und alle $p, q \in \mathbb{N}_0$ ein Vektorbündel T^q_pX. Indem wir die zusammenhängenden Komponenten einzeln betrachten, können wir annehmen, dass X die Dimension n hat. Sei also F der Vektorraum $(\mathbb{R}^n)'^{\otimes q} \otimes (\mathbb{R}^n)^{\otimes p}$ und sei $\mathcal{U}$ eine Überdeckung von X durch die Definitionsbreiche von Karten $\phi_U : U \to \mathbb{R}^n$. Für $U, V \in \mathcal{U}$ und $x \in U \cap V$ sind die Abbildungen

$$T'_{\phi_U(x)}(\phi_U \circ \phi_V^{-1}) : T'_{\phi_U(x)}\mathbb{R}^n \to T'_{\phi_V(x)}\mathbb{R}^n, \quad T_{\phi_U(x)}(\phi_V \circ \phi_U^{-1}) : T_{\phi_U(x)}\mathbb{R}^n \to T_{\phi_V(x)}\mathbb{R}^n$$

Elemente von $GL(\mathbb{R}^n)$. Wir definieren eine entsprechende Abbildung in $GL(F)$ durch

$$\Phi_{V,U}(x) = T'_{\phi_U(x)}(\phi_U \circ \phi_V^{-1})^{\otimes q} \otimes T_{\phi_U(x)}(\phi_V \circ \phi_U^{-1})^{\otimes p}.$$

Die rechten p Faktoren sind dabei genau die Werte der Kozykel des Tangentialbündels und die linken q Faktoren die Kozykel des Kotangentialbündles. Weil beide einzeln die Kozykelbedingung erfüllen, gilt das auch für $\Phi_{V,U}$.

Definition 3.6. *Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension n. Dann sei T^q_pX das durch die Kozykel $\Phi_{V,U}$ definierte Vektorraumbündel. Insbesondere ist $T^0_1X = TX$ das Tangentialbündle und $T^1_0X = T'X$ das Kotangentialbündel. Die Fasern von T^q_pX bzw. $T'X$ über einem Punkt $x \in X$ bezeichnen wir mit $T^q_{p,x}X$ bzw. T'_xX.*

Schnitte der Vektorraumbündel T^q_pX nennen wir Tensorfelder. Wir können die Lie-Ableitung auf solchen Tensorfeldern definieren.

Definition 3.7. *Sei $f : X \to T^q_pX$ ein differenzierbares Tensorfeld auf der differenzierbaren Mannigfaltigkeit X und $F \in \mathrm{Vec}^1(X)$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf X. Dann sind für kleine t $\psi_F(t,\cdot)$ und $\psi_F(-t,\cdot)$ lokal stetig differenzierbare Homöomorphismen von X. Wir definieren die Lie-Ableitung von f an der Stelle $x \in X$ als*

$$(\theta_F\, f)(x) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \big(T'_{\psi_F(t,x)}(\psi_F(t,\cdot))\big)^{\otimes q} \otimes \big(T_{\psi_F(t,x)}(\psi_F(-t,\cdot))\big)^{\otimes p} f(\psi_F(t,x)).$$

Hierbei ist zu beachten, dass die Abbildungen

$$\begin{aligned} T_{\psi_F(t,x)}(\psi_F(-t,\cdot)) :&\quad T_{\psi_F(t,x)}X \to T_xX \\ T'_{\psi_F(t,x)}(\psi_F(t,\cdot)) :&\quad T'_{\psi_F(t,x)}X \to T'_xX \quad \text{wegen} \quad T_x(\psi_F(t,\cdot)) : \quad T_xX \to T_{\psi_F(t,x)}X \end{aligned}$$

zusammen eine Abbildung

$$\big(T'_{\psi_F(t,x)}(\psi_F(t,\cdot))\big)^{\otimes q} \otimes \big(T_{\psi_F(t,x)}(\psi_F(-t,\cdot))\big)^{\otimes p} : T^q_{p,\psi_F(t,x)}X \to T^q_{p,x}X$$

induzieren. Deshalb ist die Ableitung auf der rechten Seite die Ableitung einer differenzierbaren Funktion von $t \in (-\epsilon,\epsilon)$ nach $T^q_{p,x}X$. Weil dieser Raum ein normierter Vektorraum ist, ist die entsprechende Ableitung wohl definiert.

Definition 3.8. *(Verjüngung): Sei $p, q \in \mathbb{N}$. Dann induzieren für jedes $i = 1,\dots,p$ und jedes $j = 1,\dots,q$ die Abbildungen*

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : T'_xX \otimes T_xX \to \mathbb{R}, \quad u \otimes v \mapsto \langle u, v\rangle$$

einen Verjüngungsmorphismus i^j_i von dem Vektorraumbündel T^q_pX auf das Vektorraumbündel $T^{q-1}_{p-1}X$. Hierbei bezeichnet $\langle u,v\rangle$ die Auswertung der Elemente von T'_xX auf den Elementen von T_xX. Wenn $f_1,\dots,f_p$ Vektorfelder sind, und $g_1,\dots,g_q$ Schnitte von dem Kotangentialbündel, dann wirkt i^j_i auf $g_1 \otimes \ldots \otimes g_q \otimes f_1 \otimes \ldots \otimes f_p$ wie

$$i^j_i(g_1 \otimes \ldots \otimes g_q \otimes f_1 \otimes \ldots \otimes f_p) = \langle g_j, f_i\rangle g_1 \otimes \ldots \hat{g}_j \ldots \otimes g_q \otimes f_1 \otimes \ldots \hat{f}_i \ldots \otimes f_p.$$

Hierbei ist $\langle g_j, f_i\rangle$ die Funktion $x \mapsto \langle g_j(x), f_i(x)\rangle$ auf X und $\hat{}$ beduetet, dass der entsprechende Faktor in dem Tensorprodukt weggelassen wird.

Satz 3.9. *Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Dann gilt*

(i) *Seien $i < j$ zwei verschiedene Indizes in $\{1, \ldots, p\}$ und $k < l$ zwei verschiedene Indizes in $\{1, \ldots, q\}$. Dann vertauschen die folgenden Verjüngungsmorphismen:*

$$\begin{array}{ccc} T_p^q X & \xrightarrow{i_i^k} & T_{p-1}^{q-1} X \\ i_j^l \downarrow & & \downarrow i_{j-1}^{l-1} \\ T_{p-1}^{q-1} X & \xrightarrow{i_i^k} & T_{p-2}^{q-2} X \end{array} \qquad \textit{bzw.} \qquad \begin{array}{ccc} T_p^q X & \xrightarrow{i_i^l} & T_{p-1}^{q-1} X \\ i_j^k \downarrow & & \downarrow i_{j-1}^k \\ T_{p-1}^{q-1} X & \xrightarrow{i_i^{l-1}} & T_{p-2}^{q-2} X \end{array} .$$

(ii) *Die Lie-Ableitung θ_F vertauscht mit allen Verjüngungsmorphismen i_i^j mit $i = 1, \ldots, p$ und $j = 1, \ldots, q$. D.h. für alle differenzierbaren Schnitte f von $T_p^q X$ und alle stetig differenzierbaren Vektorfelder $F \in \mathrm{Vec}^1(X)$ gilt*

$$\theta_F(i_i^j(f)) = i_i^j(\theta_F(f)).$$

(iii) *Sei f ein Schnitt von $T_p^q X$ und g ein Schnitt von $T_r^s X$. Dann gilt*

$$\theta_F(f \otimes g) = \theta_F(f) \otimes g + f \otimes \theta_F(g).$$

Beweis: (i) Seien $F_1, \ldots, F_p$ Vektorfelder von X und $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$ Schnitte des Kotangentialbündels $T'X$ von X. Dann gilt offenbar

$$\begin{aligned} & i_{j-1}^{l-1} \circ i_i^k(\alpha_1 \otimes \ldots \otimes \alpha_q \otimes F_1 \otimes \ldots \otimes F_p) = \\ & \qquad = \langle \alpha_l, F_j \rangle \langle \alpha_k, F_i \rangle \alpha_1 \otimes \ldots \hat{\alpha}_k \ldots \hat{\alpha}_l \ldots \otimes \alpha_q \otimes F_1 \otimes \ldots \hat{F}_i \ldots \hat{F}_j \ldots \otimes F_p \\ & \qquad = i_i^k \circ i_j^l(\alpha_1 \otimes \ldots \otimes \alpha_q \otimes F_1 \otimes \ldots \otimes F_p). \end{aligned}$$

Hierbei sind $\langle \alpha_k, F_i \rangle : x \mapsto \langle \alpha_k(x), F_i(x) \rangle$ und $\langle \alpha_l, F_j \rangle : x \mapsto \langle \alpha_l(x), F_j(x) \rangle$ Funktionen, und $\hat{\cdot}$ bedeutet, dass der entsprechende Faktor weggelassen wird. Genauso gilt auch

$$\begin{aligned} & i_{j-1}^{k} \circ i_i^l(\alpha_1 \otimes \ldots \otimes \alpha_q \otimes F_1 \otimes \ldots \otimes F_p) = \\ & \qquad = \langle \alpha_k, F_j \rangle \langle \alpha_l, F_i \rangle \alpha_1 \otimes \ldots \hat{\alpha}_k \ldots \hat{\alpha}_l \ldots \otimes \alpha_q \otimes F_1 \otimes \ldots \hat{F}_i \ldots \hat{F}_j \ldots \otimes F_p \\ & \qquad = i_i^{l-1} \circ i_j^k(\alpha_1 \otimes \ldots \otimes \alpha_q \otimes F_1 \otimes \ldots \otimes F_p). \end{aligned}$$

(ii) Sei $\phi : X \to Y$ ein Diffeomorphismus zwischen den differenzierbaren Mannigfaltigkeiten X und Y. Dann definieren wir die Abbildung,

$$T_p^q(\Phi) : T_p^q Y \to T_p^q X$$

die faserweise gegeben ist durch

$$(T'_{\Phi(x)}(\Phi)^{\otimes q} \otimes T_{\Phi(x)}(\Phi^{-1})^{\otimes p} : T^q_{p,\Phi(x)}Y \to T^q_{p,x}X \quad \text{für alle } x \in X.$$

Dabei ist

$$\begin{array}{rlcll} T_{\Phi(x)}(\Phi^{-1}): & T_{\Phi(x)}Y \to T_xX & & & \\ T'_{\Phi(x)}(\Phi): & T'_{\Phi(x)}Y \to T'_xX & \text{wegen} & T_x(\Phi): & T_xX \to T_{\Phi(x)}Y \end{array}$$

Dann kommutiert folgendes Diagramm, weil für $u \in T'_{\Phi(x)}Y$ und $v \in T_\Phi(x)Y$ auch $\langle T'_{\Phi(x)}(\Phi)u, T_{\Phi(x)}(\Phi^{-1})v\rangle = \langle u, T_x(\Phi) \circ T_{\Phi(x)}(\Phi^{-1})v\rangle = \langle u, v\rangle$ gilt:

$$\begin{array}{ccc} T^q_pY & \xrightarrow{T^q_p(\Phi)} & T^q_pX \\ i^j_i \downarrow & & \downarrow i^j_i \\ T^{q-1}_{p-1}Y & \xrightarrow{T^{q-1}_{p-1}(\Phi)} & T^{q-1}_{p-1}X \end{array}$$

Also ist für jeden Schnitt f von dem Vektorraumbündel $T^q_p(Y)$ die Abbildung $T^q_p(\Phi) \circ f \circ \Phi$ ein Schnitt von dem Vektorraumbündel $T^q_p(X)$ ist und es gilt

$$T^{q-1}_{p-1}(\Phi) \circ i^j_i \circ f \circ \Phi = i^j_i \circ T^q_p(\Phi) \circ f \circ \Phi.$$

Für die lokalen stetig differenzierbaren Homöomorphismen $\psi_F(t,\cdot)$ gilt also auch

$$T^{q-1}_{p-1}(\psi_F(t,\cdot)) \circ i^j_i \circ f \circ \psi_F(t,\cdot) = i^j_i \circ T^q_p(\psi_F(t,\cdot)) \circ f \circ \psi_F(t,\cdot).$$

Indem wir die linke und die rechte Seite nach t differenzieren erhalten wir $\theta_F(i^j_i(f)) =$

$$= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} T^{q-1}_{p-1}(\psi_F(t,\cdot)) \circ i^j_i \circ f \circ \psi_F(t,\cdot) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} i^j_i \circ T^q_p(\psi_F(t,\cdot)) \circ f \circ \psi_F(t,\cdot) = i^j_i(\theta_F(f)).$$

(iii) folgt aus der verallgemeinerten Leibnizregel. **q.e.d.**

Aus (ii) und (iii) folgt für alle Vektorfelder $E, F \in \mathrm{Vec}^1(X)$ und für alle Schnitte α des Kotangentialbündels

$$\theta_F(\langle\alpha, E\rangle) = \langle\theta_F\,\alpha, E\rangle + \langle\alpha, \theta_F\,E\rangle.$$

Daraus folgt

$$\langle\theta_F\,\alpha, E\rangle = \theta_F(\langle\alpha, E\rangle) - \langle\alpha, [F, E]\rangle.$$

Mithilfe von (iii) lassen sich dann die Lie-Ableitungen von beliebigen Tensorprodukten von Vektorfeldern und Schnitten des Kotangentialbündels berechnen.

3.3 Differentialformen

Definition 3.10. *Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Für alle $p \in \mathbb{N}$ sei dann $\bigwedge^p X$ das antisymmetrische Untervektorraumbündel von $T^p X$. Analog sei $\bigwedge X$ die direkte Summe aller Vektorraumbündel $\bigwedge^p X$. Die Schnitte von $\bigwedge^p X$ heißen p–Differentialformen oder nur Differentialformen.*

Das p–fache antisymmetrische Tensorprodukt $\bigwedge^p V'$ des Dualraumes V' eines endlichdimensionalen Vektorraumes V ist ein Unterraum des p–fachen Tensorproduktes $V'^{\otimes p}$ von V' mit sich selber. Deshalb sind die Elemente von $\bigwedge^p V'$ antisymmetrische p–lineare Abbildungen von V^p nach $\mathbb{K}$. Wenn $\alpha \in \bigwedge^p V'$ ein Element dieses p–fachen antisymmetrischen Tensorproduktes ist, und $v_1, \ldots, v_p \in V$ Elemente von V sind, dann können wir α auf $(v_1, \ldots, v_p) \in V^p$ auswerten. Diese Auswertung ist antisymmetrisch in $v_1, \ldots, v_p$. Wir wollen sie folgendermaßen bezeichnen:

$$\langle \alpha, v_1 \otimes \ldots \otimes v_p \rangle.$$

Das heißt insbesondere für Elemente $A_1, \ldots, A_p \in V'$ und Elemente $v_1, \ldots, v_p \in V$:

$$\langle A_1 \wedge \ldots \wedge A_p, v_1 \otimes \ldots \otimes v_p \rangle = \sum_{\sigma \in S_p} \operatorname{sgn}(\sigma) \langle A_{\sigma(1)}, v_1 \rangle \cdots \langle A_{\sigma(p)}, v_p \rangle = \det\big(\langle A_i, v_j \rangle\big).$$

Auf Differentialformen angewendet heißt das, dass für jede r mal stetig differenzierbare p–Differentialform α und Vektorfelder $F_1, \ldots, F_p \in \mathrm{Vec}^r(X)$, die Auswertung der Differentialform α auf dem Schnitt $F_1 \otimes \ldots \otimes F_p$ des Vektorraumbündels $T^0_p X$ eine r mal stetig differenzierbare reelle Funktion in $C^r(X, \mathbb{R})$ ergibt:

$$\langle \alpha, F_1 \otimes \ldots \otimes F_p \rangle \in C^r(X, \mathbb{R}).$$

Definition 3.11. *Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $F \in \mathrm{Vec}(X)$ ein Vektorfeld von X. Für alle $p \in \mathbb{N}$ sei i_F der eindeutig bestimmte Morphismus $i_F : \bigwedge^p X \to \bigwedge^{p-1} X$, der auf p–Differentialformen α wirkt wie*

$$\langle i_F \circ \alpha, F_1 \otimes \ldots \otimes F_{p-1} \rangle = \langle \alpha, F \otimes F_1 \otimes \ldots \otimes F_{p-1} \rangle$$

für alle Vektorfelder $F_1, \ldots, F_{p-1} \in \mathrm{Vec}(X)$.

Wenn X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension n ist, dann ist $\bigwedge^p X$ ein Vektorraumbündel der Dimension $\binom{n}{p}$. Für $p > n$ ist also $\bigwedge^p X$ Null-dimensional und $\bigwedge X$ ist ein Vektorraumbündel der Dimension 2^n. Der Grund, dass wir gerade die antisymmetrischen Untervektorraumbündel von den Tensorprodukten des Kotangentialbündels und nicht von dem Tangentialbündel betrachten, ist dass die entsprechenden

Schnitte, also die Differentialformen, das richtige Transformationsverhalten haben, um sie zu integrieren. Diese Differentialformen werden sich als sehr natürliche Objekte herausstellen. Eine schöne Eigenschaft können wir sofort ablesen: Sie lassen sich unter einer differenzierbaren Abbildung zurückziehen, während sich Vektorfelder nur unter invertierbaren differenzierbaren Abbildungen transformieren lassen.

Satz 3.12. *Seien X und Y differenzierbare Mannigfaltigkeiten und f eine stetig differenzierbare Abbildung von X nach Y. Dann gilt*

(i) *Das faserweise äußere Produkt $\wedge : \bigwedge^p X \times \bigwedge^q X \to \bigwedge^{p+q} X$ macht die Differentialformen von X zu einer assoziativen Algebra mit dem äußeren Produkt*

$$\wedge : (\alpha, \beta) \mapsto \alpha \wedge \beta$$

für alle p–Differentialformen α und q–Differentialformen β mit $p, q \in \mathbb{N}_0$. Hierbei ist $\bigwedge^0 X$ das triviale reelle Linienbündel $\mathbb{R} \times X$ über X. Die 0–Differentialformen bestehen also aus $C(C, \mathbb{R})$ und die Multiplikation mit reellen Funktionen schreiben wir für alle $f \in C(X, \mathbb{R})$ und p–Differentialformen α als $(f, \alpha) \to f\alpha$.

(ii) *Für alle p–Differentialformen α und q–Differentialformen β gilt*

$$\beta \wedge \alpha = (-1)^{pq} \alpha \wedge \beta.$$

(iii) *Für alle $x \in X$ bilden die Abbildungen*

$$\bigwedge^p (T'_{f(x)}(f)) : \qquad \bigwedge_{f(x)}^p Y \to \bigwedge_x^p X \text{ wegen } \qquad T'_{f(x)}(f) : \qquad T'_{f(x)} Y \to T'_x X$$

einen Algebrahomomorphismus von der Algebra $\bigwedge_{f(x)} Y$ in die Algebra $\bigwedge_x X$. Dadurch lassen sich alle p–Differentialformen α auf Y durch f zu p–Differentialformen $f^* \alpha$ auf X zurückziehen mit

$$f^* \alpha = \bigwedge^p (T'(f)) \circ \alpha \circ f.$$

(iv) *f^* ist ein Algebrahomomorphismus von den Differentialformen auf Y auf die Differentialformen auf X, d.h. es gilt*

$$f^*(\alpha \wedge \beta) = f^* \alpha \wedge f^* \beta$$

für alle p–Differentialformen α und q–Differentialformen β von Y.

(v) *Für $F \in \mathrm{Vec}^1(X)$ wirkt die Lie-Ableitung θ_F auf den Differentialformen wie*

$$\theta_F\,\alpha = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \psi_F^*(t,\cdot)\alpha.$$

Diese Lie–Ableitung ist eine Derivation, d.h. es gilt

$$\theta_F(\alpha\wedge\beta) = \theta_F(\alpha)\wedge\beta + \alpha\wedge\theta_F(\beta).$$

für alle p–Differentialformen α und q–Differentialformen β.

(vi) *Für $F \in \mathrm{Vec}(X)$ induziert der Morphismus $i_F : \bigwedge X \to \bigwedge X$ eine Antiderivation auf den Differentialformen, d.h. für alle p–Differentialformen α und alle q–Differentialformen β gilt*

$$i_F(\alpha\wedge\beta) = i_F(\alpha)\wedge\beta + (-1)^p\alpha\wedge i_F(\beta).$$

Außerdem gilt $\qquad i_F \circ i_F = 0.$

(vii) *Seien $E, F \in \mathrm{Vec}^1(X)$. Dann gilt* $\qquad \theta_E \circ i_F - i_F\circ\theta_E = i_{[E,F]}.$

Beweis: (i)–(iv) folgen aus den den Sätzen 3.4–3.5 über antisymmetrische Tensorprodukte im ersten Abschnitt. Wegen Satz 3.9 (iii) gilt für 1–Differentialformen $\alpha_1,\ldots,\alpha_p$

$$\theta_F(\alpha_1\wedge\cdots\wedge\alpha_p) = \sum_{i=1}^p\sum_{\sigma\in S_p}\alpha_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes\theta_F\,\alpha_{\sigma(i)}\otimes\cdots\otimes\alpha_p = \sum_{i=1}^p \alpha_1\wedge\cdots\wedge\theta_F\,\alpha_i\wedge\cdots\wedge\alpha_p.$$

Daraus folgt (v). Zum Beweis von (vi) betrachten wir 1–Differentialformen $\alpha_1,\ldots,\alpha_p$ und Vektorfelder $F_1,\ldots,F_{p-1}$. Dann gilt $\quad \langle i_F(\alpha_1\wedge\ldots\wedge\alpha_p), F_1\otimes\ldots\otimes F_{p-1}\rangle =$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\sigma\in S_p}\mathrm{sgn}(\sigma)\langle\alpha_{\sigma(1)},F\rangle\cdot\langle\alpha_{\sigma(2)},F_1\rangle\cdots\langle\alpha_{\sigma(p)},F_{p-1}\rangle\\
&= \sum_{i=1}^p(-1)^{i-1}\langle\alpha_i,F\rangle\langle\alpha_1\wedge\ldots\wedge\hat{\alpha}_i\wedge\ldots\wedge\alpha_p, F_1\otimes\ldots\otimes F_{p-1}\rangle\\
&= \sum_{i=1}^p(-1)^{i-1}\langle\alpha_1\wedge\ldots\wedge i_F(\alpha_i)\wedge\ldots\wedge\alpha_p, F_1\otimes\ldots\otimes F_{p-1}\rangle.
\end{aligned}$$

Hierbei haben wir jede Permutation $\sigma\in S_p$ zerlegt in die Verkettung $\tau\circ\sigma_i$ einer der Permutationen $\sigma_i : (1,\ldots,p)\mapsto(i,1,\ldots,\hat{i},\ldots,p)$ und einer Permutation $\tau\in S_{p-1}$ der Elemente $\{2,\ldots,p\}$. Die erste Permutation σ_i ist ein Produkt von $(i-1)$ Transpositionen und hat deshalb $\mathrm{sgn}(\sigma_i) = (-1)^{i-1}$. Diese Zerlegung ist eine bijektive Abbildung

$S_p \simeq (S_{p-1})^p$. Daraus folgt, dass i_F eine Antiderivation ist. Weil die Auswertung von p–Differentialformen antisymmetrisch in den Vektorfeldern ist, folgt $i_F \circ i_F = 0$.

Zum Beweis von (vii) zeigen wir zunächst, dass $\theta_E \circ i_F - i_F \circ \theta_E$ eine Antiderivation ist. Sei also α eine p–Differentialform und β eine q–Differentialform. Dann gilt wegen (v) und (vi) $\quad (\theta_E \circ i_F - i_F \circ \theta_E)(\alpha \wedge \beta) =$

$$\begin{aligned} &= \theta_E(i_F(\alpha) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge i_F(\beta)) - i_F(\theta_E(\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge \theta_E(\beta)) \\ &= \theta_E(i_F(\alpha)) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge \theta_E(i_F(\beta)) - i_F(\theta_E(\alpha)) \wedge \beta - (-1)^p \alpha \wedge i_F(\theta_E(\beta)). \end{aligned}$$

Dann genügt es (vii) für differenzierbare 1–Differentialform α zu zeigen. Sei also $F \in \mathrm{Vec}^1(X)$. Dann gilt wegen der Schlussfolgerung nach Satz 3.9

$$\theta_E(i_F(\alpha)) - i_F(\theta_E(\alpha)) = \theta_E\langle \alpha, F\rangle - \langle \theta_E\, \alpha, F\rangle = \langle \alpha, \theta_E\, F\rangle = i_{[E,F]}\alpha. \qquad \textbf{q.e.d.}$$

Die Lie–Ableitung θ_F stimmt wegen Lemma 2.20 auf den 0–Differentialformen mit der vorher definierten Derivation θ_F auf den Funktionen überein.

3.4 Die äußere Ableitung

Definition 3.13. *Für jeden Punkt $x \in X$ einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit und jede differenzierbare reelle Funktion f auf X definiert die lineare Abbildung*

$$df(x) : T_x X \to \mathbb{R}, \quad v \mapsto D_v(f)$$

aus Satz 1.40 ein Element von $T'_x X$. Dadurch wird für jede differenzierbare Funktion f auf X der Gradient df von f zu einem globalen Schnitt von $T'X$:

$$df : X \to T'X \quad \text{mit} \quad \langle df, F\rangle = \theta_F(f) \quad \text{für alle } F \in \mathrm{Vec}(X).$$

Wir wollen $d : f \mapsto df$ zu einer Abbildung auf allen Differentialformen fortsetzen.

Satz 3.14. *Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Dann gibt es für jedes $p \in \mathbb{N}_0$ einen eindeutigen Differentialoperator d von den differenzierbaren p–Differentialformen in die $(p+1)$–Differentialformen mit folgenden Eigenschaften:*

(i) *Für alle differenzierbaren p–Differentialformen α und q–Differentialformen β gilt*

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta.$$

(ii) *Auf differenzierbaren Funktionen f (also $p = 0$) wirkt d wie $f \mapsto df$ (siehe oben).*

(iii) *Für jede zweimal differenzierbare Funktionen f gilt $d(df) = 0$.*

Beweis: Wir werden gleich sehen, dass jede p–Differentialform eine endliche Linearkombination von p–Differentialformen folgender Form ist:

$$\alpha = f dg_1 \wedge \ldots \wedge dg_p.$$

Die Bedingungen (i)-(iii) erzwingen, dass auf solchen p–Differentialformen d wirkt wie

$$d\alpha = df \wedge dg_1 \wedge \ldots dg_p.$$

Also ist der Differentialoperator d durch die Bedingungen (i)-(iii) eindeutig bestimmt.

Um obige Aussage und die Existenz zu beweisen, wählen wir eine Karte $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ von X um einen beliebigen Punkt $x \in U \subset X$. Die Komponenten $\phi_1, \ldots, \phi_n$ sind glatte Funktionen auf U, so dass $d\phi_1(x), \ldots, d\phi_n(x)$ an allen Punkten $x \in U$ eine Basis des Kotangentialraums bilden. Also ist jede p–Differentialform eine endliche Linearkombination von Differentialformen der Form

$$f d\phi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\phi_{i_p} \text{ mit } 1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_p \le n.$$

Für eine differenzierbaren Funktion f ist df auf U folgende Linearkombination:

$$df(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial \phi_i}(\phi(x)) \cdot d\phi_i(x)$$

von $d\phi_1, \ldots, d\phi_n$ (vergleiche Satz 1.40). Dann folgt

$$d(f d\phi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\phi_{i_p}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial \phi_i} \circ \phi \; d\phi_i \wedge d\phi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\phi_{i_p}.$$

Also ist d auf allen p–Differentialformen definiert. Wir müssen noch zeigen, dass (i) und (iii) gelten. Wir zeigen zunächst (iii). Aufgrund der Konstruktion von d gilt

$$\begin{aligned} d(df) &= d \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial \phi_i} \circ \phi \cdot d\phi_i = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2(f \circ \phi^{-1})}{\partial \phi_j \partial \phi_i} \circ \phi \cdot d\phi_j \wedge d\phi_i \\ &= \sum_{1 \le i < j \le n} \frac{\partial^2(f \circ \phi^{-1})}{\partial \phi_j \partial \phi_i} \circ \phi \cdot (d\phi_j \wedge d\phi_i + d\phi_i \wedge d\phi_j) = 0 \end{aligned}$$

Hier haben wir mit dem Schwarz'sche Lemma die Reihenfolge der partiellen Ableitungen vertauscht. Wegen der Linearität genügt es (i) für Differentialformen

$$\alpha = f d\phi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\phi_{i_p} \quad \text{und} \quad \beta = g d\phi_{j_1} \wedge \ldots \wedge d\phi_{j_q}$$

zu zeigen. Für diese gilt

$$\begin{aligned}
\alpha \wedge \beta &= fg d\phi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\phi_{i_p} \wedge d\phi_{j_1} \wedge \ldots \wedge d\phi_{j_q} \\
d(\alpha \wedge \beta) &= (f dg + g df) d\phi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\phi_{i_p} \wedge d\phi_{j_1} \wedge \ldots \wedge d\phi_{j_q} \\
&= (df \wedge d\phi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\phi_{i_p}) \wedge (g d\phi_{j_1} \wedge \ldots \wedge d\phi_{j_q}) \\
&\quad + (-1)^p (f d\phi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\phi_{i_p}) \wedge (dg \wedge d\phi_{j_1} \wedge \ldots \wedge d\phi_{j_q}) \\
&= d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta.
\end{aligned}$$

q.e.d.

Satz 3.15. *Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Dann gilt*

(i) *Für jede zweimal differenzierbare p–Differentialform α gilt $d(d\alpha) = 0$.*

(ii) *Für jede zweimal differenzierbare Abbildung $f : X \to Y$ zwischen den differenzierbaren Mannigfaltigkeiten X und Y und jede differenzierbare p–Differentialform α auf Y ist $f^*\alpha$ eine differenzierbare p–Differentialform auf X und es gilt*

$$d(f^*\alpha) = f^*(d\alpha).$$

(iii) *Für jedes $F \in \mathrm{Vec}^1(X)$ und jede zweimal differenzierbare Funktion g gilt*

$$\theta_F(dg) = d(\theta_F(g))$$

(iv) *Für jedes $F \in \mathrm{Vec}^1(X)$ und jede zweimal differenzierbare p–Differentialform α gilt*

$$\theta_F\, d\alpha = d(\theta_F\, \alpha)$$

(v) *Für jedes $F \in \mathrm{Vec}^1(X)$ und jede differenzierbare p–Differentialform α gilt*

$$\theta_F\, \alpha = (i_F \circ d + d \circ i_F)(\alpha).$$

(vi) *Für jede differenzierbare p–Differentialform α und $F_0, \ldots, F_p \in \mathrm{Vec}^1(X)$ gilt*

$$\begin{aligned}
\langle d\alpha, F_0 \otimes \ldots \otimes F_p \rangle &= \sum_{i=0}^{p} (-1)^i\, \theta_{F_i}(\langle \alpha, F_0 \otimes \ldots \hat{F}_i \ldots \otimes F_p \rangle) \\
&\quad + \sum_{0 \le i < j \le p} (-1)^{i+j} \langle \alpha, [F_i, F_j] \otimes F_0 \otimes \ldots \hat{F}_i \ldots \hat{F}_j \ldots \otimes F_p \rangle.
\end{aligned}$$

Beweis: (i) Sei α wieder wie im Beweis von (i) des vorangehenden Satzes $\alpha = f d\phi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\phi_{i_p}$. Dann gilt wegen (i) und (iii) aus dem vorangehenden Satz

$$\begin{aligned} d(d\alpha) &= d(df \wedge d\phi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\phi_{i_p}) \\ &= d(df) \wedge d\phi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\phi_{i_p} + \sum_{j=1}^{p} (-1)^j df \wedge d\phi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d(d\phi_{i_j}) \wedge \ldots \wedge d\phi_{i_p} = 0. \end{aligned}$$

(ii) Wegen der Kettenregel gilt für alle differenzierbaren Funktionen g auf Y

$$d(f^*g) = d(g \circ f) = T'(f) \circ dg \circ f = f^* dg.$$

Dann folgt (ii) aus (i), der Linearität von d, der Konstruktion von d im Beweis des vorangehenden Satzes und aus Satz 3.12 (iv): Sei $\alpha = g d\phi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\phi_{i_p}$, dann gilt

$$\begin{aligned} d(f^*\alpha) &= d\big(f^*g(f^*d\phi_{i_1}) \wedge \ldots \wedge (f^*d\phi_{i_p})\big) & &= d\big((f^*g) d(f^*\phi_{i_1}) \wedge \ldots \wedge d(f^*\phi_{i_p})\big) \\ &= (f^*dg) \wedge (f^*d\phi_{i_1}) \wedge \ldots \wedge (f^*d\phi_{i_p}) & &= f^*d(g d\phi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\phi_{i_p}) = f^*(d\alpha). \end{aligned}$$

(iii) Aus $\langle dg, E\rangle = \theta_E(g)$ und der Schlussfolgerung nach Satz 3.9 folgt für $E \in \mathrm{Vec}^1(X)$

$$\begin{aligned} \langle \theta_F(dg) - d(\theta_F(g)), E\rangle &= \langle \theta_F(dg), E\rangle & & & &- \langle d(\theta_F(g)), E\rangle \\ &= \theta_F(\langle dg, E\rangle) & &- \langle dg, [F, E]\rangle & &- \theta_E(\theta_F(g)) \\ &= \theta_F(\theta_E(g)) & &- \theta_{[F,E]}(g) & &- \theta_E(\theta_F(g)) \\ &= [\theta_F, \theta_E](g) & &- \theta_{[F,E]}(g) & &= 0. \end{aligned}$$

(iv) Wegen Satz 3.15 (i) ist d eine Antiderivation. Also ist $\theta_F \circ d - d \circ \theta_F$ genauso wie im Beweis von Satz 3.12 (vii) eine Antiderivation. Dann genügt es (iv) für Funktionen $\alpha = g$ und 1–Differentialformen $\alpha = dg$ und zu zeigen. Beides folgt aus (iii):

$$\theta_F(d \circ dg) = 0 = d \circ d\, \theta_F(g) = d\, \theta_F(dg).$$

(v) Wegen Satz 3.15 (i) und Satz 3.12 (vi) sind sowohl d als auch i_F Antiderivationen. Dann ist $i_F \circ d + d \circ i_F$ eine Derivation: Für eine p–Differentialform α und eine q–Differentialform β gilt nämlich $(i_F \circ d + d \circ i_F)(\alpha \wedge \beta) =$

$$\begin{aligned} &= i_F(d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta) + d(i_F(\alpha) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge i_F(\beta)) \\ &= i_F(d\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge i_F(d\beta) + d(i_F(\alpha)) \wedge \beta + \alpha \wedge d(i_F(\beta)). \end{aligned}$$

Also genügt es (v) für Funktionen $\alpha = g$ und 1–Differentialformen $\alpha = dg$ und zu zeigen. Für Funktionen $\alpha = g$ ist $i_F\alpha = 0$ und (v) folgt aus $\theta_F(g) = i_F(dg) = \langle dg, F\rangle$. Für $\alpha = dg$ ist $d\alpha = 0$ und $\theta_F(dg) = d\,\theta_F(g) = d\langle dg, F\rangle = d i_F \alpha$ folgt aus (iii).

Wegen (v) gilt induktiv in p

$$\begin{aligned} i_{F_p}\cdots i_{F_0}d &= i_{F_p}\cdots i_{F_1}\,\theta_{F_0} - i_{F_p}\cdots i_{F_1} d i_{F_0} \\ &= (-1)^{p+1} d i_{F_p}\cdots i_{F_0} + \sum_{i=0}^{p}(-1)^i i_{F_p}\cdots i_{F_{i+1}}\,\theta_{F_i}\, i_{F_{i-1}}\cdots i_{F_0}. \end{aligned}$$

Auf p–Differentialformen α verschwindet der erste Summand auf der rechten Seite. Wegen Satz 3.12 (vi) gilt $i_{F_j}\,\theta_{F_i} = \theta_{F_i}\, i_{F_j} + i_{[F_j,F_i]}$. Die Summanden sind dann

$$\begin{aligned} i_{F_p}\cdots i_{F_{i+1}}\,\theta_{F_i}\, i_{F_{i-1}}\cdots i_{F_0} &= \theta_{F_i}\, i_{F_p}\cdots \widehat{i_{F_i}}\cdots i_{F_0} \\ &\quad + \sum_{j=i+1}^{p} i_{F_p}\cdots i_{F_{j+1}} i_{[F_j,F_i]} i_{F_{j+1}}\cdots \widehat{i_{F_i}}\cdots i_{F_0}. \end{aligned}$$

Wegen der Antisymmetrie gilt $i_{F_i} i_{F_j} = -i_{F_j} i_{F_i}$. Dann folgt insgesamt (vi):

$$\begin{aligned} i_{F_p}\cdots i_{F_0}d &= (-1)^{p+1} d i_{F_p}\cdots i_{F_0} + \sum_{i=0}^{p}(-1)^i\,\theta_{F_i}\, i_{F_p}\cdots \widehat{i_{F_i}}\cdots i_{F_0} \\ &\quad + \sum_{0\le i<j\le p}(-1)^{i+j} i_{F_p}\cdots \widehat{i_{F_j}}\cdots \widehat{i_{F_i}}\cdots i_{F_0} i_{[F_i,F_j]}. \end{aligned}$$ **q.e.d.**

Für jede differenzierbare 1–Differentialform ω und $E, F \in \mathrm{Vec}^1(X)$ wird (vi) zu

$$\langle d\omega, E\otimes F\rangle = \theta_E\langle\omega, F\rangle - \theta_F\langle\omega, E\rangle - \langle\omega, [E,F]\rangle.$$

Die Formel (vi) drückt die äußeren Ableitung einer Differentialform durch Lie–Ableitungen von Funktionen und Vektorfeldern aus. Umgekehrt drückt die Formel (v) die Lie–Ableitung einer Differentialform durch die äußere Ableitung aus.

3.5 Orientierungen

Für die Integration von Differentialformen müssen wir noch den Begriff der Orientierung einführen. Weil die Übergangsfunktionen zwischen zwei verträglichen Karten einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit Diffeomorphismen zwischen offenen Mengen des $\mathbb{R}^n$ sind, liegen ihre Ableitungen in $GL(\mathbb{R}^n)$. Sie werden also durch reelle $n\times n$ Matrizen beschrieben, deren reelle Determinante ungleich Null ist.

Definition 3.16. *Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Dann heißt ein Atlas von X orientiert, wenn die Ableitungen der Übergangsfunktionen, zwischen zwei Karten mit nicht schnittfremdem Definitionsbereich jeweils positive Determinante haben.*

Wenn X einen solchen orientierten Atlas besitzt, dann heißt X orientierbar. Andernfalls heißt X nicht orientierbar. Eine Orientierung von X ist eine Äquivalenzklasse von orientierten Atlanten, wobei zwei orientierte Atlanten äquivalent sind, wenn die Vereinigung der beiden orientierten Atlanten wieder ein orientierter Atlas ist.

Die invertierbare lineare Abbildung

$$I : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto I(x) \quad \text{mit} \quad I(x) = (-x_1, x_2, \dots, x_n)$$

hat offenbar Determinante -1 und ist eine Involution, d.h. ihr Quadrat ist $\mathbb{1}_{\mathbb{R}^n}$. Für jede Karte $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ ist die Verkettung $I \circ \phi$ mit I auch eine Karte von X. Wenn also von zwei Karten $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ und $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ mit $U \cap V \neq \emptyset$ die Ableitung der Übergangsfunktionen $(\psi \circ \phi^{-1})'$ auf einer Zusammenhangskomponente von $\phi[U \cap V]$ negative Determinante hat, dann hat die Ableitung der Übergangsfunktion $((I \circ \psi) \circ \phi^{-1})'$ bzw. $(\phi \circ (I \circ \psi)^{-1})'$ positive Determinante auf der entsprechenden Zusammenhangskomponente von $\phi[U \cap V]$ bzw. $I \circ \phi[U \cap V]$. Also können wir versuchen einen Atlas von X dadurch zu einem orientierten Atlas zu machen, dass wir einige Karten des Atlases durch die Verkettung mit I ersetzen. Wenn X orientierbar ist, dann ist das möglich.

Satz 3.17. *Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, dann ist folgendes äquivalent*

(i) *X ist orientierbar.*

(ii) *Jede zusammenhängende Komponente von X ist orientierbar.*

(iii) *Auf jeder zusammenhängenden Komponente Y von X ist $\bigwedge^{\dim(Y)} Y$ trivial.*

(iv) *Auf jeder zusammenhängenden Komponente Y von X gibt es eine stetige* $\dim(Y)$*–Differentialform, die keine Nullstellen auf Y hat.*

Beweis: Offenbar folgt (ii) aus (i).

(ii)⇒(iv): Sei Y eine orientierbare zusammenhängende differenzierbare Mannigfaltigkeit. Auf dem Definitionsbereich U einer Karte $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ ist $d\phi_1 \wedge \ldots \wedge d\phi_n$ eine n–Differentialform, die offenbar keine Nullstellen hat, weil $d\phi_1, \ldots, d\phi_n$ alle linear unabhängig sind. Sei $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ eine zweite Karte eines orientierten Atlases von Y, dann ist $d\psi_1 \wedge \ldots \wedge d\psi_n = \det(\psi \circ \phi^{-1})' d\phi_1 \wedge \ldots \wedge d\phi_n$, weil für alle $i = 1, \ldots, n$ gilt

$$d\psi_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \psi_i \circ \phi^{-1}}{\partial \phi_j} \cdot d\phi_j.$$

Also sind auf $U \cap V$ die beiden n–Differentialformen $d\phi_1 \wedge \ldots \wedge d\phi_n$ und $d\psi_1 \wedge \ldots \wedge d\psi_n$ durch eine positive glatte Funktion proportional zueinander. Die Überdeckung durch die Definitionsbereiche der Karten des orientierten Atlases von Y besitzt eine entsprechende Zerlegung der Eins. Indem wir alle entsprechenden n–Differentialformen mit dieser Zerlegung der Eins aufsummieren, erhalten wir eine globale glatte $\dim(Y)$–Differentialform auf Y, die keine Nullstellen hat.

(iii) $\iff$ (iv): Weil $\bigwedge^{\dim(Y)} Y$ ein reelles Linienbündel ist, folgt aus Lemma 1.58, dass $\bigwedge^{\dim(Y)} Y$ genau dann trivial ist, wenn es einen globalen glatten Schnitt ohne Nullstellen besitzt. Also sind (iii) und (iv) äquivalent.

(iv)$\Rightarrow$(i): Sei ω eine stetige $\dim(Y)$–Differentialform auf der zusammenhängenden differenzierbaren Mannigfaltigkeit Y ohne Nullstellen. Wegen Lemma 1.30 besitzt Y einen Atlas von Karten, deren Definitionsbereiche zusammenhängend sind. Auf einem solchen Definitionsbereich U einer Karte $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ ist dann $\omega = f d\phi_1 \wedge \ldots \wedge d\phi_n$ mit einer stetigen Funktion $f : U \to \mathbb{R}$, die keine Nullstellen hat. Die Urbilder von $(-\infty, 0)$ und $(0, \infty)$ unter f sind dann auch die Urbilder von $(-\infty, 0]$ bzw. $[0, \infty)$ und damit sowohl offen als auch abgeschlossen. Weil der Definitionsbereich der Karte zusammenhängend ist, ist f entweder positiv oder negativ. Offenbar dreht sich durch die Transformation I auch das Vorzeichen der $\dim(Y)$–Differentialform $d\phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_n$ um. Indem wir alle die Karten des Atlases von Y mit I verknüpfen, für die das entsprechende f negativ (bzw. positiv) ist, erhalten wir einen Atlas von Y, so dass für alle Karten $\phi : U \to \mathbb{R}^n$, die entsprechenden Funktionen f mit $\omega = f d\phi_1 \wedge \ldots \wedge d\phi_n$ positiv (bzw. negativ) sind. Für zwei Karten $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ und $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ mit $U \cap V \neq \emptyset$ dieses Atlases gilt für die entsprechenden positiven Funktionen f und g auf U bzw. V

$$\omega = f d\phi_1 \wedge \ldots \wedge d\phi_n = g d\psi_1 \wedge \ldots \wedge d\psi_n.$$

Also folgt $\det(\psi \circ \phi^{-1})'(\phi(x)) = g(x) f^{-1}(x) > 0$ für alle $x \in U \cap V$ und der Atlas wird zu einem orientierten Atlas. **q.e.d.**

An diesem Beweis erkennen wir auch, dass jede orientierbare zusammenhängende Mannigfaltigkeit X genau zwei Orientierungen besitzt. Die zweite erhalten wir aus der ersten, indem wir alle Karten mit I verknüpfen. Allgemein besitzt jede orientierbare Mannigfaltigkeit mit N zusammenhängenden Komponenten genau 2^N Orientierungen.

Beispiel 3.18. *Wir zeigen, dass folgende n–Differentialform auf $\mathbb{S}^n$ keine Nullstellen hat:*

$$\omega = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i x_i dx_0 \wedge \ldots \widehat{dx_i} \ldots \wedge dx_n.$$

Weil x^2 auf der Untermannigfaltigkeit $\mathbb{S}^n$ von $\mathbb{R}^{n+1}$ konstant ist, gilt dort

$$\sum_{i=0}^{n} x_i dx_i = 0.$$

Für jedes $k = 0, \ldots, n$ gilt auf der offenen Teilmenge $U_k = \{x \in \mathbb{S}^n mid x_k \neq 0\}$ von $\mathbb{S}^n$

$$dx_k = -\sum_{i \neq k} \frac{x_i}{x_k} dx_i.$$

Für $i \neq k$ können wir dann in $(-1)^i x_i dx_0 \wedge \ldots \widehat{dx_i} \ldots \wedge dx_n$ dx_k durch $-\frac{x_i}{x_k} dx_i$ ersetzen. Wenn wir dann dx_i durch eine Permutation mit der Signatur $-(-1)^{k-i}$ vertauschen erhalten wir

$$(-1)^i x_i dx_0 \wedge \ldots \widehat{dx_i} \ldots \wedge dx_n = (-1)^k \frac{x_i^2}{x_k} dx_0 \wedge \ldots \widehat{dx_k} \ldots \wedge dx_n.$$

Weil dies offenbar auch für $i = k$ gilt und wegen $x_0^2 + \cdots + x_n^2 = 1$ folgt

$$\omega = (-1)^k \frac{1}{x_k} dx_0 \wedge \ldots \widehat{dx_k} \ldots \wedge dx_n$$

auf U_k. Auf dieser Menge sind $dx_1, \ldots \widehat{dx_k} \ldots, dx_n$ linear unabhängig. Also hat ω keine Nullstellen auf $\mathbb{S}^n$ und $\mathbb{S}^n$ ist orientierbar.

3.6 Integration von Differentialformen

In diesem Abschnitt werden wir zeigen, dass auf einer orientierbaren n–dimensionalen Mannigfaltigkeit X jede stetige n–Differentialform ω über alle kompakten Teilmengen A von X integriert werden kann. Dafür geben wir an, wie wir dieses Integral lokal in einer Karte berechnen. Wir zeigen dann, dass dieses Integral nicht von der Wahl der Karte abhängt. Mit Hilfe einer geeigneten Zerlegung der Eins können wir zuletzt das Integral von ω über eine beliebige kompakte Teilmenge $A \subset X$ definieren.

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Wir stellen uns vor, dass A der Abschluss einer relativ kompakten offenen Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist. Jede stetige Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ ist dann beschränkt. Indem wir f außerhalb von A gleich Null setzen, erhalten wir eine Lebesque–integrable Funktion auf $\mathbb{R}^n$. Wenn der Rand ∂A von A, also die Schnittmenge von A mit dem Abschluss des Komplements von A, eine Nullmenge ist, dann ist nach dem Lebesgue–Kriterium die Fortsetzung von f auf $\mathbb{R}^n$ sogar Riemann–integrabel. Wenn wir uns im folgenden also auf solche kompakte Teilmengen A von X beschränkten, deren Ränder ∂A in allen Karten Nullmengen sind, dann können wir auch das Riemannintegral statt dem Lebesgueintegral benutzen. Im folgenden Satz rufen wir in Erinnerung, wie sich das Integral unter Koordinatentransformationen verhält.

Satz 3.19. *(Jacobis Transformationsformel) Sei $\Phi : U \to V$ ein C^1–Diffeomorphismus von einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ auf eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^n$. Dann gilt*

$$\int_U f(\Phi(x))|\det(\Phi'(x))|dx_1 \ldots dx_n = \int_V f(y)dy_1 \ldots dy_n \quad \text{für alle} \quad f \in L^1(V).$$

Insbesondere gilt für eine kompakte Menge $A \subset U$ und ein $f \in C(\Phi[A], \mathbb{R}) \subset L^1(V)$

$$\int_A f(\Phi(x))|\det(\Phi'(x))|dx_1 \ldots dx_n = \int_{\Phi[A]} f(y)dy_1 \ldots dy_n.$$

Korollar 3.20. *Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension n und ω eine n–Differentialform auf X. Sei A eine kompakte Teilmenge, die in den Definitionsbereichen U und V zweier Karten $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ und $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ eines orientierten Atlases von X enthalten ist. Dann gibt es zwei stetige Funktionen $f : U \to \mathbb{R}$ und $g : V \to \mathbb{R}$ mit $\omega|_U = f d\phi_1 \wedge \ldots \wedge d\phi_n$ und $\omega|_V = g d\psi_1 \wedge \ldots \wedge d\psi_n$. Und es gilt*

$$\int_{\phi[A]} f(\phi^{-1}(x))dx_1 \cdots dx_n = \int_{\psi[A]} g(\psi^{-1}(x))dx_1 \cdots dx_n.$$

Beweis: Offenbar ist $\phi \circ \psi^{-1}|_{\psi[U \cap V]}$ ein Diffeomorphismus von $\psi[U \cap V]$ auf $\phi[U \cap V]$, und es gilt $\det((\phi \circ \psi^{-1})'(\psi(x))) > 0$ für alle $x \in U \cap V$. Außerdem gilt für $x \in U \cap V$

$$\begin{aligned} d\phi_1(x) \wedge \ldots \wedge d\phi_n(x) &= \det((\phi \circ \psi^{-1})'(\psi(x)))d\psi_1(x) \wedge \ldots \wedge d\psi_n(x). \\ g(x) &= f(x)\det((\phi \circ \psi^{-1})'(\psi(x))). \end{aligned}$$

Seien jetzt $\tilde{f} = f \circ \phi^{-1} : \phi[U] \to \mathbb{R}$ und $\tilde{g} = g \circ \psi^{-1} : \psi[V] \to \mathbb{R}$. Dann gilt auf $\psi[U \cap V] : \tilde{f} \circ (\phi \circ \psi^{-1}) \cdot \det((\phi \circ \psi^{-1})') = \tilde{g}$. Also folgt aus Jacobis Transformationsformel

$$\begin{aligned} \int_{\phi[A]} f(\phi^{-1}(x))dx_1 \cdots dx_n &= \int_{\phi[A]} \tilde{f}(x)dx_1 \cdots dx_n \\ &= \int_{\psi[A]} \tilde{f}(\phi \circ \psi^{-1}(x))\det((\phi \circ \psi^{-1})'(x))dx_1 \cdots dx_n \\ &= \int_{\psi[A]} \tilde{g}(x)dx_1 \cdots dx_n = \int_{\psi[A]} g(\psi^{-1}(x))dx_1 \cdots dx_n. \quad \textbf{q.e.d.} \end{aligned}$$

Mit diesem Korollar können wir das Integral einer n–Differentialform auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit definieren.

Definition 3.21. *Sei X eine orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension n und ω eine stetige n–Differentialform auf X und $A \subset X$ kompakt. Weil A*

kompakt ist besitzt die Überdeckung von A durch die Definitionsbereiche eines orientierten Atlases von X eine endliche Teilüberdeckung und eine entsprechende Zerlegung der Eins $(f_m)_m$. Für jedes m verschwindet f_m außerhalb einer kompakten Teilmenge $A_m \subset U_m$ des Definitionsbereiches einer Karte $\phi_m : U_m \to \mathbb{R}^n$. Auf U_m sei ω gleich $\omega = g_m d\phi_{m,1} \wedge \ldots \wedge d\phi_{m,n}$ mit stetigen Funktionen $g_m : U_m \to \mathbb{R}$. Wir definieren

$$\int_A \omega = \sum_m \int_{\phi_m[A \cap A_m]} f_m(\phi_m^{-1}(x)) g_m(\phi_m^{-1}(x)) dx_1 \cdots dx_n.$$

Weil eine endliche Teilüberdeckung die Menge A überdeckt, ist diese Summe immer endlich und das Integral wohldefiniert. Wegen dem vorangehenden Korollar hängt das Integral $\int_A \omega$ weder von der Wahl des orientierten Atlases noch von der Wahl der Zerlegung der Eins ab. Dieses Integral kann auch in Analogie zum uneigentlichen Riemannintegral auf nicht kompakte Teilmengen A von X ausgedehnt werden, wenn die entsprechenden Summen konvergieren.

Wenn wir die Orientierung von X umdrehen, dann wechselt das Integral $\int_A \omega$ das Vorzeichen, weil sich in allen Karten das Vorzeichen der Funktion f ändert mit

$$\omega|_U = f d\phi_1 \wedge \ldots \wedge d\phi_n.$$

Zum Abschluss können wir Jacobis Transformationsformel noch mal umformulieren:

Korollar 3.22. *Sei $f : X \to Y$ eine orientierungserhaltender C^1–Diffeomorphismus zwischen den orientierten Mannigfaltigkeiten X und Y der Dimension n. Sei $A \subset X$ eine kompakte Teilmenge und ω eine stetige n–Differentialform auf Y. Dann gilt*

$$\int_{f[A]} \omega = \int_A f^* \omega.$$ **q.e.d.**

Im Allgemeinen gilt dies nicht, wenn f nur eine Immersion zwischen zwei gleichdimensionalen Mannigfaltigkeiten und damit nicht notwendigerweise injektiv ist.

Beispiel 3.23. *Betrachte z.B. die Abbildung $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, die von der Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto z^n$ induziert wird mit $n \in \mathbb{N}$. Diese Abbildung f ist zwar eine Immersion, und damit auch lokal ein Diffeomorphismus. Allerdings ist sie für $n > 1$ nicht injektiv. Es ist eine sogenannte Überlagerungsabbildung, d.h. die Urbilder von einzelnen Punkten bestehen jeweils aus n Punkten. Wir parametrisieren $\mathbb{S}^1$ durch $\phi \mapsto e^{\imath\phi}$. Dann ist $\omega = d\phi$ eine nichtverschwindende 1–Differentialform auf $\mathbb{S}^1$ und induziert wegen Satz 3.17 auf $\mathbb{S}^1$ eine Orientierung. Wegen $(e^{\imath\phi})^n = e^{n\imath\phi}$ entspricht die Abbildung f in dieser Parametrisierung der Abbildung $\phi \mapsto n\phi$. Also gilt $f^* d\phi = n d\phi$. Damit ist sie insbesondere orientierungserhaltend. Es gilt aber*

$$\int_{\mathbb{S}^1} f^* \omega = \int_{\mathbb{S}^1} n d\phi = n \int_{\mathbb{S}^1} d\phi = n \int_{f[\mathbb{S}^1]} \omega.$$

Zum Abschluss dieses Abschnittes zeigen wir noch den Satz vom Igel.

Satz vom Igel 3.24. *Die n–dimensionale Sphähre $\mathbb{S}^n$ hat genau dann ein nichtverschwindendes glattes Vektorfeld, wenn n ungerade ist.*

Beweis: Wenn wir $\mathbb{S}^n$ mit $\partial\overline{B(0,1)} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ identifizieren, dann wird in jedem Punkt $x \in \partial\overline{B(0,1)}$ der Tangentialraum $T_x\partial\overline{B(0,1)}$ mit $\{y \in \mathbb{R}^{n+1} \mid y \cdot x = 0\}$ identifizert. Deshalb werden die Vektorfelder von $\mathbb{S}^n$ durch folgende Abbildungen beschrieben:

$$F : \partial\overline{B(0,1)} \to \mathbb{R}^{n+1}, \quad x \mapsto F(x) \quad \text{mit} \quad x \cdot F(x) = 0.$$

Für ungerades n ist $x \mapsto (x_2, -x_1, x_3, -x_4, \ldots, x_{n+1}, -x_n)$ eine solche Abbildung.

Sei jetzt n gerade und F eine solche glatte Abbildung ohne Nullstellen. Dann ist

$$f_\epsilon : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n(\sqrt{1+\epsilon^2}) = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = \sqrt{1+\epsilon^2}\}, \qquad x \mapsto x + \epsilon\frac{F(x)}{\|F(x)\|}.$$

ebenfalls glatt. Wir zeigen jetzt, dass diese Abbildung mit einem geeigneten $\delta > 0$ für alle $\epsilon < \delta$ ein Diffeomorphismus ist. Dazu betrachten wir folgende n–Differentialform:

$$\omega = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i x_i dx_1 \wedge \ldots \widehat{dx_i} \ldots \wedge dx_n.$$

Im Beispiel 3.18 haben wir gezeigt, dass ω auf $\mathbb{S}^n$ keine Nullstellen hat. Weil ϵ in den Koordinaten von f_ϵ linear auftaucht, hat dann $f_\epsilon^*\omega$ folgende Gestalt

$$f_\epsilon^*\omega = \left(1 + \sum_{i=1}^{n+1} \epsilon^i g_i\right)\omega$$

mit glatten Funktionen $g_1, \ldots, g_{n+1}$ auf $\mathbb{S}^n$. Wegen der Kompaktheit von $\mathbb{S}^n$ gibt es dann ein $\delta > 0$, so dass auch $f_\epsilon^*\omega$ auf $\mathbb{S}^{n+1}$ keine Nullstellen hat. Daraus folgt, dass die Determinante der Jacobimatrix von f_ϵ auf $\mathbb{S}^n$ keine Nullstellen hat und f_ϵ eine Immersion ist. Wegen Satz 1.37 ist $f_\epsilon[\mathbb{S}^n]$ offen und als stetiges Bild einer kompakten Menge abgeschlossen. Weil $\mathbb{S}^n$ zusammenhängend ist, folgt die Surjektivität. Zuletzt zeigen wir die Injektivität. Seien x_k, y_k und ϵ_k Folgen mit $f_{\epsilon_k}(x_k) = f_{\epsilon_k}(y_k)$. Dann folgt

$$\frac{x_k - y_k}{\|x_k - y_k\|} = -\frac{\epsilon_k}{\|x_k - y_k\|}\left(\frac{F(x_k)}{\|F(x_k)\|} - \frac{F(y_k)}{\|F(y_k)\|}\right).$$

Wegen dem Schrankensatz ist $F/\|F\|$ lipschitzstetig und die rechte Seite beschränkt durch $L\epsilon_k$ für ein $L > 0$. Also gibt es ein $\delta > 0$ so dass f_ϵ mit $\epsilon < \delta$ ein Diffeomorphismus ist. Für die Abbildung $h_r : x \mapsto h_r(x) = rx$ gilt $h_r^*\omega = r^{n+1}\omega$. Aus Korollar 3.22 folgt

$$\int_{\mathbb{S}^n} \left(1 + \sum_{i=1}^{n} \epsilon^i g_i\right)\omega = \int_{\mathbb{S}^n} f_\epsilon^*\omega = \int_{\mathbb{S}^n(\sqrt{1+\epsilon^2})} \omega = \int_{\mathbb{S}^n} h^*_{\sqrt{1+\epsilon^2}}\omega = (\sqrt{1+\epsilon^2})^{n+1}\int_{\mathbb{S}^n} \omega.$$

Die linke Seite ist ein Polynom in ϵ aber die rechte Seite für gerade n nicht. **q.e.d.**

3.7 Mannigfaltigkeiten mit Rand

Definition 3.25. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ seien*

$$\mathbb{H}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\} \qquad \text{und} \qquad \partial\mathbb{H}^n = \{x \in \mathbb{H}^n \mid x_n = 0\}.$$

Auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{H}^n$ heißt eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}^m$ (stetig) differenzierbar, wenn f eine (stetig) differenzierbare Fortsetzung auf eine in $\mathbb{R}^n \supset \mathbb{H}^n$ offene Teilmenge $V \supset U$ besitzt (siehe Korollar 1.31)

In R. T. Seeley: "Extension of smooth functions defined in a half space" Proc. Amer. Math. Soc. 15 (1964), 625-626 wird gezeigt, dass eine Funktion f auf $\mathbb{H}^n$ in diesem Sinne genau dann glatt ist, wenn f auf $\mathbb{H}^n \setminus \partial\mathbb{H}^n$ glatt ist und sich alle partiellen Ableitungen von f stetig auf $\partial\mathbb{H}^n$ fortsetzen. Analoges gilt auch für p–mal stetig differenzierbare f.

Lemma 3.26. *Sei $\phi : U \to V$ ein Homöomorphismus zwischen offenen Teilmengen von $\mathbb{H}^n$, und ϕ auf $U \cap (\mathbb{H}^n \setminus \partial\mathbb{H}^n)$ und ϕ^{-1} auf $V \cap (\mathbb{H}^n \setminus \partial\mathbb{H}^n)$ stetig differenzierbar mit sich stetig auf $U \cap \partial\mathbb{H}^n$ bzw. $V \cap \partial\mathbb{H}^n$ fortsetzenden Jacobimatrizen. Dann gilt*

$$\phi[U \cap \partial\mathbb{H}^n] = V \cap \partial\mathbb{H}^n.$$

Beweis: Wir nehmen zunächst $\phi(x) \in V \cap \partial\mathbb{H}^n$ für ein ein $x \in U \cap (\mathbb{H} \setminus \partial\mathbb{H}^n)$ an. Sei $W \subset U$ eine in $\mathbb{R}^n$ offene Umgebung von x. Für alle $y \in \phi[W] \cap (\mathbb{H} \setminus \partial\mathbb{H}^n)$ ist die Jacobimatrix von ϕ bei $\phi^{-1}(y)$ wegen der Kettenregel die inverse der Jacobimatrix von ϕ^{-1} bei y. Wegen der Stetigkeit von den Jacobimatrizen, und weil solche y dicht in $\phi[W]$ liegen, gilt das auch für $y = \phi(x)$. Als Minimum von ϕ_n ist x ein kritischer Punkt von ϕ_n. Das widerspricht der Invertierbarkeit der Jacobimatrix von ϕ bei x. Also gilt $\phi^{-1}[V \cap \partial\mathbb{H}^n] \subset U \cap \partial\mathbb{H}^n$. Das gleiche Argument zeigt die umgekehrte Inklusion.**q.e.d.**

Für Homöomorphismen ϕ folgt die Aussage von dem Lemma aus dem Gebietsinvarianzsatz von Brouwer 4.9. Wie in dem Beweis von dem Lemma genügt es zu zeigen, dass es keinen Homöomorphismus ϕ von einer offenen Teilmenge W in $\mathbb{R}^n$ auf eine in $\mathbb{H}^n$ offene Umgebung $\phi[W]$ eines Punktes in $\partial\mathbb{H}^n$ gibt. Wegen dem Gebietsinvarianzsatz ist dann $\phi[W]$ offen in $\mathbb{R}^n$, und damit nicht in $\mathbb{H}^n$ enthalten.

Definition 3.27. *Eine Karte einer Mannigfaltigkeit mit Rand X ist ein Homöomorphismus ϕ einer offenen Teilmenge U von X auf eine offene Teilmenge von $\mathbb{H}^n$.*

Zwei Karten $\phi : U \to \mathbb{H}^n$ und $\psi : V \to \mathbb{H}^n$ werde wieder verträglich genannt, wenn $\psi \circ \phi^{-1}|_{\phi[U\cap V]}$ ein Diffeomorphismus von $\phi[U \cap V]$ nach $\psi[U \cap V]$ ist. Ein Atlas ist wieder eine Menge von verträglichen Karten, deren Definitionsbreiche X überdecken.

Definition 3.28. *Eine n–dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit X mit Rand ist ein Hausdorff– und Lindelöfraum zusammen mit einem Atlas von Karten nach $\mathbb{H}^n$. Die Menge aller Punkte, die die Karten nach $\partial\mathbb{H}$ abbilden heißt Rand ∂X.*

Beispiel 3.29. **(i)** *Für $n \in \mathbb{N}$ ist $\mathbb{H}^n$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Rand.*

(ii) *Jedes abgeschlossene endliche Intervall ist eine eindimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Rand. Allgemein gilt, dass alle Intervalle differenzierbare Mannigfaltigkeiten mit Rand sind. Der Rand von offenen Intervallen ist leer.*

(iii) *Eine glatte Funktion f auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit X ohne Rand habe keine gemeinsamen Nullstellen mit df. Dann ist $\{x \in X \mid f(x) \geq 0\}$ eine Mannigfaltigkeit mit Rand. Insbesodnere sind alle abgeschlossenen Bälle $\overline{B(x,r)} \subset \mathbb{R}^n$ mit $r > 0$ differenzierbare Mannigfaltigkeiten mit Rand.*

(vi) *Offenbar sind für alle $m, n \in \mathbb{N}$ die Räume $\mathbb{H}^{m+n}$ und $\mathbb{R}^m \times \mathbb{H}^n$ bzw. $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}^m$ diffeomorph. Wenn also X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Rand ist und Y eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ohne Rand, dann sind $X \times Y$ und $Y \times X$ differenzierbare Mannigfaltigkeiten mit Rand. Der Rand besteht jeweils aus $\partial(X \times Y) = \partial X \times Y$ bzw. $\partial(Y \times X) = Y \times \partial X$.*

Satz 3.30. *Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Rand. Dann gilt:*

(i) *Der Rand ∂X ist in X eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit ohne Rand.*

(ii) *Eine offene Umgebung U von ∂X in X ist diffeomorph zu der differenzierbaren Mannigfaltigkeit mit Rand $U \simeq [0,1) \times \partial X$. Eine solche Umgebung heißt Kragen.*

(iii) *Wenn X orientierbar ist, dann ist auch ∂X orientierbar, und jede Orientierung von X induziert zusammen mit einem stetigen Vektorfeld N, dessen Einschränkung auf ∂X nach Innen (bzw. Außen) zeigt, eine Orientierung von ∂X.*

(iv) *Wenn X kompakt ist, dann ist auch ∂X kompakt.*

Beweis: (i) Der Rand erfüllt die Bedingung von Satz 2.22 und ist eine Untermannigfaltigkeit. Diese Untermannigfaltigkeit besitzt einen Atlas von Karten nach $\partial\mathbb{H}^n \simeq \mathbb{R}^{n-1}$ und ist eine Mannigfaltigkeit ohne Rand. Jeder Punkt $x \in X \setminus \partial X$ im Komplement des Randes ist im Definitionsbereich einer Karte enthalten mit $\phi_n(x) > 0$. Dann gibt ist eine ganze Umgebung von x in $X \setminus \partial X$ enthalten. Also ist ∂X abgeschlossen.

(ii) Auf jeder Karte $\phi : U \to \mathbb{H}^n$ von X induziert wegen Satz 2.2 die Derivation $\frac{\partial}{\partial \phi_n}$ ein glattes Vektorfeld. Diese Vektorfelder können wir mit Hilfe einer Zerlegung der Eins zu einem globalen glatten Vektorfeld N aufsummieren. Wir zeigen jetzt, dass die Einschränkung dieses Vektorfelds N auf den Rand ∂X überall nach Innen zeigt und keine Nullstellen auf ∂X hat. Sei $x \in U \cap \partial X$ und $\psi : V \to \mathbb{H}^n$ eine zweite Karte von X

um $x \in V$. Dann ist $\psi \circ \phi^{-1}$ eine glatte Funktion auf $\phi[U \cap V]$, die wegen dem Beweis von (i) die Hyperebene $\partial \mathbb{H}^n$ auf sich selber abbildet. Also gilt:

$$\frac{\partial(\psi_n \circ \phi^{-1})}{\partial \phi_i}(x) \begin{cases} = 0 & \text{für } i \neq n \\ > 0 & \text{für } i = n. \end{cases}$$

Daraus folgt, dass der Koeffizient vor $\frac{\partial}{\partial \psi_n}(x)$ des Tangentialvektors $\frac{\partial}{\partial \phi_n}(x) \in T_x X$

$$\frac{\partial}{\partial \phi_n}(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \psi_i}{\partial \phi_n}(x) \frac{\partial}{\partial \psi_i}(x)$$

positiv ist, und deshalb $\frac{\partial}{\partial \phi_n}(x)$ auch bezüglich der Karte ψ nach Innen zeigt. Daraus folgt, dass bei $x \in \partial X$ auch der Koeffizient von $N(x) \in T_x X$ vor $\frac{\partial}{\partial \psi_n}(x)$ bezüglich jeder Karte ψ, deren Definitionsbereich x enthält, positiv ist. Damit zeigt $N(x)$ bezüglich jeder Karte nach Innen und hat auf ∂X keine Nullstellen.

Wir haben N bereits zu einem glatten Vektorfeld auf X fortgesetzt. Dann überträgt sich der Beweis von Satz 2.10 und definiert eine glatte Abbildung

$$W_N \subset [0, \infty) \times \partial X \to X, \quad (t, x) \mapsto \psi_N(t, x)$$

auf einer offenen Umgebung W_N von $\{0\} \times \partial X$ in $[0, \infty) \times \partial X$. In jedem $(0, x) \in W_N$ hat sie eine invertierbare Ableitung. Wegen Satz 1.37 gibt es für jedes $x \in \partial X$ eine Umgebung U von x in ∂X und ein $\epsilon > 0$, so dass die Einschränkung von ψ_N auf $[0, \epsilon) \times U$ ein Diffeomorphismus auf eine offenen Menge von X ist. Mit einer entsprechenden glatten Zerlegung der Eins wird die Summe der konstanten Funktionen ϵ auf den Umgebungen U zu einer glatten positiven Funktion ϵ auf ∂X. Dann ist

$$[0, 1) \times \partial X \to \{(t, x) \in W_N \mid 0 \leq t < \epsilon(x)\}, \quad (t, x) \mapsto (\epsilon(x)t, x)$$

ein Diffeomorphismus zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten mit Rand und mit Umkehrabbildung $(t, x) \mapsto (t/\epsilon(x), x)$. Wegen Satz 2.10 ist dann die Verknüpfung

$$\Phi : [0, 1) \times \partial X \to X, \quad (t, x) \mapsto (\epsilon(x)t, x) \mapsto \psi_N(\epsilon(x)t, x)$$

ein Diffeomorphismus auf eine Umgebung von ∂X.

(iii) Wegen (ii) gibt es auf X ein glattes Vektorfeld N, das überall auf ∂X nach Innen zeigt und keine Nullstellen auf ∂X hat. Wir können annehmen, dass X zusammenhängend und n–dimensional ist. Wegen Satz 3.17 sind die Orientierungen von X bestimmt durch nicht verschwindende stetige n–Differentialformen ω. Auf dem Rand verschwindet $d\phi_n$. Deshalb ist die Einschränkung von $i_N\omega$ auf den Rand gleich

$$i_N(\omega) = i_N(f d\phi_1 \wedge \ldots \wedge d\phi_n) = (-1)^{n-1} \langle d\phi_n, N \rangle f d\phi_1 \wedge \ldots \wedge d\phi_{n-1}$$

mit einer positiven Funktion f auf dem Definitionsbereich $U \ni x$ der Karte ϕ. Wegen $\langle d\phi_n, N\rangle > 0$ induziert jede Orientierung von X durch N eine Orientierung auf ∂X.

(iv) ∂X ist wegen (i) ein abgeschlossener und deshalb kompakt. **q.e.d.**

Man kann zeigen, dass auf $\mathbb{R}^n$ alle rellen Linienbündel trivial sind. Wegen dem nächsten Satz sind dann alle $(m-1)$–dimensionalen abgeschlossenen Untermannigfaltigkeiten vom $\mathbb{R}^m$ orientierbar. Insbesondere ist $\mathbb{S}^n$ orientierbar. Nicht orientierbare Mannigfaltigkeiten können aber in den $\mathbb{R}^n$ immersiert werden.

Satz 3.31.* *Sei Y eine $(n+1)$–dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit, auf der alle reellen Linienbündel trivial sind. Dann ist Y und jede abgeschlossenen n–dimensiopnale Untermannigfaltigkeit X orientierbar.*

Beweis*: Wegen Satz 3.17 (iii) ist X genau dann orientierbar, wenn das reelle Linienbündel $\bigwedge^{n+1} Y$ trivial ist. Also ist Y orientierbar. Sei X eine abgschlossene Untermannigfaltigkeit von Y. Wegen Satz 1.45 besitzt X eine Überdeckung $\mathcal{U}$ durch die Definitionsbreiche von Karten $\phi : U \to \mathbb{R}^{n+1}$ so dass $X \cap U$ die Nullstellenmenge der glatten Funktion $f_U = \phi_n$ ist. Wenn $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ eine andere solche Karte ist, dann verschwindet $\psi_n \circ \phi$ auf $\phi[U \cap V \cap X]$ im Gegensatz zu $\frac{\partial\psi_n\circ\phi^{-1}}{\partial\phi_n}$. Wegen

$$\psi_n \circ \phi^{-1}(\phi_1, \ldots, \phi_n) = \int_0^1 \frac{d}{dt}\psi_n \circ \phi^{-1}(\phi_1, \ldots, t\phi_n)dt = \phi_n \int_0^1 \frac{\partial\psi_n \circ \phi^{-1}}{\phi_n}(\phi_1, \ldots, t\phi_{n+1})dt$$

ist dann $\psi_n\phi_n^{-1}$ auf $U \cap V$ eine glatte Funktion $g_{V,U}$ ohne Nullstellen. Wir ergänzen $\mathcal{U}$ durch die offene Menge $Y \setminus X$ zu einer offenen Überdeckung von Y und definieren die entsprechende Funktion $f_{Y\setminus X} = 1$. Die Funktionen $g_{V,U} = f_V/f_U$ definieren einen Kozykel und damit wegen Satz 1.52 ein reelles Linienbündel auf Y. Wegen Lemma 1.58 ist dieses Linienbündel genau dann trivial, wenn es einen globalen nichtverschwindenden Schnitt gibt. Ein solcher Schnitt definiert für alle $U \in \mathcal{U}$ auf den lokalen Trivialisierungen $U \times \mathbb{R}$ eine glatte Funktion $h_U : U \to \mathbb{R}$ ohne Nullstellen, so dass $h_V = g_{V,U}h_U$ für alle $U, V \in \mathcal{U}$ auf $U \cap V$ gilt. Dann definiert $f_U/h_U = f_V/h_V$ eine globale glatte Funktion f auf Y, deren Nullstellenmenge X ist. Außerdem hat df keine gemeinsame Nullstellen mit f. Also ist $Z = \{y \in Y \mid f(x) \geq 0\}$ eine Untermannigfaltigkeit von Y mit Rand X. Als Untermannigfaltigkeit von Y der Dimension $n+1$ ist Z orientierbar und dann wegen dem vorangehenden Satz (iii) X orientierbar. **q.e.d.**

3.8 Der Satz von Stokes

Satz 3.32. *Sei X eine kompakte orientierte Mannigfaltigkeit mit Rand der Dimension $n+1$. Sei ω eine stetig differenzierbare n–Differentialform auf X. Dann gilt*

$$\int_X d\omega = \int_{\partial X} \omega.$$

Hierbei hat ∂X die durch die Orientierung von X und ein nach **Außen** *zeigendes Vektorfeld N (vergleiche Satz 3.30 (iii)) induzierte Orientierung.*

Beweis: Wir überdecken den kompakten Raum X durch die Definitionsbereiche von endlich vielen Karten $\phi : U \to \mathbb{H}^{n+1}$ eines orientierten Atlases. Mit Hilfe einer entsprechenden Zerlegung der Eins zerlegen wir ω in eine Summe von stetig differenzierbaren n–Differentialformen, die jeweils außerhalb einer kompakten Teilmenge A eines Definitionsbereiches U einer Karte verschwinden. Wegen der lokalen Endlichkeit und der Kompaktheit vom Abschluss von U sind das für jede Karte nur endlich viele. Dann genügt es die Aussage für solche ω zu zeigen. Wir unterscheiden zwei Fälle:
(A) Der Definitionsbereich U der Karte enthält keine Randpunkte. Dann ist $\phi[U] \subset \mathbb{H}^{n+1}$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{n+1}$ und der Satz von Stokes besagt

$$\int_X d\omega = \int_A d\omega = 0.$$

Auf U können wir die n–Differentialform folgendermaßen schreiben:

$$\omega = \sum_{i=0}^{n} f_i d\phi_0 \wedge \ldots \hat{d\phi_i} \ldots \wedge d\phi_n$$

Hierbei bedeutet $\hat{\cdot}$ wieder, dass der entsprechende Faktor weggelassen wird. Dann gilt

$$d\omega = \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial \phi_i} d\phi_i \wedge d\phi_0 \wedge \ldots \hat{d\phi_i} \ldots \wedge d\phi_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{\partial f_i}{\partial \phi_i} d\phi_0 \wedge \ldots \wedge d\phi_n.$$

Aufgrund der Definition des Integrals gilt dann

$$\int_A d\omega = \int_{\phi[A]} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{\partial f_i}{\partial \phi_i} (\phi^{-1}(x)) dx_0 \ldots dx_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \int_{\phi[A]} \frac{\partial (f_i \circ \phi^{-1})}{\partial x_i} (x) dx_0 \ldots dx_n.$$

Die Funktionen $f_0, \ldots, f_n$ sind stetig differenzierbar und verschwinden außerhalb von A. Also setzt sich $f_i \circ \phi^{-1}$ stetig differenzierbar auf ganz $\mathbb{H}^{n+1}$ fort und verschwindet außerhalb von $\phi[A]$. Der Quader $Q = [a_0, b_0] \times \ldots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{H}^N$ enthalte $\phi[U]$:

$$\int_A d\omega = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \int_Q \frac{\partial (f_i \circ \phi^{-1})}{\partial x_i} (x) dx_0 \ldots dx_n.$$

Das ist ein mehrfaches Integral über die Intervalle $[a_0, b_0], \ldots, [a_n, b_n]$, deren Reihenfolge wir wegen dem Satz von Fubini vertauschen können: Wenn wir im i–ten Summanden

$$(-1)^i \int_Q \frac{\partial(f_i \circ \phi^{-1})}{\partial x_i}(x) dx_0 \ldots dx_n$$

die Integration über die Variable dx_i zuerst ausführen, erhalten wir nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung die Differenz von $f_i \circ \phi^{-1}$ an den entsprechenden Intervallgrenzen. Weil f_i außerhalb von A verschwindet, sind diese Werte gleich Null:

$$\int_A d\omega = 0.$$

(B) Der Definitionsbereich U der Karte enthält Randpunkte. In diesem Fall verfahren wir genauso wie in Fall (A), nur dass eine Randseite des Quaders Q auf den Rand von $\mathbb{H}^{n+1}$ liegt, also a_n verschwindet. Weil die Normale N nach Außen zeigt, gilt $\langle d\phi_n, N\rangle < 0$ auf dem Rand. Wegen Satz 3.12 (vi) gilt dann auf dem Rand

$$i_N(d\phi_0 \wedge \ldots \wedge d\phi_n) = (-1)^n \langle d\phi_n, N\rangle d\phi_0 \wedge \ldots \wedge d\phi_{n-1}.$$

Also entspricht die auf dem Rand induzierte Orientierung der n–Differentialform

$$-(-1)^n d\phi_0 \wedge \ldots \wedge d\phi_{n-1}.$$

Für $i = 0, \ldots, n-1$ verschwinden $f_i \circ \phi^{-1}$ auf $\partial[a_i, b_i]$ und es gilt wie im Fall (A)

$$(-1)^i \int_Q \frac{\partial(f_i \circ \phi^{-1})}{\partial x_i}(x) dx_0 \ldots dx_n = 0.$$

Für $i = n$ verschwindet $f_n \circ \phi^{-1}$ nur an der Grenze b_n. Dann gilt

$$(-1)^n \int_Q \frac{\partial(f_n \circ \phi^{-1})}{\partial x_n} dx_0 \ldots dx_n = -(-1)^n \int_{Q \cap \partial\mathbb{H}^{n+1}} f_n \circ \phi^{-1} dx_0 \ldots dx_{n-1}.$$

Weil auf $U \cap \partial X$ die 1–Form $d\phi_n$ verschwindet gilt dort $\omega|_{U\cap\partial X} = f_n d\phi_1 \wedge \ldots \wedge d\phi_{n-1}$. Weil das Vorzeichen $-(-1)^n$ mit dem Vorzeichen der Orientierung übereinstimmt, gilt

$$\int_A d\omega = \int_{\partial X \cap A} \omega.$$ **q.e.d.**

Dieser Satz gilt genauso für stetig differenzierbare n–Differentialformen ω mit kompaktem Träger auf nicht kompakten $n+1$–dimensionalen Mannigfaltigkeiten X mit Rand. Allgemein kann man ihn auch auf nicht kompakte Mannigfaltigkeiten mit Rand verallgemeinern, wenn man sicherstellt, dass die entsprechenden Integrale konvergieren.