Kapitel 1

Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

In diesem Abschnitt führen wir den Begriff der Mannigfaltigkeit ein. Dieser Begriff erlaubt es die Differential– und Integralrechnung auf viele Fragestellungen anzuwenden. Er beschreibt geometrische Gebilde, die lokal wie offene Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ aussehen, aber global auf sehr vielfältige Weise verklebt sein können. Entsprechend werden wir einerseits die lokale Differential– und Integrationsrechnung anwenden und weiterentwickeln und andererseits auf neue globale Fragestellungen stoßen.

1.1 Zusammenhängende Komponenten

Zunächst wiederholen wir die Begriffsbildung von metrischen Räumen.

Definition 1.1. *(Metrik auf einer Menge X) Eine Metrik (oder Abstandsfunktion) ist eine Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto d(x, y)$ mit drei Eigenschaften*

(i) $d(x, y) \geq 0$ *für alle* $x, y \in X$ *und* $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$ *(Positivität).*

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$ *(Symmetrie).*

(iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ *für alle* $x, y, z \in X$ *(Dreiecksungleichung).*

Beispiel 1.2. **(i)** *auf jeder Menge X definiert* $d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = y \\ 1 & \text{für } x \neq y \end{cases}$

die sogenannte diskrete Metrik.

(ii) *Auf $\mathbb{R}$ definiert $d(x, y) = |x - y|$ eine Metrik.*

(iii) *Auf $\mathbb{C}$ definiert $d(x, y) = |x - y|$ eine Metrik.*

(iv) *Auf jeder nicht leeren Teilmenge $A \subset X$ eines metrischen Raumes (X, d) definiert die Einschränkung von d auf $A \times A \to \mathbb{R}$ eine Metrik.*

(v) *Auf dem kartesischen Produkt zweier metrischer Räume definiert die Summe beider Metriken eine Metrik. Sie heißt Metrik des kartesischen Produktes.*

(vi) *Die Einschränkung der Metrik (ii) auf die Vereinigung der inversen der natürlichen Zahlen mit $\{0\}$ definiert eine Metrik auf $\bar{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\} \simeq \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$:*

$$d(n, m) = \frac{|n-m|}{nm} \quad d(\infty, n) = d(n, \infty) = \frac{1}{n} \quad d(\infty, \infty) = 0 \quad \text{für alle } n, m \in \mathbb{N}.$$

Definition 1.3. *(offener Ball, Umgebung, offene Menge) Ein offener Ball in (X, d) mit Zentrum $x \in X$ und Radius $r > 0$ ist die Menge $B(x, r) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$. Eine Umgebung eines Punktes $x \in X$ ist eine Menge $O \subset X$, die für ein $r > 0$ einen Ball $B(x, r)$ enthält. Eine offene Menge $O \subset X$ ist eine Teilmenge, die eine Umgebung aller ihrer Punkte ist, d.h. für alle $x \in O$ gibt es ein $\epsilon > 0$ mit $B(x, \epsilon) \subset O$.*

Beispiel 1.4. *In $\mathbb{R}$ besteht der Ball $B(x, r)$ aus $(x - r, x + r)$. Im $\mathbb{R}^n$ besteht der Ball $B(x, r)$ aus allen Punkten, deren euklidischer Abstand zu x kleiner ist als r.*

Alle offenen Bälle $B(x, r)$ sind offenbar Umgebungen von x. Für $y \in B(x, r)$ ist $d(x, y) < r$. Sei $z \in B(y, r - d(x, y))$. Dann gilt $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < r$, also auch $B(y, r - d(x, y)) \subset B(x, r)$. Deshalb sind die offenen Bälle tatsächlich offen.

Offenbar ist die beliebige Vereinigung von offenen Mengen wieder offen. Für zwei offene Mengen O und O' und $x \in O \cap O'$ gibt es $r > 0$ und $r' > 0$ mit $B(x, r) \subset O$ und $B(x, r') \subset O'$. Also ist $B(x, \min\{r, r'\}) \subset B(x, r) \cap B(x, r') \subset O \cap O'$, und $O \cap O'$ offen. Damit ist auch die Schnittmenge von endlich vielen offenen Mengen wieder offen.

Definition 1.5. *(abgeschlossene Mengen, Abschluss) Die Komplemente von offenen Mengen heißen abgeschlossen. Der Abschluss $\bar{A}$ eine Menge A ist die Schnittmenge aller abgeschlossenen Mengen, die A enthalten.*

Wegen der Regel von de Morgan, sind beliebige Schnitte und endliche Vereinigungen von abgeschlossenen Mengen wieder abgeschlossen. Deshalb ist eine Menge genau dann abgeschlossen, wenn sie mit ihrem Abschluss übereinstimmt.

Definition 1.6. *Ein topologischer Raum X ist eine Menge X zusammen mit einer Topologie auf X, d.h. einer Teilmenge τ der Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ aller Teilmengen von X, deren Elemente wir offene Mengen von X nennen. Sie erfüllt drei Bedingungen:*

(i) *Die Schnittmenge von endlich vielen offenen Mengen ist offen.*

(ii) *Die Vereinigung von beliebig vielen offenen Mengen ist offen.*

(iii) *X und $\emptyset$ sind offen.*

Ein topologischer Raum heißt Hausdorffraum, wenn je zwei unterschiedliche Punkte in zwei disjunkten offenen Mengen enthalten sind. Er heißt kompakt bzw. Lindelöfraum, wenn jede offene Überdueckung eine endliche bzw. abählbare Teilüberdeckung besitzt.

In einem topologischen Raum X konvergiert eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann gegen einen Grenzwert $x \in X$, wenn jede offene Menge, die x enthält, alle bis auf endlich viele Folgenglieder enthält. In einem topologischen Hausdorffraum ist ein solcher Grenzwert eindeutig. In einem allgemeinen topologischen Raum kann eine Folge mehrerer Grenzwerte haben. Die Topologie $\tau = \mathcal{P}(X)$ heißt diskrete Topologie. In einem metrischen Raum (X, d) ist eine Teilmenge genau dann offen, wenn sie eine Vereinigung von offenen Bällen ist. Eine Abbildung $f : X \to Y$ von einem topologischen Raum X in einen topologischen Raum Y heißt stetig, wenn das Urbild jeder offenen Menge offen ist.

Übungsaufgabe 1.7. *Zeige, dass für metrische Räume diese Definition von Stetigkeit mit der $\epsilon - \delta$–Definition übereinstimmt.*

Die Schnittmengen von den offenen Teilmengen eines topologischen Raumes X mit einer Teilmenge $A \subset X$ bilden die offenen Mengen des topologischen Unterraumes A, und die Schnittmengen von abgeschlossenen Teilmengen von X mit A die abgeschloessene Mengen. Das kartesische Produkt zweier topologischer Räume besitzt als offene Mengen beliebige Vereinigungen von kartesischen Produkten von offenen Mengen.

Definition 1.8. *Ein topologischer Raum X heißt zusammenhängend, wenn die einzigen Teilmengen von X, die sowohl abgeschlossen als auch offen sind, die leere Menge und der ganze Raum X sind. Er heißt lokal zusammenhängend, wenn für jedes $x \in X$ jede Umgebung von x eine zusammenhängende Umgebung von x enthält.*

Satz 1.9. *Eine nicht leere Teilmenge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ ist genau dann zusammenhängend, wenn sie ein (beschränktes oder unbeschränktes) Intervall ist. Insbesondere ist also $\mathbb{R}$ sowohl zusammenhängend als auch lokal zusammenhängend.*

Beweis: Sei $A \subset \mathbb{R}$ eine zusammenhängende nicht leere Teilmenge. Dann enthält A mit je zwei Punkten $a < b \in \mathbb{R}$ auch das Intervall $[a, b]$. Wenn nämlich $a < b$ zwei Elemente sind und $x \notin A$ für ein $x \in (a, b)$, dann sind die Teilmengen

$$(-\infty, x) \cap A = (-\infty, x] \cap A \text{ und } (x, \infty) \cap A = [x, \infty) \cap A$$

jeweils offen und abgeschlossen. Also ist dann A nicht zusammenhängend. Wir setzten $\inf A = -\infty$ bzw. $\sup A = \infty$, falls A nach unten bzw. oben unbeschränkt ist. Dann ist A eines der Intervalle $(\inf A, \sup A)$, $[\inf A, \sup A)$, $(\inf A, \sup A]$ und $[\inf A, \sup A]$.

Sei umgekehrt $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $I = A \cup B$ eine disjunkte Vereinigung von offenen und abgeschlossenen nichtleeren Teilmengen A und B von I. Sei $a \in A$ und $b \in B$ mit $a < b$. Dann ist $[a, b]$ in I enthalten. Sei c das Supremum von $A \cap [a, b]$. Weil A abgeschlossen ist, folgt $c \in A$. Weil A offen in I ist, folgt $(c - \epsilon, c + \epsilon) \cap I \subset A$ aus $c \in A$ für ein $\epsilon > 0$. Wegen $c < b \in B$ ist das Supremum von $A \cap [a, b] > c$ im Widerspruch zur Definition von c. Also ist jedes Intervall zusammenhängend. **q.e.d.**

Satz 1.10. (i) *Sei X ein topologischer Raum und $A \subset X$ ein zusammenhängender Unterraum. Dann ist jede Menge B mit $A \subset B \subset \bar{A}$ zusammenhängend.*

(ii) *Eine beliebige Vereinigung von zusammenhängenden Teilmengen eines topologischcen Raumes X, deren Schnitt nicht leer ist, ist zusammenhängend.*

(iii) *Für eine Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von zusammenhängenden Teilmengen eines topologischen Raumes X mit $A_{n+1} \cap A_n \neq \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ zusammenhängend.*

(iv) *Das Bild eines zusammenhängenden topologischen Raumes unter einer stetigen Abbildung ist zusammenhängend.*

(v) *Das kartesische Produkt zweier topologischer Räume ist genau dann (lokal) zusammenhängend, wenn beide (lokal) zusammenhängend sind.*

Beweis (i): Wenn B eine Vereinigung von zwei offenen disjunkten Teilmengen C und D ist, dann ist auch A eine disjunkte Vereinigung von $(A \cap C) \cup (A \cap D)$. Wenn C und D offen in B sind, dann sind auch $(A \cap C)$ und $(A \cap D)$ offen in A. Weil B die einzige abgeschlossene Teilmenge von B ist, die A enthält, sind $(A \cap C)$ bzw. $(A \cap D)$ genau dann leer, wenn C bzw. D leer ist. Also ist A nicht zusammenhängend, wenn B nicht zusammenhängend ist. Daraus folgt (i).
(ii): Sei $x \in X$ im Schnitt einer Familie von zusammenhängenden Teilmengen und $A \cup B$ eine disjunkte Vereinigung der Vereinigung der Familie durch offene und abgeschlossene nichtleere Teilmengen. Wir können $x \in A$ annehmen. Dann gibt es mindestens eine zusammenhängende Menge C der Familie, so dass $B \cap C$ nicht leer ist. Dann ist auch $C = (C \cap A) \cup (C \cap B)$ eine disjunkte Vereinigung durch offene und abgeschlossene Mengen. $C \cap A$ enthält x und $C \cap B$ ist nicht leer. Das steht im Widerspruch dazu, dass C zusammenhängend ist. Daraus folgt (ii).
(iii): Induktiv folgt aus (ii), dass $A_1 \cup \ldots \cup A_n$ zusammenhängend sind, und dann (iii).
(iv): Für eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ und eine offene Teilmenge O von $f[X]$ gibt es eine offene Teilmenge U von Y mit $O = U \cap f[X]$. Dann ist $f^{-1}[O] = f^{-1}[U]$ offen und $f : X \to f[X]$ stetig. Das Urbild einer offenen und abgeschlossenen Menge ist wieder offen und abgeschlossen. Daraus folgt, dass das Bild einer zusammenhängenden Menge unter einer stetigen Abbildung zusammenhängend ist.

(v): Weil die Projektionen $p_1 : X \times Y \to X$ und $p_2 : X \times Y \to Y$ stetig und surjektiv sind, sind wegen (iv) auch X und Y zusammenhängend, wenn $X \times Y$ zusammenhängend sind. Für alle $(x, y) \in X \times Y$ bilden die Bilder der Umgebungen von (x, y) unter p_1 bzw. p_2 die Umgebung von x bzw. y. Deshalb sind X und Y auch lokal zusammenhängend, wenn $X \times Y$ lokal zusammenhängend ist. Wenn umgekehrt X und Y (lokal) zusammenhängend, dann sind für alle

$$(x, y) \in X \times Y \text{ auch } X \times \{y\} \text{ und } \{x\} \times Y$$

(lokal) zusammenhängend. Wegen (ii) ist dann

$$(X \times \{y\}) \cup (\{x\} \times Y)$$

zusammenhängend und enthält alle Punkte (z, y) mit $z \in X$. Wegen (ii) ist dann auch

$$X \times Y = \bigcup_{x \in X} ((X \times \{y\}) \cup (\{x\} \times Y))$$

zusammenhängend. Für lokal zusammenhängende X und Y folgt, dass jede Umgebung von $(x, y) \in X \times Y$ das kartesische Produkt von zusammenhängenden Umgebungen von x und y enthält, und damit auch eine zusammenhängende Umgebung. **q.e.d.**

Korollar 1.11. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $\mathbb{R}^n$ (lokal) zusammenhängend.* **q.e.d.**

Definition 1.12. *Sei X ein topologischer Raum und $x \in X$. Dann ist wegen Satz 1.10 (ii) die Vereinigung aller zusammenhängenden Teilmengen von X, die x enthalten, zusammenhängend und heißt zusammenhängende Komponente von x in X. Wegen Satz 1.10 (i) sind diese zusammenhängenden Komponenten abgeschlossen. Zwei zusammenhängende Komponenten sind entweder gleich oder disjunkt. Also ist jeder topologische Raum X eine disjunkte Vereinigung seiner zusammenhängenden Komponenten.*

Satz 1.13. *Ein topologischer Raum X ist genau dann lokal zusammenhängend, wenn die zusammenhängenden Komponenten von allen offenen Teilmengen wieder offen sind.*

Beweis: Sei X ein topologischer Raum, dessen zusammenhängende Komponenten von allen offenen Mengen offen sind. Dann enthält jede offene Umgebung von $x \in X$ eine offene zusammenhängende Komponente von x. Also ist X lokal zusammenhängend.

Sei jetzt X lokal zusammenhängend. Dann ist für jedes $x \in X$ die zusammenhängende Komponente von x in einer offenen Menge eine Umgebung von x. Also sind alle zusammenhängenden Komponenten in offenen Mengen offene, abgeschlossene und zusammenhängende Mengen. **q.e.d.**

Korollar 1.14. *Jeder lokal zusammenhängende Lindelöfraum X hat höchstens abzählbar viele Zusammenhangskomponenten. Sie sind alle offen und abgeschlossen.*

Beweis: Die zusammenhängenden Komponenten eines lokal zusammenhängenden topologischen Raumes X sind offen, paarweise disjunkt und überdecken den Raum. Diese Überdeckung besitzt keine echte Teilüberdeckung, und ein lokalzusammenhängender Lindelöfraum hat höchstens abzählbar viele Zusammenhangskomponenten. **q.e.d.**

Ein topologischer Raum X heißt wegzusammenhängend, wenn es für je zwei Punkte $x, y \in X$ einen stetigen Weg $\gamma : [0, 1] \to X$ von $x = \gamma(0)$ nach $y = \gamma(1)$ gibt. Dann ist $\gamma([0, 1])$ zusammenhängend und damit auch die Vereinigung X der Bilder aller solchen Wege, bei denen x festgehalten wird und y ganz X durchläuft. Im Allgemeinen ist aber nicht jeder zusammenhängende Raum auch wegzusammenhängend. Die Wegzusammenhangskomponenten eines Punktes x ist die Menge aller Punkte $y \in X$, für die ein stetiger Weg von x nach y existiert. Sie ist im allgemeinen kleiner als die entsprechende Zusammenhangskomponente.

Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $r > 0$ ist die Abbildung

$$B(0, r) \to \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto \frac{x}{r - \|x\|}$$

eine stetige Abbildung von $B(0, r)$ nach $\mathbb{R}^n$. Die Umkehrabbildung ist gegeben durch

$$\mathbb{R}^n \to B(0, r), \quad y \mapsto \frac{ry}{1 + \|y\|}$$

und damit auch stetig. Also sind $B(0, r)$ und $\mathbb{R}^n$ homöomorph (d.h. durch eine bijektive stetige Abbildung und stetige Umkehrabbildung verbunden). Deshalb ist im $\mathbb{R}^n$ jeder offene Ball zusammenhängend. Daraus wird folgen, dass alle differenzierbaren Mannigfaltigkeiten lokal zusammenhängende Lindelöfräume sind, und deshalb höchstens abzählbare disjunkte Vereinigungen von offenen und abgeschlossenen zusammenhängenden Komponenten sind.

1.2 Karten und Atlanten

Definition 1.15. *(Karte) Sei X ein topologischer Raum, dann heißt ein Homöomorphismus ϕ (also eine bijektive stetige Abbildung, deren Umkehrabbildung auch stetig ist) von einer offenen Teilmenge U von X auf eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ Karte. U heißt der Definitionsbereich und n die Dimension der Karte.*

Wegen dem Gebietsinvarianzsatz von Brouwer 4.9 ist das Bild einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ unter einer injektiven stetigen Abbildung nach $\mathbb{R}^n$ wieder offen. Deshalb ist eine stetige Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $n > m$ nicht injektiv. Andernfalls ist die Verkettung von f mit der Einbettung $i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto (x, 0)$ auf die ersten m Komponenten von $\mathbb{R}^n$ ebenfalls stetig und injektiv. Das Bild einer offenen Menge unter $i \circ f$ ist als Teilmenge des Bildes von i nicht offen, im Widerspruch zu der Invarianz des Gebietes. Insbesondere existiert nur dann ein Homöomorphismus von einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ auf eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^m$, wenn $n = m$ ist. Deshalb stimmen die Dimensionen zweier Karten, deren Definitionsbereiche nicht schnittfremd sind, überein. Das werden wir aber nicht benutzen. Zwei Karten ϕ_1 und ϕ_2 mit dem gleichen Definitionsbereich U werden verträglich genannt, wenn die Übergangsfunktionen $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}$ und $\phi_1 \circ \phi_2^{-1} = (\phi_2 \circ \phi_1^{-1})^{-1}$ unendlich oft differenzierbare Abbildungen sind. Weil die zweite Abbildung die Umkehrabbildung der ersten ist, folgt dann, dass die Ableitungen dieser Abbildungen an jeder Stelle von $\phi_1[U]$ bzw. $\phi_2[U]$ bijektive lineare Abbildungen sind von $\mathbb{R}^{n_1}$ auf $\mathbb{R}^{n_2}$. Also stimmen die Dimensionen von zwei verträglichen Karten mit gleichem Definitionsbereich überein.

Zwei Karten ϕ_1 und ϕ_2 mit verschiedenen Definitionsbereichen U_1 bzw. U_2 heißen verträglich, wenn die beiden Einschränkungen von ϕ_1 und ϕ_2 auf $U_1 \cap U_2$, die offenbar zwei Karten mit gleichem Definitionsbereich sind, miteinander verträglich sind.

Definition 1.16. *(Atlas) Eine Familie von paarweise verträglichen Karten, deren Definitionsbereiche den topologischen Raum X überdecken, heißt Atlas.*

Eine Karte heißt mit einem Atlas verträglich, wenn sie mit allen Karten des Atlasses verträglich ist. Das ist äquivalent dazu, dass die Vereinigung des Atlasses mit der Karte wieder ein Atlas ist. Zwei Atlanten heißen miteinander verträglich, wenn die Vereinigung der Karten beider Atlanten wieder ein Atlas ist, also alle Karten zusammen paarweise miteinander verträglich sind. Sei jetzt eine Karte $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ und $x \in U$ gegeben. Weil die Verkettung von zwei glatten Abbildungen zwischen offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ wieder glatt ist, ist die Bedingung an eine Karte $\psi : V \to \mathbb{R}^m$, deren Definitionsbereich x enthält (dann ist natürlich $m = n$), dass die Abbildung $\phi|_{V\cap U} \circ (\psi|_{V\cap U})^{-1}$ bei $\psi(x)$ und die Abbildung $\psi|_{V\cap U} \circ \phi|_{V\cap U}$ bei $\phi(x)$ glatt ist, für alle miteinander verträglichen Karten $\psi : V \to \mathbb{R}^m$ äquivalent, deren Definitionsbreiche x enthalten. Also ist die gegebene Karte $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ genau dann mit einem Atlas verträglich, wenn es für jedes $x \in U$ eine solche Karte $\psi : V \to \mathbb{R}^m$ im Atlas gibt, die die Bedingung erüllt. Dann ist eine mit einem Atlas verträgliche Karte auch mit einem mit dem Atlas verträglichen Atlas verträglich. Insbesondere stimmen die mit jeweils einem von zwei gegebenen Atlanten verträglichen Karten genau dann überein, wenn die beiden Atlanten verträglich sind, und die Verträglichkeit von Atlanten ist eine Äquivalenzrelation. Ein gesättigter Atlas ist ein maximaler Atlas, der also alle mit diesem Atlas verträglichen Karten enthält. Jede Äquivalenzklasse von verträglichen Atlanten enthält offenbar genau einen gesättigten Atlas und jeder gesättigte Atlas definiert genau eine Äquivalenzklasse von verträglichen Atlanten, nämlich alle Atlanten, die in dem gesättigten Atlas enthalten sind.

Obwohl jeder metrische Raum ein Haudorffraum ist, ist nicht jeder topologische Raum mit einem Atlas ein Hausdorffraum. Sei $X = \mathbb{R} \cup \{0^*\}$ der topologische Raum dessen offene Mengen aus den offenen Teilmengen von $\mathbb{R}$ bestehen und Mengen der Form $\{0^*\} \cup O$ bzw. $\{0^*\} \cup (O \setminus \{0\})$, wobei O eine offene Umgebung von $0 \in \mathbb{R}$ ist. Dann ist $1\!\!1_{\mathbb{R}}$ eine Karte mit Definitionsbereich $X \setminus \{0^*\}$ und $1\!\!1_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}$ mit $0^* \mapsto 0$ eine Karte mit Definitionsbereich $X \setminus \{0\}$. Zusammen bilden sie einen Atlas. Die beiden Punte 0 und 0^* besitzen allerdings keine schnittfremden Umgebungen und X ist kein Haudorffraum. Um solche Beispiele auszuschließen definieren wir

Definition 1.17. *(Mannigfaltigkeit) Ein topologischer Hausdorff– und Lindelöfraum X zusammen mit einem Atlas heißt differenzierbare Mannigfaltigkeit.*

Unter einer Karte einer differnzierbaren Mannigfaltigkeite verstehen wir im folgenden immer eine mit dem Atlas verträgliche Karte. Nicht jeder topologische Raum besitzt einen Atlas. Offenbar besitzt jeder Punkt einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit, (oder eines topologischen Raumes mit einem Atlas) eine Umgebung, die homöomorph zu einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist. So ist

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \cdot y = 0\} = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} \cup \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$$

keine Mannigfaltigkeit, weil der Punkt $(0, 0)$ keine Umgebung besitzt, die homöomorph zu einer offenen Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist. Das sieht man daran, dass alle ϵ–Bälle um $(0, 0)$ ohne den Punkt $(0, 0)$ 4 zusammenhängende Komponenten besitzen, also vier offene und abgeschlossene zusammenhängende Teilmengen. Für jeden Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ und alle $\epsilon > 0$ hat aber $B(x, \epsilon) \setminus \{x\}$ genau eine zusammenhängende Komponente, wenn $n > 1$ ist und zwei, wenn $n = 1$. Wie wir gesehen haben, stimmen die Dimensionen von zwei verträglichen Karten, deren Definitionsbereiche beide einen Punkt $x \in X$ enthalten überein. Die Dimension einer differenzierbare Mannigfaltigkeit X ist die Funktion, die jedem Punkt $x \in X$ die Dimension einer Karte aus dem Atlas zuordnet, deren Definitionsbereich x enthält. Jeder Punkt $x \in X$ besitzt eine offene Umgebung, auf der die Dimension der Mannigfaltigkeit konstant ist. Deshalb sind die Teilmengen von X, auf denen die Dimension gleich einer Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist, offen. Wenn $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine in X konvergente Folge ist, dann stimmen die Dimensionen von X an den Punkten $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ für große m mit der Dimension von X am Grenzwert von $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ überein. Deshalb sind die Teilmengen von X, auf denen die Dimension gleich einer Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist, auch abgeschlossen, und deshalb Vereinigungen von zusammenhängenden Komponenten von X. Insbesondere hat eine zusammenhängende differenzierbare Mannigfaltigkeit nur eine Dimension. Eine nicht zusammenhängende differenzierbare Mannigafltigkeit kann mehrere Dimensionen haben.

Beispiel 1.18. (i) *Jeder höchstens abzählbare diskrete Raum ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension* 0. *Umgekehrt ist jede differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension* 0 *ein höchstens abzählbarer diskreter Raum.*

(ii) *Jeder endlichdimensionale* $\mathbb{R}$*–Vektorraum* V *ist für ein* $n \in \mathbb{N}$ *isomorph zu* $\mathbb{R}^n$ *und besizt einen Atlas mit nur einer linearen Karte. Alle linearen Karten sind miteinander verträglich. Damit wird* V *zu einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit von der gleichen Dimension wie* V. *Die Topologien aller Normen von* V *stimmen alle überein, und die entsprechenden Atlanten sind alle miteinander verträglich.*

(iii) *Sei* $\mathbb{R}^{n+1}$ *der* $(n+1)$*–dimensionale Euklidische Raum mit dem Euklidischen Skalarprodukt und der entsprechenden Norm. Seien* $e_0, \ldots, e_n$ *die natürliche Basis von* $\mathbb{R}^{n+1}$. *Unter der* n*–dimensionalen Sphäre verstehen wir die Teilmenge*

$$\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$$

Im folgenden zeigen wir, dass $\mathbb{S}^n$ *auf natürliche Weise eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist. Dafür definieren wir die sogenannte stereographische Projektion:*

$$\mathbb{S}^n \setminus \{e_0\} \to \mathbb{R}^n$$

Zunächst identifizieren wir den $\mathbb{R}^n$ *mit der Teilmenge*

$$\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x, e_0\rangle = 0\} = \{0e_0 + x_1e_1 + \ldots + x_ne_n \in \mathbb{R}^n \mid (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n\}.$$

Dann bildet die stereographische Projektion jeden Punkt von $\mathbb{S}^n \setminus \{e_0\}$ *(ohne den Nordpol) auf den Schnittpunkt der Geraden durch den Nordpol und den Punkt von* $\mathbb{S}^n \setminus \{e_0\}$ *mit der Ebene* $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *ab. Sei* $x \in \mathbb{S}^n \setminus \{e_0\}$. *Dann besteht die Gerade durch den Nordpol und der Punkt* x *aus den Punkten* $\{e_0 + t(x - e_0) \mid t \in \mathbb{R}\}$. *Der Schnittpunkt mit der Hyperebene*

$$\mathbb{R}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x, e_0\rangle = 0\}$$

entspricht dem Punkt $y = e_0 + t(x - e_0)$ *mit* $\langle y, e_0\rangle = 0$*:*

$$\langle e_0 + t(x - e_0), e_0\rangle = 1 - t + t\langle x, e_0\rangle = 0$$
$$\Rightarrow \quad t = \frac{1}{1 - \langle x, e_0\rangle} \text{ und } y = e_0 + \frac{x - e_0}{1 - \langle x, e_0\rangle}.$$

Die Länge des Bildvektors ist dann gegeben durch

$$\|y\| = \left\|e_0 + \frac{(x - e_0)}{1 - \langle x, e_0\rangle}\right\| = \left\|\frac{x - e_0\langle x.e_0\rangle}{1 - \langle x, e_0\rangle}\right\| = \sqrt{\frac{\langle x - \langle x, e_0\rangle e_0, x - \langle x, e_0\rangle e_0\rangle}{(1 - \langle x, e_0\rangle)^2}}$$
$$= \sqrt{\frac{1 - 2\langle x, e_0\rangle^2 + \langle x, e_0\rangle^2}{(1 - \langle x, e_0\rangle)^2}} = \sqrt{\frac{1 + \langle x, e_0\rangle}{1 - \langle x, e_0\rangle}}.$$

Also ist $\langle x, e_0\rangle$ gegeben durch

$$\langle x, e_0\rangle = \frac{\|y\|^2 - 1}{\|y\|^2 + 1}$$

und x ist gegeben durch

$$x = \langle x, e_0\rangle e_0 + (1 - \langle x, e_0\rangle)y \quad = \frac{\|y\|^2 - 1}{\|y\|^2 + 1}e_0 + \frac{2y}{\|y\|^2 + 1} \quad = \frac{(\|y\|^2 - 1)e_0 + 2y}{\|y\|^2 + 1},$$

wobei wir $\mathbb{R}^n$ als Teilmenge von $\mathbb{R}^{n+1}$ auffassen. Also ist die stereographische Projektion ein Homöomorphismus von $\mathbb{S}^n \setminus \{e_0\}$ nach $\mathbb{R}^n$. Wenn wir $\mathbb{S}^n$ an der Hyperebene $\mathbb{R}^n$ spiegeln und dann die stereographische Projektion benutzen, wird e_0 durch $-e_0$ ersetzt. Dann erhalten wir den Homöomorphismus

$$\mathbb{S}^n \setminus \{-e_0\} \to \mathbb{R}^n, \qquad x \mapsto y = -e_0 + \frac{x + e_0}{1 + \langle x, e_0\rangle}.$$

Indem wir e_0 durch $-e_0$ ersetzen erhalten wir die Umkehrabbildung

$$x = \frac{\frac{1}{\|y\|^2} - 1}{\frac{1}{\|y\|^2} + 1}e_0 + \frac{2\frac{1}{\|y\|}}{\frac{1}{\|y\|^2} + 1}\frac{y}{\|y\|} = \frac{(1 - \|y\|^2)e_0 + 2y}{1 + \|y\|^2}$$

Auf $\mathbb{S}^n \setminus \{e_0, -e_0\}$ werden beide Karten durch die analytische Abbildung

$$\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, y \to \frac{y}{\|y\|^2}$$

in einander überführt. Wegen Satz 1.10 (ii) ist $\mathbb{S}^n$ als eine nicht disjunkte Vereinigung zweier zusammenhängender Mengen zusammenhängend. Dadurch wird $\mathbb{S}^n$ zu einer zusammenhängendend differenzierbaren (analytischen) Mannigfaltigkeit.

(iv) *Sei $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion, deren Gradient ∇f keine gemeinsamen Nullstellen mit f hat. Dann gibt es aufgrund der Voraussetzung an f für jedes Element $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ der Nullstellenmenge ein $i \in \{0, \ldots, n\}$, so dass $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \neq 0$. Wegen dem Satz der impliziten Funktion gibt es dann eine genauso oft wie f stetig differenzierbare Funktion g von der Schnittmenge von $\{y \in \mathbb{R}^{n+1} \mid y_i = 0\}$ mit einer Umgebung von x nach $\mathbb{R}$, so dass die Schnittmenge der Nullstellenmenge von f mit der Umgebung von x gleich dem Graphen von g auf der Umgebung von x ist, also gleich der Menge $z(y) = y + g(y)e_i$ wobei y die Schnittmenge von $\{y \in \mathbb{R}^{n+1} \mid y_i = 0\}$ mit der Umgebung von x durchläuft. Die natürliche Projektion von der Umgebung von x auf diese Schnittmenge, die jedem z das y mit den* *gleichen Koordinaten, bis auf die i–te Koordinate, zuordnet (also $y = z - \langle z, e_i\rangle e_i$) ist offenbar glatt und die Umkehrabbildung von der Abbildung $y \mapsto y + g(y)e_i$. Deshalb ist die Schnittmenge der Nullstellenmenge von f mit der Umgebung von x diffeomorph zu einer offenen Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Offenbar ist die Nullstellenmenge als Teilmenge des $\mathbb{R}^{n+1}$ ein metrischer Raum. Also ist die Nullstellenmenge eine n–dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit.*

Mit der Funktion $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = \|x\|^2 - 1$ erhalten wir wieder, dass die n–dimensionale Sphäre eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist.

Bemerkung 1.19. *Anstatt von den Übergangsfunktionen zu fordern, dass sie unendlich oft differenzierbar sind, kann man auch r mal–stetig differenzierbar, oder analytisch oder (für komplexe Mannigfaltigkeiten, bei denen wir $\mathbb{R}^n$ durch $\mathbb{C}^n$ ersetzen) holomorphe Übergangsfunktionen fordern. Dann entstehen C^r bzw. analytische, bzw. komplexe Mannigfaltigkeiten. Wenn wir nur stetige Übergangsfunktionen fordern, sprechen wir von topologischen Mannigfaltigkeiten. Ein gesättigter Atlas (bzw. eine Äquivalenzklasse von verträglichen Atlanten) wird auch differenzierbare Struktur genannt. Es gibt im Allgemeinen viele verschiedene Äquivalenzklassen von Atlanten. Aber die meisten dieser differenzierbaren Strukturen werden durch Homöomorphismen aufeinander abgebildet.*

Übungsaufgabe 1.20. *Gebe einen Homöomorphismus von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ an, der die differenzierbare Struktur von dem Vektorraum $\mathbb{R}$ mit Norm $|\cdot|$ auf eine nicht verträgliche differenzierbare Struktur abbildet.*

Definition 1.21. *Zwei differenzierbare Mannigfaltigkeiten X und Y heißen diffeomorph, wenn es einen Homöomorphismus $\Phi : X \to Y$ gibt, dessen Verkettung mit allen Karten des Atlas von Y mit dem Atlas von X verträgliche Karten von X bilden.*

Die meisten nicht miteinander verträglichen differenzierbaren Strukturen einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit sind also diffeomorph. Diese Relation auf dem Raum aller differenzierbaren Strukturen ist offenbar eine weitere Äquivalenzrelation, neben der Verträglichkeit von Atlanten. Für eine gegebene differenzierbare Mannigfaltigkeit stellt sich dann die Frage, wieviel verschiedene nicht zueinander diffeomorphe differenzierbare Strukturen sie besitzt. Für den Fall von eindimensionalen Mannigfaltigkeiten lässt sich leicht zeigen, dass alle verschiedenen differenzierbaren Strukturen zueinander diffeomorph sind. Allgemein gilt, dass auf niedrigdimensionalen Mannigfaltigkeiten alle differenzierbaren Strukturen diffeomorph sind. Wenn die Dimension größer als vier ist, kann es verschiedene differenzierbare Strukturen geben. Im besonders schweren Fall der Dimension vier (z.B. $\mathbb{R}^4$) wurde durch eine von der Physik inspirierte Theorie von Donaldson in den achtziger Jahren gezeigt, dass es auch unendlich viele verschiedene nicht zueinander diffeomorphe differenzierbare Strukturen geben kann.

1.3 Differenzierbare Abbildungen

Definition 1.22. *Seien X und Y zwei differenzierbare Mannigfaltigkeiten, $p \in \mathbb{N}_0$ und $x \in X$. Dann heißt eine Abbildung $f : X \to Y$ in x p mal (stetig) differenzierbar (bzw. glatt), wenn für zwei mit den Atlanten von X bzw. Y verträgliche Karten $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ und $\psi : V \to \mathbb{R}^m$ mit $x \in U$, $f(x) \in V$ und $U \subset f^{-1}[V]$ folgende Abbildung von $\phi[U] \subset \mathbb{R}^n$ auf $\psi[V] \subset \mathbb{R}^m$ bei $\phi(x)$ p mal (stetig) differenzierbar bzw. glatt ist:*

$$\psi \circ f|_U \circ \phi^{-1} : \phi[U] \to \psi[V], y \mapsto \psi(f(\phi^{-1}(y))).$$

Diese Bedingung ist offenbar unabhängig von der Wahl der Karten. Für jedes $x \in X$ gibt es immer zwei Karten $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ und $\psi : V \to \mathbb{R}^M$ im Atlas von X bzw. Y mit $x \in U$ und $f(x) \in V$. Den Definitionsbreich U kann man dann immer so einschränken, dass $x \in U \subset f^{-1}[V]$ gilt.

Damit können wir die Differentialrechnung von dem $\mathbb{R}^n$ auf differenzierbare Mannigfaltigkeiten übertragen. Wir benutzen dabei immer lokal Karten und erhalten so Abbildungen von offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ auf offene Teilmengen des $\mathbb{R}^m$. Im Folgenden werden wir noch viele weitere Strukturen der Differentialrechnung auf dem $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{R}^m$ weiterentwickeln und mit Hilfe der Karten auf differenzierbare Mannigfaltigkeiten übertragen. Wichtig dabei ist, dass die entsprechenden Aussagen so formuliert werden, dass sie nicht von der Wahl der Karte aus dem Atlas abhängen.

Beispiel 1.23. *Im Folgenden werden wir $\mathbb{R}$ oder auch jeden endlichdimensionalen Vektorraum mit der differenzierbaren Struktur aus dem Beispiel (ii) ausstatten und als differenzierbare Mannigfaltigkeit ansehen. Also sind alle p mal stetig differenzierbaren Funktionen von X nach $\mathbb{R}$ wohldefiniert. Wir wollen diesen Raum $C^p(X, \mathbb{R})$ nennen. Weil die p mal differenzierbare Funktion von einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}$ eine Algebra bilden, ist auch $C^p(X, \mathbb{R})$ bzw. $C^\infty(X, \mathbb{R})$ eine Algebra.*

Übungsaufgabe 1.24. *Zeige, dass zwei differenzierbare Mannigfaltigkeiten X und Y genau dann diffeomorph sind, wenn es eine glatte Abbildung $f : X \to Y$ gibt, die bijektiv ist, und deren Umkehrabbildung auch glatt ist.*

Beispiel 1.25. (i) *Sei $\mathbb{R}^n$ der Euklidische n–dimensionale Raum mit dem Euklidischen Skalarprodukt. Dann ist die Abbildung*

$$f : x \mapsto f(x) = \frac{2x}{1 - \|x\|^2}$$

ein Diffeomorphismus von $B(0, 1) \subset \mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^n$. Sei nämlich $y = \frac{2x}{1-\|x\|^2}$. Dann gilt für $\|x\| < 1$ auch $\|x\|^2 > 0$. Also folgt $\|y\| = \frac{2\|x\|}{1-\|x\|^2}$ oder auch $\|y\|\|y\|^2 +$

$2\|x\| - \|y\| = 0$. *Also gilt*

$$\|x\| = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4\|y\|^2}}{2\|y\|} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \|y\|^2}}{\|y\|}.$$

Wegen $0 \leq \|x\| < 1$ *folgt*

$$\|x\| = \frac{\sqrt{1 + \|y\|^2} - 1}{\|y\|}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} x = \frac{y(1 - \|x\|^2)}{2} &= \frac{y}{2} \frac{\|y\|^2 - 1 + 2\sqrt{1 + \|y\|^2} - 1 - \|y\|^2}{\|y\|^2} \\ &= y \frac{\sqrt{1 + \|y\|^2} - 1}{(\sqrt{1 + \|y\|^2} + 1)(\sqrt{1 + \|y\|^2} - 1)} = \frac{y}{\sqrt{1 + \|y\|^2} + 1} \end{aligned}$$

Diese Abbildung ist für alle $y \in \mathbb{R}^n$ *wohldefiniert und das Bild liegt in* $B(0,1)$. *Die Abbildungen* f *und ihre Umkehrabbildung sind sogar analytische Abbildungen, also auch Diffeomorphismen von* $B(0,1)$ *auf* $\mathbb{R}^n$ *bzw.* $\mathbb{R}^n$ *nach* $B(0,1)$.

(ii) *Die Abbildung* $g : x \to \frac{x}{\|x\|^2}$ *ist offenbar eine Involution:*

$$\frac{\frac{x}{\|x\|^2}}{\|\frac{x}{\|x\|^2}\|^2} = \frac{x\|x\|^4}{\|x\|^2\|x\|^2} = x.$$

g *ist also ein analytischer Diffeomorphismus von* $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ *nach* $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. *Sie bildet das Äußere* $\{x \in \mathbb{R}^n | \|x\| > 1\}$ *der Einheitskugel auf* $B(0,1) \setminus \{0\}$ *ab. Zusammen mit der Abbildung* f *aus (i) ergibt sie einen analytischen Diffeomorphismus des Äußeren der Einheitskugel nach* $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

1.4 Zerlegung der Eins

In diesem Abschnitt führen wir eine sogenannte Zerlegung der Eins ein. Das ist eine abzählbare Familie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von nicht negativen glatten Funktionen mit Werten in dem Intervall $[0,1]$, deren Summe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = 1$ gleich Eins ist. Diese Summe soll dabei immer lokal endlich sein, d.h. für jedes x einer gegebenen Mannigfaltigkeit, soll es eine Umgebung geben, auf der nur endlich viele der Funktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht verschwinden. Dadurch ist die Summe immer eine endliche Summe und deshalb auch ohne Konvergenz wohldefiniert. Mithilfe einer solchen Zerlegung der Eins wollen wir die Funktionen bzw.

Vektorfelder bzw. Differentialformen (diese werden später eingeführt) in Summen von Funktionen bzw. Vektorfeldern bzw. Differentialformen zerlegen, die nur innerhalb einer kleinen offenen Menge nicht verschwinden. Also sollen die einzelnen Funktionen der Zerlegung der Eins nur innerhalb von (kleinen) offenen Mengen nicht verschwinden.

Definition 1.26. *Eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von reellen $[0,1]$–wertigen Funktionen auf einem topologischen Raum X heißt Zerlegung der Eins, wenn sie folgende Bedingungen erfüllt:*

(i) (Lokale Endlichkeit) *Für jedes $x \in X$ gibt es eine offene Umgebung U, auf der alle bis auf endlich viele Funktionen der Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ verschwinden.*

(ii) *Für alle $x \in X$ gilt $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) = 1$. Wegen (i) ist diese Summe immer endlich.*

In diesem Abschnitt beweisen wir den folgenden Satz.

Satz 1.27. *(Existenz einer glatten Zerlegung der Eins) Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von X. Dann gibt es eine glatte Zerlegung der Eins $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf X, so dass alle Funktionen f_n außerhalb einer kompakten Teilmenge einer der offenen Mengen $U_n \in \mathcal{U}$ der Übereckung verschwinden.*

Wenn zu jeder offenen Überdeckung $\mathcal{U}$ eine solche Zerlegung der Eins $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existiert, dann gibt es offenbar eine Folge $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von offenen Mengen in $\mathcal{U}$, so dass jedes f_n außerhalb von U_n verschwindet. Wegen der Bedingung (ii) ist die Folge $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare offene Teilüberdeckung von $\mathcal{U}$ sein. Insbesondere ist X ein Lindelöfraum. Wir betrachten zunächst lokalkompakte Hausdorffräume.

Definition 1.28. *Ein topologischer Raum heißt lokalkompakt, wenn jeder Punkt eine kompakte Umgebung besitzt. Eine Teilmenge mit kompaktem Abschluss heißt relativkompakt.*

Wegen Heine-Borel sind alle endlichdimensionalen euklidischen Räume $\mathbb{R}^n$ lokal kompakt. Deshalb ist ein topologischer Raum mit einem Atlas lokal kompakt. Also sind differenzierbare Mannigfaltigkeiten lokal kompakte topologische Hausdorffräume.

Satz 1.29. *Für einen lokalkompakten Hausdorffraum X ist folgendes äquivalent:*

(i) *Es gibt eine wachsende Folge $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ offener relativ kompakter Teilmengen von X, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\bar{O}_n \subset O_{n+1}$ und $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} O_n = X$.*

(ii) *X ist eine abzählbare Vereinigung von kompakten Mengen.*

(iii) *X ist ein Lindelöfraum*

Beweis: Die abzählbare Vereinigung $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bar{O}_n$ der kompakten Mengen $(\bar{O}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus (i) überdeckt X, und (ii) folgt aus (i).

Wenn X (ii) erfüllt, dann wird jede der kompakten Teilmengen durch endlich viele Elemente einer offenen Überdeckung von X überdeckt. Die abzählbare Vereinigung aller dieser endlichen Teilüberdeckungen bildet eine abzählbare Teilüberdeckung von ganz X. Also folgt (iii) aus (ii).

Sei jetzt X ein lokalkompakter Hausdorff– und Lindelöfraum. Dann besitzt jedes $x \in X$ eine kompakte Umgebung K_x. Wir zeigen jetzt, dass K_x in X abgeschlossen ist. Sei also $y \in X \setminus K_x$, Dann gibt es für jeden Punkt $z \in K_x$ zwei disjunkte offene Mengen V_z und U_z, mit $y \in V_z$ und $z \in U_z$. Die offene Überdeckung $(U_z)_{z\in K_x}$ von K_x besitzt eine endliche Teilüberdeckung. Die Schnittmenge V der entsprechenden V_z's ist eine Umgebung von y und disjunkt von der Vereinigung der entsprechenden U_z's also von K_x. Also ist y nicht im Abschluss von K_x enthalten, und damit K_x abgeschlossen. Für alle $x \in X$ sei also $W_x \subset K_x$ in X offen mit $x \in W_x$. Die Schnittmenge $\bar{W}_x \cap K_x$ des Abschlusses $\bar{W}_x$ in X ist dann abschlossenen, also gleich $\bar{W}_x$. Jede Überdeckung von $\bar{W}_x$ durch offenen Teilmengen von K_x wird durch hinzufügen von $K_x \setminus \bar{W}_x$ zu einer Überdeckung von K_x, die eine endliche Teilüberdeckung besitzt. Also ist $\bar{W}_x$ kompakt. Damit gibt es für jedes $x \in X$ eine offene Umgebung W_x mit kompaktem Abschluss. Sei $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare Teilüberdeckung der offenen Überdeckung $(W_x)_{x\in X}$. Wir definieren induktiv eine aufsteigende Folge $\{1\} = N_1 \subset N_2 \subset \ldots$ von endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ folgendes gilt:
(i) $n + 1 \in N_{n+1}$, **(ii)** $(W_m)_{m\in N_{n+1}}$ ist eine endliche Überdeckung von $\bigcup_{m\in N_n} \bar{W}_m$.
Dann erfüllt die Folge $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $O_n = \bigcup_{m\in N_n} W_m$ die Bedingung (i). **q.e.d.**

Man kann zeigen[1], dass jeder lokalkompakte Hausdorffraum X, der eine dieser Bedingungen erfüllt, metrisierbar ist, d.h. es gibt eine Metrik auf X mit den gleichen offenen Mengen wie X. Außderdem ist ein metrischer Raum genau dann ein Lindelöfraum, wenn er eine abzählbare dichte Teilmenge enthält, also separabel ist. Insbesondere sind alle differenzierbaren Mannigfaltigkeiten separabel und metrisierbar.

Lemma 1.30. *Zu jeder offenen Überdeckung $\mathcal{U}$ einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit X gibt es eine Folge $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Karten mit Definitionsbereichen $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so dass*

(i) *Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist ϕ_n ein Diffeomorphismus von U_n auf einen Ball $B(0, 2) \subset \mathbb{R}^m$.*

(ii) *$(\phi_n^{-1}[B(0, 1)])_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine offene Überdeckung von X.*

[1] Dazu zeigt man zuerst, dass jeder lokal kompakte Hausdorffraum regulär ist, d.h. für jedes Paare (x, A) von einem Punkt x und einer abgeschlossenen Menge A mit $x \notin A$ sind x und A jeweils in einer von zwei disjunkten offenen Mengen enthalten. Danach folgt aus Chapter 6, Lemma 4.4 in J.M. Munkres: Topology, dass ein regulärer Lindelöfraum parakompakt ist. Zuletzt zeigt Chapter 6, Theorem 5.1 aus J.M. Munkres: Topology, dass ein solcher Raum mit einem Atlas metrisierbar ist.

(iii) *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist U_n in einer offenen Menge von $\mathcal{U}$ enthalten.*

(iv) *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist U_n mit höchstens endlich vielen Elementen von $(U_m)_{m\in\mathbb{N}}$ nicht schnittfremd.*

Beweis: Jeder Punkt $x \in X$ der differenzierbaren Mannigfaltigkeit X ist im Definitionsbreich einer glatten Karte ϕ_x enthalten, die x auf 0 abbildet. Außerdem ist x in einer der offenen Mengen der Überdeckung enthalten. Indem wir die Karten $(\phi_x)_{x\in X}$ auf kleine offene Umgebungen von x einschränken, und gegebenfalls um einen geeigneten positiven Faktor strecken, erhalten wir Karten $(\phi_x)_{x\in X}$, die $\phi_x(x) = 0$ und sowohl (i) als auch (iii) erfüllen. Also gibt es für jede Überdeckung $\mathcal{U}$ von X eine Überdeckung von X durch Definitionsbreiche von Karten $(\phi_x)_{x\in X}$, die $\phi_x(x) = 0$, (i) und (iii) erfüllen.

Die differenzierbare Mannigfaltigkeit X ist ein lokalkompakter Hausdorff– und Lindelöfraum. Deshalb gibt es eine Folge $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von offenen Mengen, die (i) aus dem Satz 1.29 erfüllt. Wir ergänzen $O_0 = O_{-1} = \emptyset$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ liegt jedes $x \in \bar{O}_n \setminus O_{n-1}$ im Definitionsbreich einer glatten Karte von X, die x auf 0 abbildet und die Bedingungen (i) und (iii) erfüllt. Zusätzlich können wir annehmen, dass der Definitionsbreich in der offenen Umgebung $O_{n+1} \setminus \bar{O}_{n-2}$ von x enthalten ist. Dann besitzt die kompakte Teilmenge $\bar{O}_n \setminus O_{n-1}$ eine endliche Teilüberdeckung durch die Urbilder der offenen Bälle $B(0, 1)$ bezüglich dieser Karten. Also besitzt $\bar{O}_1$ eine endliche Überdeckung durch die Urbilder von $B(0, 1)$ bezüglich solcher Karten, deren Definitionsbereiche in O_2 enthalten sind. Und $\bar{O}_2 \setminus O_1$ besitzt eine endliche Überdeckung durch die Urbilder von $B(0, 1)$ bezüglich solcher Karten, deren Definitionsbreiche in O_3 enthalten sind. Alle diese abzählbar vielen endlichen Überdeckungen erfüllen zusammen offenbar (i)-(iii). Die Definitionsbereiche der Karten der Überdeckungen von $\bar{O}_n \setminus O_{n-1}$ und $\bar{O}_m \setminus O_{m-1}$ sind in $O_{n+1} \setminus \bar{O}_{n-2}$ bzw. $O_{m+1} \setminus \bar{O}_{m-2}$ enthalten, also für $|n - m| > 2$ schnittfremd. Deshalb erfüllen alle diese Karten zusammen auch die Bedingung (iv). **q.e.d.**

Beweis der Existenz der Zerlegung der Eins (Satz 1.27): Seien $a < b$ zwei reelle Zahlen. Dann ist die reelle Funktion $f_{a,b} : \mathbb{R} \to [0, 1], \quad x \mapsto f_{a,b}(x)$ mit

$$f_{a,b}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \le a \\ \exp(\frac{1}{x-b} \exp(\frac{1}{a-x})) & \text{für } a < x < b \\ 0 & \text{für } b \le x \end{cases}$$

eine glatte Funktion. Für alle $r > 0$ ist dann die Funktion $g(x) = f_{1,3/2}(\|x\|)$ eine glatte Funktion auf dem $\mathbb{R}^n$, die auf $B(0, 1)$ gleich 1 ist und außerhalb von $B(0, 3/2)$ verschwindet. Sei für alle $n \in \mathbb{N}$ $\phi_n : U_n \to B(0, 1)$ die Folge von Karten, die (i)–(iv) aus dem vorangehenden Lemma erfüllt. Dann setzen wir die Funktion $h_n = g \circ \phi_n$ zu einer glatten Funktion auf X fort, indem wir sie außerhalb des Definitionsbereichs U_n

der Karte ϕ_n gleich Null setzen. Wir definieren jetzt eine Zerlegung der Eins $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$f_n = h_n \prod_{l=1}^{n-1}(1-h_l) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Dann folgt induktiv für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$f_1 + \ldots + f_n + f_{n+1} = 1 - \prod_{l=1}^{n}(1-h_l) + h_{n+1}\prod_{l=1}^{n}(1-h_l) = 1 - \prod_{l=1}^{n+1}(1-h_l).$$

Wegen der Bedingung (ii) ist jedes $x \in X$ für ein $n \in \mathbb{N}$ in $\phi_n^{-1}[B(0,1)] \subset U_n$ enthalten. Wegen der Bedingung (iv) sind auf U_n nur endlich viele Funktionen h_n ungleich Null. Deshalb erfüllt diese Folge die Bedingung der lokalen Endlichkeit. Auf $\phi^{-1}[B(0,1)]$ ist $(1-h_n)$ gleich Null. Deshalb ist die Summe $\sum f_n$ aller f_n überall gleich Eins. Wegen der Bedingung (iii) verschwindet jedes f_n außerhalb der kompakten Teilmenge $\phi^{-1}[\overline{B(0,3/2)}]$ einer der offenen Mengen von $\mathcal{U}$. **q.e.d.**

Zum Abschluss können wir noch alle Elemente einer solchen Zerlegung der Eins, die außerhalb derselben offenen Menge in $\mathcal{U}$ verschwinden, zu einer Funktion aufsummieren. Das ist wegen der lokalen Endlichkeit offenbar möglich. Dadurch können wir erreichen, dass die abzählbare Familie der Funktionen der Zerlegung der Eins durch eine höchstens abzählbare Teilüberdeckung von $\mathcal{U}$ durchnummeriert wird.

Korollar 1.31. *Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $A \subset X$ eine Teilmenge und g eine reelle Funktion auf A. Gibt es für jedes $x \in \bar{A}$ im Abschluss von A eine offene Umgebung V_x von x in X und eine glatte Funktion f_x auf V_x, die auf $V_x \cap A$ mit g übereinstimmt, dann gibt es für jede offene Menge U, die $\bar{A}$ enthält eine glatte Funktion f auf X, die auf A mit g übereinstimmt, und außerhalb von U verschwindet.*

Beweis: Wir schränken für alle $x \in A$ die Menge V_x und die Funktion f_x auf $V_x \cap U$ ein. Für alle $x \in X \setminus \bar{A}$ sei V_x eine offene Umgebung von x in $X \setminus A$ und $f_x = 0$ auf dieser Menge. Die offene Überdeckung $(V_x)_{x\in X}$ von X besitzt eine abzählbare Teilüberdeckung $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit entsprechenden Funktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und einer entsprechenden Zerlegung der Eins $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Die Funktion $f = \sum_{n\in\mathbb{N}} h_n f_n$ leistet das Gewünschte. **q.e.d.**

Wir nennen Funktionen g, die die Bedingungen des Korollars erfüllen auf $\bar{A}$ unendlich oft differenzierbar. Analog werden r mal stetig differenzierbare Funktionen auf abgeschlossenen Teilmengen von differenzierbaren Mannigfaltigkeiten definiert.

1.5 Tangentialraum

In diesem Abschnitt wollen wir den Begriff der Tangentialvektoren auf differenzierbare Mannigfaltigkeiten verallgemeinern. In jedem Punkt des $\mathbb{R}^n$ können wir den Raum aller infinitesimalen Richtungen von differenzierbaren Funktionen von reellen Intervallen in den $\mathbb{R}^n$ mit dem $\mathbb{R}^n$ identifizieren. Durch die Karten des Atlases können wir das auch für differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Um diese Tangentialvektoren, die die infinitesimalen Richtungen auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit beschreiben, aber so einzuführen, dass ihre Definition nicht von der Wahl der Karte abhängen, definieren wir zunächst eine Äquivalenzrelation auf dem Raum der Abbildungen zwischen zwei differenzierbaren Mannigfaltigkeiten.

Definition 1.32. *Seien X und Y zwei differenzierbare Mannigfaltigkeiten und $x \in X$. Außerdem seien f_1 und f_2 zwei auf einer offenen Umgebung von x stetige und in x differenzierbare Abbildungen nach Y. Wir sagen, dass sich die beiden Abbildungen f_1 und f_2 in dem Punkt x berühren, wenn $f_1(x) = f_2(x) = y$ und bezüglich einer Karte ϕ von X im Punkt x und einer Karte ψ von Y im Punkt y die Ableitung von $\psi \circ f_1 \circ \phi^{-1}$ und $\psi \circ f_2 \circ \phi^{-1}$ im Punkt $\phi(x)$ als lineare Abbildung von $\mathbb{R}^m$ nach $\mathbb{R}^n$ übereinstimmen.*

Wegen der Kettenregel ist diese Aussage unabhängig von den Karten ϕ und ψ von X bzw. Y in den Punkten x bzw. y. Aus der Definition folgt auch sofort, dass diese Relation eine Äquivalenzration zwischen solchen Abbildungen ist.

Definition 1.33. *Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $x \in X$. Die Menge der Äquivalenzklassen aller stetigen im Punkt 0 differenzierbaren und sich dort berührenden Abbildungen von $(-\epsilon, \epsilon)$ nach X, die 0 auf x abbilden, heißt Tangentialraum von X im Punkt x und wird mit $T_x X$ bezeichnet. Seine Elemente heißen Tangentialvektoren im Punkt x.*

Für alle $v, w \in \mathbb{R}^m$ ist die Abbildung $t \mapsto w + vt$ unendlich oft differenzierbar und hat an der Stelle Null die Ableitung $t \mapsto tv$. Umgekehrt berührt jede im Punkt 0 differenzierbare Abbildung $x : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^m$, mit $x(0) = w$, die Abbildung $t \mapsto w + tv$ mit $v = \dot{x}(0)$ im Punkt $t = 0$. Dadurch wird der Tangentialraum $T_w W$ von einer offenen Teilmenge $W \subset \mathbb{R}^m$ im Punkt $w \in W$ auf eindeutige Art und Weise mit dem Vektorraum $v \in \mathbb{R}^m$ identifiziert. Für jede in 0 differenzierbaren Abbildungen $(-\epsilon, \epsilon) \to W$, die 0 auf $w \in W$ abbildet, ist die Verkettung mit einer in $w \in W$ differenzierbare Abbildung $f : W \to \mathbb{R}^n$ eine in 0 differenzierbare Abbildung $(-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^n$, die 0 auf $f(w)$ abbildet. Die Verkettung mit f bildet dabei sich berührende Abbildungen auf sich berührende Abbildungen ab und induziert also ein Abbildung $T_x(f) : T_x W \to T_{f(x)}\mathbb{R}^n$. Wenn wir dabei $T_x W$ mit $\mathbb{R}^m$, und $T_{f(x)}\mathbb{R}^n$ mit $\mathbb{R}^n$ identifizieren, dann wird $T_x(f)$ mit $v \mapsto \frac{d}{dt}|_{t=0} f(w + tv) = f'(w)(v)$ idenifiziert. Dadurch induziert f die Abbildung

$$f'(w) : \mathbb{R}^m \simeq T_w W \to \mathbb{R}^n \simeq T_{f(w)}\mathbb{R}^n.$$

Weil die Ableitung eine lineare Abbildung ist, ist diese Abbildung eine lineare Abbildung von dem Vektorraum $\mathbb{R}^m$ in den Vektorraum $\mathbb{R}^n$. Das wollen wir auf differenzierbare Abbildungen zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten übertragen.

Beispiel 1.34. *Wir hatten schon gesehen, dass sich für alle $x \in \mathbb{R}^m$ der Tangentialraum $T_x\mathbb{R}^m$ auf natürliche Weise mit $\mathbb{R}^m$ identifizieren lässt. Wenn allgemeiner V ein normierter Vektorraum ist, dann ist für alle $w, v \in V$ die Abbildung $t \mapsto w + tv$ unendlich oft differenzierbar, und die Ableitung ist gegeben durch $t \mapsto tv$. Jede differenzierbare Abbildung $(-\epsilon, \epsilon) \to V$, $t \mapsto v(t)$, die 0 auf w abbildet, berührt offenbar genau die den Vektoren w und $v = \frac{dv(t)}{dt}|_{t=0}$ entsprechende obige Abbildung. Dadurch wird der Tangentialraum T_wV auf natürliche Weise mit V identifiziert.*

Definition 1.35. *Sei $f : X \to Y$ eine in $x \in X$ differenzierbare Abbildung zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten und seien $\phi : U \to \mathbb{R}^m$ und $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ Karten von X und Y mit $x \in U$ und $f(x) \in V$. Dann ist $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ eine in $\phi(x)$ differenzierbare Abbildung von $W = \phi[f^{-1}[V] \cap U] \subset \mathbb{R}^m$ nach $\mathbb{R}^n$. Die Verkettung mit $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ bildet sich in 0 berührende Abbildungen $(-\epsilon, \epsilon) \to W$, die 0 auf $\phi(x)$ abbilden, auf sich in 0 berührende Abbildungen $(-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^n$ ab, die 0 auf $\psi(f(x))$ abbilden. Deshalb induziert die Verkettung mit f eine Abbildung vom Tangentialraum T_xX von X bei $x \in X$ in den Tangentialraum $T_{f(x)}Y$ von Y bei $f(x) \in Y$. Diese Abbildung wird mit $T_x(f)$ bezeichnet. Die Vereinigung aller dieser Abbildungen wird mit $T(f)$ bezeichnet:*

$$T(f) : TX = \bigcup_{x \in X} T_xX \to TY = \bigcup_{y \in Y} T_yY.$$

Satz 1.36. **(i)** *Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $x \in X$. Dann induziert jede Karte ϕ um $x \in X$ eine bijektive Abbildung $T_x(\phi)$ von T_xX auf den Vektorraum $T_{\phi(x)}\mathbb{R}^m$. Dieser Isomorphismus induziert auf T_xX eine Vektorraumstruktur über $\mathbb{R}$, die nicht von der Karte ϕ abhängt.*

(ii) *Sei $f : X \to Y$ eine im Punkt $x \in X$ differenzierbare Abbildung zwischen den differenzierbaren Mannigfaltigkeit X und Y. Dann ist die folgende Abbildung linear:*

$$T_x(f) : T_xX \to T_{f(x)}Y.$$

(iii) *Seien $f : X \to Y$ in $x \in X$ und $g : Y \to Z$ in $f(x)$ differenzierbare Abbildungen zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten. Dann ist $g \circ f$ in x differenzierbar und es gilt*

$$T_x(g \circ f) = T_{f(x)}(g) \circ T_x(f).$$

(iv) *Eine differenzierbare Abbildung $f : X \to Y$ zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten ist genau dann lokal konstant, wenn $T_x(f) = 0$ für alle $x \in X$.*

(v) *Zwei differenzierbare Abbildungen $f : X \to Y$ und $g : X \to Y$ zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten berühren sich genau dann, im Punkt $x \in X$, wenn gilt $f(x) = g(x)$ und $T_x(f) = T_x(g)$.*

Beweis: Wir zeigen zuerst (iii): Seien also $f : X \to Y$ in $x \in X$ und $g : Y \to Z$ in $f(x)$ differenzierbar, und seien $\phi : U \to \mathbb{R}^m$, $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ und $\xi : W \to \mathbb{R}^l$ Karten von X, Y und Z mit $x \in U$, $f(x) \in V$ und $g(f(x)) \in W$. Sei $V' = g^{-1}[W] \cap V$ und $U' = f^{-1}[V'] \cap U$. Dann ist $\xi \circ g \circ \psi^{-1}$ eine in $\psi(f(x))$ differenzierbare Abbildung von $\psi'[V'] \subset \mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^l$ und $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ eine in $\phi(x)$ differenzierbare Abbildung von $\phi[U'] \subset \mathbb{R}^m$ nach $\psi[V'] \subset \mathbb{R}^n$. Ihre Verkettung ist die in $\phi(x)$ differenzierbare Abbildung $\xi \circ g \circ f \circ \phi^{-1}$ von $\phi[U'] \subset \mathbb{R}^m$ nach $\mathbb{R}^l$. Das zeigt, dass $g \circ f$ in x differenzierbar ist, wenn f in x und g in $f(x)$ differenzierbar sind.

Für jede in 0 differenzierbare Abbildung $y : (-\epsilon, \epsilon) \to X$, die 0 auf x abbildet, ist $f \circ y$ eine in 0 differenzierbare Abbildung $(\epsilon, \epsilon) \to Y$, die 0 auf $f(x)$ abbildet. Die Verkettung $g \circ (f \circ y)$ von $f \circ y$ mit g ist dann eine in 0 differenzierbare Abbildung, die 0 auf $g(f(x))$ abbildet. Wegen $g \circ (f \circ y) = (g \circ f) \circ y$ ist diese Abbildung auch die Verkettung von y mit $g \circ f$. Dann folgt $T_x(g \circ f) = T_{f(x)}(g) \circ T_x(f)$ aus der Definition von $T_x(f)$, $T_{f(x)}(g)$ und $T_x(g \circ f)$. Das zeigt (iii).

Offenbar gilt $T_x(\mathbb{1}_X) = \mathbb{1}_{T_xX}$ für jede differenzierbare Mannigfaltigkeit X und $x \in X$. Dann folgt aus (iii), dass für jede Karte $\phi : U \to \mathbb{R}^m$ und jedes $x \in U$ die Abbildung $T_{\phi(x)}(\phi^{-1})$ die inverse von $T_x(\phi)$ ist. Also sind alle diese Abbildungen bijektiv.

Als nächstes wählen wir in der Situation von (ii) zwei Karten $\phi : U \to \mathbb{R}^m$ von X und $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ von Y mit $x \in U$ und $f(x) \in V$. Dann ist $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ eine in $\phi(x)$ differenzierbare Abbildung von $\phi[f^{-1}[V] \cap U] \subset \mathbb{R}^m$ nach $\mathbb{R}^n$. Ihre Tangentialabbildung $T_{\phi(x)}(\psi \circ f \circ \phi^{-1})$ ist dann die lineare Abbildung

$$(\psi \circ f \circ \phi^{-1})'(\phi(x)) : \mathbb{R}^m \simeq T_{\phi(x)}\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \simeq T_{\psi(x)}\mathbb{R}^n.$$

Für den Fall $Y = X$ and $f = \mathbb{1}_X$ folgt, dass die Karten ϕ und ψ auf T_xX die gleiche Vektorraumstruktur definieren, also (i). Danach folgt (ii).

Die beiden Aussagen (iv) und (v) sind für offene Teilmengen $X \subset \mathbb{R}^m$ und $Y \subset \mathbb{R}^n$ klar. Der allgemeine Fall folgt dann aus (i)-(iii). **q.e.d.**

Wir können jetzt den Satz der inversen Funktion umformulieren.

Satz 1.37. *Sei $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ und $f : X \to Y$ eine r mal stetig differenzierbare Abbildung zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten. Wenn $T_x(f)$ für ein $x \in X$ invertierbar ist, dann gibt es offene Umgebungen $U \ni x$ und $V \ni f(x)$, so dass $f|_U$ ein Homöomorphismus von U auf V ist und $(f|_U)^{-1}$ r mal stetig differenzierbar ist.*

Beweis: Wähle Karten $\Phi : U \to \mathbb{R}^m$ von X und $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ mit $x \in U$ und $f(x) \in V$ und wende den Satz der inversen Funktion auf $\psi \circ f \circ \phi^{-1}|_{\phi[f^{-1}[V] \cap U]}$ bei $\phi(x)$ an.**q.e.d.**

Definition 1.38. *Der Rang einer differenzierbaren Abbildung $f : X \to Y$ zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten bei $x \in X$ ist der Rang von $T_x(f) : T_xX \to T_{f(x)}Y$.*

Eine glatte Abbildung f heißt Immersion, wenn $\operatorname{Rang}(T_x(f)) = \dim T_xX$ *für $x \in X$ gilt.*

Eine glatte Abbildung f heißt Submersion, wenn $\operatorname{Rang}(T_x(f)) = \dim T_{f(x)}Y$ *für $x \in X$ gilt.*

Aus der Linearen Algebra wissen wir, dass für eine lineare Abbildung $A : V \to W$ zwischen endlich dimensionalen Vektorräumen folgendes gilt:

$$\operatorname{Rang}(A) = \dim V \iff A \text{ ist injektiv }.$$

$$\operatorname{Rang}(A) = \dim W \iff A \text{ ist surjektiv }.$$

Deshalb sind die Immersionen also die Abbildungen, deren Ableitungen $T_x(f)$ für alle $x \in X$ injektiv sind, und die Submersionen die Abbildungen, deren Ableitungen $T_x(f)$ für alle $x \in X$ surjektiv sind. Insbesondere sind alle Diffeomorphismen sowohl Immersionen als auch Submersionen. Aber nicht alle glatten Abbildungen f, die sowohl Immersionen als auch Submersionen sind, sind auch Diffeomorphismen.

Beispiel 1.39. *Sei*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1, \quad x \mapsto (\cos(x), \sin(x)).$$

Dann ist f offenbar unendlich oft differenzierbar. Für $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$ ist $f(x) \neq (1, 0)$. Die Verkettung von f mit der stereographischen Projektion ist also gleich

$$x \mapsto y \textit{ mit } y = \frac{\sin(x)}{1 - \cos(x)}.$$

Die Ableitung dieser Abbildung ist

$$y' = \frac{\cos(x)(1 - \cos(x)) - \sin^2(x)}{(1 - \cos(x))^2} = \frac{\cos(x) - 1}{(1 - \cos(x))^2} = \frac{1}{1 - \cos(x)}.$$

Also ist diese Abbildung für $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$ sowohl eine Immersion als auch eine Submersion. Für $x \notin \pi + 2\pi\mathbb{Z}$ gilt $f(x) \neq (-1, x)$. Dann ist die Verkettung von f mit der gespiegelten stereographischen Projektion gleich

$$x \mapsto y \textit{ mit } y = \frac{\sin(x)}{1 + \cos(x)}.$$

Für die Ableitung gilt

$$y' = \frac{\cos(x)(1 + \cos(x)) + \sin^2(x)}{(1 + \cos(x))^2} = \frac{\cos(x) + 1}{(1 + \cos(x))^2} = \frac{1}{1 + \cos(x)}$$

Also ist f eine Immersion und eine Submersion, aber kein Diffeomorphismus, weil f nicht injektiv ist. f ist zwar lokal ein Diffeomorphismus, aber nicht global.

Wegen dem Satz der inversen Funktion können wir für jede Immersion $f : X \to Y$ und jedes $x \in X$ Umgebungen U von x und V von $f(x)$ finden, so dass V diffeomorph ist zu dem kartesischen Produkt von U mit einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ mit $n = \dim T_{f(x)}Y - \dim T_xX$. Dadurch wird f mit einer Einbettung von U nach V identifiziert. Lokal ist also jede Immersion injektiv, aber nicht global.

Analog können wir auch wegen dem Satz der impliziten Funktion für jede Submersion $f : X \to Y$ und jedes $x \in X$ Umgebungen U von x und V von $f(x)$ finden, so dass U diffeomorph ist zu dem kartesischen Produkt von V mit einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ mit $n = \dim T_xX - \dim T_{f(x)}Y$. Dadurch wird f mit der natürlichen Projektion von U nach V identifiziert. Lokal ist also jede Submersion surjektiv, aber nicht global.

Wir nennen glatte Abbildungen, die sowohl Immersionen als auch Submersionen sind, lokale Diffeomorphismen. Dann sind alle bijektiven lokalen Diffeomorphismen auch globale Diffeomorphismen. Insbesondere sind verträgliche Karten Diffeomorphismen von offenen Teilmengen der Mannigfaltigkeit auf offene Teilmengen des $\mathbb{R}^n$.

Wir können weiter Begriffe der Differentialrechnung mehrerer Veränderlicher auf differenzierbare Mannigfaltigkeiten übertragen. So heißt ein Punkt $x \in X$ einer differenzierbaren Funktion $f : X \to Y$ zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten kritischer Punkt, wenn $T_x(f) = 0$ gilt. Lokale Extremwerte von reellen Funktionen sind entweder lokale Minima oder lokale Maxima. Alle lokalen Extremwerte von differenzierbaren reellen Funktionen sind auch kritische Punkte.

Wir führen jetzt eine zweite Charakterisierung der Elemente des Tangentialraumes ein. Für $s \in \mathbb{R}$ sei $1_{T_s\mathbb{R}}$ die Äquivalenzklasse von $(-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R},\ t \mapsto t + s$. Für eine differenzierbare Mannigfaltigkeit X, $x \in X$ und $v \in T_xX$ definieren wir

$$D_v : C^1(X, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \qquad \text{mit} \qquad T_x(f)(v) = D_v(f) 1_{T_{f(x)}\mathbb{R}}.$$

Wenn $y : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}$ ein Repräsentat von $v \in T_xX$ ist, dann ist $v = T_0(y)(1_{T_0\mathbb{R}})$ und

$$T_x(f)(v) = T_x(f) \circ T_0(y)(1_{T_0\mathbb{R}}) = T_0(f \circ y)(1_{T_0\mathbb{R}}) = \tfrac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(y(t)) 1_{T_{f(x)}\mathbb{R}}.$$

Also ist $D_v(f) = \frac{d}{dt}\big|_{t=0} f(y(t))$ und D_v $\mathbb{R}$–linear und erfüllt die Leibnizregel:

$$D_v(fg) = f(x)D_v(g) + D_v(f)g(x) \quad \text{für alle} \quad f, g \in C^1(X, \mathbb{R}).$$

Satz 1.40. *(von Hadamard und Bohnenblust) Sei $D : C^\infty(X, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $f \mapsto D(f)$ eine $\mathbb{R}$–lineare Abbildung die $D(fg) = f(x)D(g) + D(f)g(x)$ für alle $f, g \in C^\infty(X, \mathbb{R})$ und ein $x \in X$ erfüllt. Dann gibt es genau ein $v \in T_xX$ mit $D = D_v$.*

Beweis: Wegen der Leibnizregel definiert jedes $v \in T_xX$ eine solche Derivation D_v.

Sei jetzt umgekehrt D eine beliebige Derivation, die obige Eigenschaften hat. Aus $D(1) = D(1 \cdot 1) = 2D(1)$ folgt, $D(1) = 0$. Deshalb stimmen für alle $f \in C^\infty(X, \mathbb{R})$

die Werte $D(f)$ mit $D(f - f(x)1)$ überein. Die Funktion $f - f(x)1 \in C^\infty(X, \mathbb{R})$ verschwindet bei x. Umgekehrt folgt $D(fg) = 0$ aus $f(x) = 0 = g(x)$. Also verschwindet D auf allen Produkten von glatten Funktionen, die bei x verschwinden.

Sei $\phi : U \to \mathbb{R}^m$ eine verträgliche Karte, mit $x \in U$, $\phi(x) = 0$ und $B(0, r) \subset \phi[U]$. Dann verschwinden $\phi_1, \ldots, \phi_m \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ bei $x = 0$. Die glatte Funktion

$$h : X \to \mathbb{R}, x \mapsto h(x) = \begin{cases} f_{r/2,3r/4}(|\phi(x)|) & \text{für } x \in U \\ 0 & \text{für } x \notin U \end{cases}$$

(mit $f_{r/2,3r/4}$ aus dem letzten Abschnitt) ist 1 auf $\phi^{-1}[B(0, r/2)]$ und verschwindet außerhalb von $\phi^{-1}[B(0, 3r/4)]$. Dann ist $1 - (1 - h)^2 = 2h - h^2$ und $(1 - h)^2$ eine glatte Zerlegung der Eins zu der Überdeckung $X = U \cup (X \setminus \phi^{-1}[\overline{B(0, r/2)}]$. Für $f \in C^\infty(X.\mathbb{R})$ gilt dann $D(f) = D((2h - h^2)f) + D(1 - h)^2 f) = D(2h - h^2)f)$. Weil das für alle hinreichend kleinen $r > 0$ gilt, stimmt D auf allen solchen Funktionen überein, die auf einer beliebig kleinen Umgebung von x übereinstimmen (man spricht dann auch von dem Funktionskeim in x). Für hinreichend kleine $\epsilon > 0$ definiert

$$y : (-\epsilon, \epsilon) \to X, \quad t \to \phi(t(D(h\phi_1), \ldots, D(h\phi_n)))$$

eine glatte Abbildung mit $y(0) = x$. Die entsprechende Äquivalenzklasse wollen wir $v \in T_x X$ nennen. Die Abbildung y is so definiert, dass $\phi \circ y(t) = t(D(h\phi_1), \ldots, D(h\phi_n))$ gilt. Insbesonder stimmen D und D_v auf den Funktionen $h\phi_1, \ldots, h\phi_m$ überein.

Zuletzt zerlegen wir die Differenz $f - f(x)$ auf einer Umgebung von x in eine Summe von Produkten von $\phi_1, \ldots, \phi_n$ mit glatten Funktionen. Für alle $\varphi \in B(0, r)$ gilt

$$g(\varphi) - g(0) = \int_0^1 \frac{d}{dt} g(t\varphi) dt = \int_0^1 \varphi \cdot \nabla g(t\varphi) dt = \varphi \cdot \int_0^1 \nabla g(t\varphi) dt.$$

Deshalb ist $g - g(0)$ eine Summe von Produkten der Komponenten des Koordinatenvektors φ mit glatten Funktionen, die bei $\varphi = 0$ mit den entsprechenden partiellen Ableitungen von g bei 0 übereinstimmen. Dann ist auch $h(f - f(x))$ eine Summe von Produkten von $h\phi_1, \ldots, h\phi_n$ mit glatten Funktionen. Wegen der Derivationseigenschaft verschwindet dann $D - D_v$ auf $h\phi_1, \ldots, h\phi_m$, und damit auch auf f. **q.e.d.**

Zum Abschluss fassen wir die Definition des Tangentialraumes nochmal zusammen. Für jeden Vektorraum V ist der Tangentialraum an jedem Punkt $v \in V$ auf natürliche Weise isomorph zu dem Vektorraum V. Insbesondere ist der Tangentialraum von jedem reellen Intervall in jedem Punkt des Intervalls isomorph zu $\mathbb{R}$. Weil differenzierbare Abbildungen sich hochheben lassen zu Abbildungen zwischen den Tangentialräumen, konnten wir den Tangentialraum dadurch unabhängig von den Karten einführen, indem wir die Tangentialvektoren als die Bilder von Tangentialvektoren von offenen Intervallen $(-\epsilon, \epsilon)$ unter differenzierbaren Abbildungen von den offenen Intervallen in die differenzierbare Mannigfaltigkeit definiert haben. Jeder solche Tangentialvektor definiert durch die Richtungsableitung eine Derivation auf den glatten Funktionen. Umgekehrt ist jede Derivation auf den glatten Funktionen von dieser Form, so dass wir die Derivationen mit den Tangentialvektoren identifizieren können.

Im übernächsten Abschnitt werden wir auch $TX = \bigcup_{x\in X} T_x$ zu einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit machen, so dass für glatte Abbildungen f zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten auch $T(f)$ eine glatte Abbildung ist.

1.6 Produkte von Mannigfaltigkeiten und Untermannigfaltigkeiten

Nachdem wir die Objekte und die Abbildungen von differenzierbaren Mannigfaltigkeiten eingeführt haben, werden wir jetzt zwei Möglichkeiten kennenlernen, wie wir aus differenzierbaren Mannigfaltigkeiten neue differenzierbare Mannigfaltigkeiten bilden können: nämlich einerseits das kartesische Produkt von zwei Mannigfaltigkeiten, und andererseits Untermannigfaltigkeiten von differenzierbaren Mannigfaltigkeiten. Das kartesische Produkt erhält man ohne weitere Schwierigkeiten, indem wir erst die topologischen Räume, dann die Karten und schließlich die Atlanten des kartesischen Produktes aus den entsprechenden topologischen Räumen, Karten und Atlanten der beiden differenzierbaren Mannigfaltigkeiten bilden. Dagegen ist die Einführung von Untermannigfaltigkeiten relativ kompliziert. Natürlich ist jede offene Teilmenge einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit wieder eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Aber Untermannigfaltigkeiten von niederer Dimension sind nicht so einfach zu beschreiben. Hier benutzen wir den Satz der inversen Funktion.

Wegen Heine-Borel ist das kartesische Produkt zweier abgscheschlossener Bälle in $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ kompakt[2]. Dann ist das kartesiche Produkt $X \times Y$ der topologischen Räume zweier differenzierbaren Mannigfaltigkeiten ein lokalkompakter Hausdorffraum, der wegen Lemma 1.30 Bedingung (ii) in Satz 1.29 erfüllt, und ein Lindelöfraum ist. Wenn $\phi : U \to \mathbb{R}^m$ und $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ Karten sind von X bzw. Y, dann ist

$$\phi \times \psi : U \times V \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n, \quad (x, y) \to (\phi(x), \psi(y))$$

eine Karte von $X \times Y$. Wenn diese Karten Atlanten von X bzw. Y durchlaufen, erhalten wir einen Atlas von $X \times Y$.

[2]Wegen dem Satz von Tychonoff (siehe Chapter 3 Theorem 5.7 und Chapter 5 Theorem 1.1 von J.M. Munkres: Topology) ist das kartesische Produkt kompakter topologischer Räume kompakt.

Definition 1.41. *Das kartesische Produkt von zwei differenzierbaren Mannigfaltigkeiten X und Y ist auf natürliche Weise wieder eine differenzierbare Mannigfaltigkeit $X \times Y$, so dass die beiden folgenden natürlichen Projektionen glatte Abbildungen sind:*

$$p_1 : X \times Y \to X, (x, y) \mapsto x \quad p_2 : X \times Y \to Y, (x, y) \mapsto y$$

Diese beiden Projektionen sind dann offenbar beide surjektive Submersionen. Umgekehrt ist für jedes $y \in Y$ die Abbildung $X \to X \times Y, \quad x \mapsto (x, y)$ eine injektive Immersion. Analog ist für jedes $x \in X$ die Abbildung $Y \to X \times Y, \quad y \mapsto (x, y)$ eine injektive Immersion. Durch diese beiden Abbildungen können wir sowohl X als auch Y als abgeschlossenen topologischen Unterraum von $X \times Y$ auffassen. Wir wollen jetzt X bzw. Y als differenzierbare Untermannigfaltigkeit von $X \times Y$ auffassen.

Definition 1.42. *Seien X und Y differenzierbare Mannigfaltigkeiten und $f : X \to Y$ eine Immersion. Ist f ein Homöomorphismus auf den topologischen Unterraum $f[X]$ von Y, dann heißt f Einbettung und $f[X]$ Untermannigfaltigkeit von Y.*

Auf einer kompakten Mannigfaltigkeit X ist eine injektive Immersion $f : X \to Y$ immer eine Einbettung auf das Bild. Im allgemeinen ist eine injektive Immersion $f : X \to Y$ nicht mal dann eine Einbettung, wenn das Bild $f[X]$ in Y abgeschlossen ist.

Beispiel 1.43. *Das Bild der injektiven Immersion*

$$f : (-\infty, 1) \to \mathbb{R}^2, \quad t \to \left(\frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}, \frac{t(t^2 - 1)}{t^2 + 1} \right)$$

ist abgeschlossen in $\mathbb{R}^2$. Aber wegen $\lim_{t \to 1} f(t) = f(-1)$ ist f kein Homöomorphismus auf das Bild als topologischen Unterraum von $\mathbb{R}^2$.

Um die topologischen Unterräume $X \subset Y$ einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit Y zu charakterisieren, die differenzierbare Untermannigfaltigkeiten sind, zeigen wir zunächst den sogenannten Rangsatz.

Satz 1.44 (Rangsatz). *Sei $l \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ und $f : X \to Y$ eine l–mal stetig differenzierbare Abbildung zwischen den offenen Teilmengen $X \subset \mathbb{R}^m$ und $Y \subset \mathbb{R}^n$. Dann ist für jedes $x_0 \in X$ der Rang von f auf einer Umgebung von x_0 nicht kleiner als bei x_0.*

Ist der Rang auf einer Umgebung von x_0 konstant, dann gibt es auf offenen Umgebungen U von x_0 und V von $f(x_0)$ l–mal stetig differenzierbare Karten ϕ und ψ mit $\phi(x_0) = 0 = \psi(f(x_0))$ und l–mal stetig differenzierbaren Umkehrabbildungen, so dass $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ mit der Einschränkung der linearen Abbildung $f'(x_0)$ auf $\phi[U]$ übereinstimmt.

Beweis: Sei r der Rang von f bei x_0. dann gibt es r linear unabhängige Vektoren $x_1 \ldots, x_r \in \mathbb{R}^m$, die durch $f'(x_0)$ auf linear unabhängige Vektoren von $\mathbb{R}^n$ abgebildet werden. Dann gibt es r Komponenten von $\mathbb{R}^n$, so dass die Determinante der $r \times r$ Matrix, dieser Komponenten der Vektoren $f'(x_0)x_1, \ldots, f'(x_0)x_r$ nicht verschwindet. Die Determinante der Matrix dieser Komponenten der Vektoren $f'(x)x_1, \ldots, f'(x)x_r$ hängt stetig von x ab. Deshalb gibt es eine Umgebung, auf der diese Determinante nicht verschwindet. Dort ist der Rang von $f'(x)$ dann nicht kleiner als r.

Sei jetzt der Rang auf einer Umgebung von x_0 konstant gleich r. Wir wählen invertierbare lineare Abbildungen $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$ und $C \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, so dass $C \circ f'(x_0) \circ B$ gleich der Abbildung $\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{m-r} \to \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{n-r}$ mit $(x, \tilde{x}) \mapsto (x, 0)$ ist, und ersetzen $x \mapsto f(x)$ durch $x \mapsto C \circ (f(x_0 + Bx) - f(x_0))$. Dadurch wird $x_0 = 0$, $f(x_0) = 0$ und $f'(x_0)$ zu $(x, \tilde{x}) \mapsto (x, 0)$. Die ersten r Koponenten von f fassen wir zu $\hat{f}$ und die letzten $n - r$ Komponenten zu $\tilde{f}$ zusammen. Wegen dem Satz der impliziten Funktion gibt es $B(0, R) \subset \mathbb{R}^r$ und $B(0, \tilde{R}) \subset \mathbb{R}^{m-r}$ und eine l–mal stetig differenzierbare Abbildung

$$g : B(0, R) \times B(0, \tilde{R}) \to W \subset \mathbb{R}^r, \text{ mit } \hat{f}(g(x, \tilde{x}), \tilde{x}) = x \text{ für } (x, \tilde{x}) \in B(0, R) \times B(0, \tilde{R}).$$

Weil $\hat{f}$ bei $(0, 0)$ die partiellen Ableitungen $\frac{\partial \hat{f}(x,\tilde{x})}{\partial x} = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^r}$ und $\frac{\partial \hat{f}(x,\tilde{x})}{\partial \tilde{x}} = 0$ hat, hat g dort die gleichen partiellen Ableitungen $\frac{\partial g(x,\tilde{x})}{\partial x} = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^r}$ und $\frac{\partial g(x,\tilde{x})}{\partial \tilde{x}} = 0$. Dann erfüllt

$$\phi : B(0, R) \times B(0, \tilde{R}) \to W \times B(0, \tilde{R}), \quad (x, \tilde{x}) \mapsto (g(x, \tilde{x}), \tilde{x})$$

$\hat{f}(\phi(x, \tilde{x})) = x$ für alle $(x, \tilde{x}) \in B(0, R) \times B(0, \tilde{R})$ mit $\phi'((0, 0)) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^m}$. Wegen dem Satz der inversen Funktion besitzt ϕ für hinreichend kleines R und $\tilde{R}$ eine l–mal stetig differenzierbare Umkehrabbildung. Für hinreichend kleine R, $\tilde{R}$ und W sind $\nabla f_1, \ldots, \nabla f_r$ auf $W \times B(0, \tilde{R})$ linear unabhängig, und $\nabla f_{r+1}, \ldots, \nabla f_n$ wegen dem konstanten Rang Linearkombinationen von $\nabla f_1, \ldots, \nabla f_r$. Für $x \in B(0, R)$ ist $\hat{f}$ und damit auch $\tilde{f}$ auf $\phi[\{x\} \times B(0, \tilde{R})]$ konstant. Auf geeigneten offenen Umgebungen von $0 \in \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{n-r}$ sind die folgenden l–mal stetig differenzierbaren Abbildungen zueinander invers:

$$\psi : (y, \tilde{y}) \mapsto (y, \tilde{y} - \tilde{f}(\phi(y, 0))) \qquad \psi^{-1} : (y, \tilde{y}) \mapsto (y, \tilde{y} + \tilde{f}(\phi(y, 0))).$$

Dann gilt $\psi(f(\phi(x, \tilde{x}))) = (x, 0)$ für alle $x \in B(0, R)$ und $\tilde{x} = 0$ und wegen der Konstanz von $\tilde{f}$ auf $\phi[\{x\} \times B(0, \tilde{R})]$ auch für alle $\tilde{x} \in B(0, \tilde{R})$. **q.e.d.**

Satz 1.45. *Sei $X \subset Y$ ein topologischer Unterraum einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit Y. Dann besitzt X genau dann die Struktur einer differenzierbaren Untermannigfaltigkeit von Y, wenn es für jedes $x \in X$ eine mit dem Atlas von Y verträgliche Karte $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ von Y bei $x \in U$ gibt, die x auf $0 \in \mathbb{R}^n$ abbildet, und deren Einschränkung $\phi|_{U \cap X}$ auf die offene Umgebung $U \cap X$ von x in X ein Homöomorphismus auf die Schnittmenge von dem Bild $\phi[U]$ mit einem linearen Unterraum von $\mathbb{R}^n$ ist.*

Beweis: Wir zeigen zunächst, dass die angegebene Bedingung hinreichend dafür ist, dass X eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit ist. Die Einschränkung einer solchen Karte ϕ um $x \in X$ auf $U \cap X$ ist eine Karte von X um den Punkt x, weil die Schnittmenge einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ mit einem Unterraum von $\mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge des linearen Unterraumes ist. Zwei solche Karten, deren Definitionsbereiche beide den Punkt x enthalten, bilden beide eine offene Umgebung von x in X jeweils auf eine offene Teilmenge eines linearen Unterraum des $\mathbb{R}^n$ ab. Die entsprechenden Übergangsfunktionen sind Homöomorphismen von einer offenen Teilmenge des einen Unterraumes auf eine offene Teilmenge des anderen Unterraumes. Sie sind sogar Diffeomorphismen, weil die Karten von Y miteinander verträglich sind. Dann sind auch die Karten von X miteinander verträglich. Deshalb besitzt X einen Atlas.

Ein topologischer Raum Z erfüllt das sogenannnte zweite Abzählbarkeitsaxiom, wenn es eine abzählbare Teilmenge $\beta \subset \tau$ der Menge aller offenen Teilmengen gibt, so dass jede offene Teilmenge O die Vereinigung aller $\{U \in \beta \mid U \subset O\}$ ist. Jeder Unterraum eines solchen Z ist wieder ein solcher Raum und $\mathbb{R}^m$ ist mit $\beta = \{B(x, r) \mid x \in \mathbb{Q}^m, r \in \mathbb{Q}^+\}$ ein Beispiel. Für eine offene Überdeckung $\mathcal{U}$ eines solchen Z ist $\beta' = \{V \in \beta \mid V \subset U_V \text{ für ein } U_V \in \mathcal{U}\}$ höchstens abzählbar und $(U_V)_{V \in \beta'}$ eine Teilüberdeckung, also Z ein Lindelöfraum. Wegen Lemma 1.30 ist jede differenzierbare Mannigfaltigkeit eine abzählbare Vereinigung von offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^m$, und damit ein solcher Raum. Deshalb ist $X \subset Y$ ein solcher Raum und damit ein Hausdorff– und Lindelöfraum. Also ist X eine Mannigfaltigkeit und $X \hookrightarrow Y$ eine Einbettung.

Wenn umgekehrt $f : Z \to Y$ eine Immersion und ein Homöomorphismus auf einen topologischen Unterraum $X = f[Z] \subset Y$ ist, dann hat f auf jeder Zusammenhangskomponente von Z konstanten Rang. Wegen Satz 1.44 liegt dann jedes $x \in X$ im Definitionsbereich U einer mit dem Atlas von Y verträglichen Karte ϕ von Y der Dimension n mit $\phi(x) = 0$, die die Schnittmenge $U \cap X$ auf $\phi[U] \cap T(\phi \circ f)[T_{f^{-1}(x)}Z] \subset T_{\phi(x)}\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$ abbildet. Damit haben wir gezeigt, dass es für jede Untermannigfaltigkeit X von Y einen Atlas gibt, der die Bedingungen des Korollars erfüllt. **q.e.d.**

Zum Abschluss wollen wir noch den Satz der impliziten Funktion umformulieren.

Korollar 1.46. *Sei $f : X \to Y$ eine glatte Abbildung zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten mit lokal konstantem Rang. Dann ist für jedes $y \in f[X]$ das Urbild $f^{-1}[\{y\}]$ eine Untermannigfaltigkeit von X. Ihr Tangentialraum ist in dem Punkt $x \in f^{-1}[\{y\}]$ der Kern von $T_x(f)$. Dort hat sie die Dimension* $\dim T_xX - \mathrm{Rang}(T_x(f))$.

Beweis: Wegen Satz 1.44 liegt jedes $x \in X$ im Definitionsbereich einer mit dem Atlas von X verträglichen Karte $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ von X mit $\phi(x) = 0$, die $U \cap f^{-1}[\{f(x)\}]$ in einen linearen Unterrraum $\phi[U] \cap T_x(\phi)[\mathrm{Kern}(T_x(f))] \subset \mathbb{R}^n$ abbildet. Dieser Kern hat die Dimension $\dim T_xX - \mathrm{Rang}(T_x(f))$. Die Aussage folgt aus Satz 1.45. **q.e.d.**

Insbesondere sind die Niveaumengen von Submersionen Untermannigfaltigkeiten.

Korollar 1.47. *Seien X, Y und Z differenzierbare Mannigfaltigkeiten und $f : X \to Z$ und $g : Y \to Z$ zwei glatte Abbildungen, von denen mindestens eine eine Submersion ist. Dann ist das Faserprodukt*

$$X \times_Z Y = \{(x, y) \in X \times Y \mid f(x) = g(y)\}$$

eine Untermannigfaltigkeiten von $X \times Y$ der Dimension

$$\dim T_{(x,y)} X \times_Z Y = \dim T_x X + \dim T_y Y - \dim T_{f(x)} Z = \dim T_x X + \dim T_y Y - \dim T_{g(y)} Z.$$

Beweis: Seien $(x, y) \in X \times_Z Y$ und $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ eine Karte von Z auf einer offenen Umgebung U von $z = f(x) = g(y)$. Dann ist die Abbildung

$$\phi \circ f \circ p_1 - \phi \circ g \circ p_2 : f^{-1}[U] \times g^{-1}[U] \to \mathbb{R}^n, \quad (u, v) \mapsto \phi(f(u)) - \phi(g(v))$$

eine Submersion, weil entweder $\phi \circ f$ oder $\phi \circ g$ eine Submersion ist. Das Urbild der $0 \in \mathbb{R}^n$ dieser Abbildung ist wegen Korollar 1.46 eine Untermannigfaltigkeit von $f^{-1}[U] \times g^{-1}[U]$. Weil ϕ injektiv ist, ist $\phi(f(u)) = \phi(g(v))$ äquivalent zu $f(u) = g(v)$. Also ist diese Untermannigfaltigkeit gleich $f^{-1}[U] \times_U g^{-1}[U]$. Damit sind auf diesem Teilraum $f^{-1}[U] \times_U g^{-1}[U] \subset f^{-1}[U] \times g^{-1}[U] \subset X \times Y$ die Bedingungen im Satz 1.45 erfüllt. Weil dies für alle $(x, y) \in X \times_Z Y$ gilt, sind diese Bedingungen auf ganz $X \times_Z Y$ erfüllt. Daraus folgt die Behauptung. **q.e.d.**

Beispiel 1.48. **(i)** *Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Dann ist die Diagonale von $X \times X$ das Faserprodukt $X \times_X X$ bezüglich zwei Kopien der Abbildungen $\mathbb{1}_X : X \to X$. Diese Abbildungen sind Diffeomorphismen, so dass die Diagonale $X \times_X X$ eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit von X ist. Die Abbildung $X \to X \times X$, $x \mapsto (x, x)$ ist offenbar einen Diffeomorphismus von X auf $X \times_X X$.*

(ii) *Seien X und Y zwei differenzierbare Mannigfaltigkeiten und $f : X \to Y$ eine glatte Abbildung. Dann ist der Graph von f das Faserprodukt $X \times_Y Y$ der beiden Abbildungen $f : X \to Y$ und $\mathbb{1}_Y : Y \to Y$. Weil die zweite ein Diffeomorphismus ist, ist $X \times_Y Y$ eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit von $X \times Y$. Die Abbildung $\mathbb{1}_X \times f$ induziert offenbar einen Diffeomorphismus von $X \times_X X$ auf $X \times_Y Y$.*

1.7 Tangentialbündel

Ziel dieses Abschnittes ist es, die Vereinigung aller Tangentialräume $TX = \bigcup_{x \in X} T_x X$ wieder zu einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit mit der Vektorraumstruktur zu machen. Dazu führen wir zunächst den Begriff des Faserbündels ein.

Definition 1.49. *Ein differenzierbares Faserbündel ist ein Tripel (X, B, π), wobei X und B differenzierbare Mannigfaltigkeiten sind und π eine surjektive glatte Abbildung von X nach B, die die folgende Bedingung (der sogenannten lokalen Trivialität) erfüllt.*

Lokale Trivialität: *Es gibt eine Überdeckung von B durch offene Teilmengen $U \subset B$ mit Diffeomorphismen $\phi : F \times U \to \pi^{-1}[U]$ für differenzierbare Mannigfaltigkeiten F, so dass $\pi \circ \phi$ mit der Projektion $p_2 : F \times U \to U$ übereinstimmt.*

Weil die natürliche Projektion $p_2 : F \times U \to U$ immer eine Submersion ist, ist dann auch π eine Submersion. Man nennt X den Faserraum, B seine Basis und π die Projektion des Faserbündels. Wegen der lokalen Trivialität sind alle Urbilder $\pi^{-1}[\{b\}]$ für alle b in einer Umgebung eines $b_0 \in B$ zueinander diffeomorph. Diese Urbilder werden Fasern genannt. Sind alle Fasern zu einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit F diffeomorph, so wird das Faserbündel auch Faserbündel vom Fasertyp F genannt. Aus der lokalen Trivialität folgt, dass die Menge aller $b \in B$ mit Fasern $\pi^{-1}[\{b\}]$, die zu einer Faser $\pi^{-1}[\{b_0\}]$ diffeomorph sind, offen sind. Aus der lokalen Trivialität folgt auch, dass sie auch den Grenzwert von konvergenten Folgen in ihnen enthalten. Deshalb sind diese Mengen offen und abgeschlossen. Also sind die Einschränkungen eines Faserbündels auf das entsprechende Faserbündel $(\pi^{-1}[C], C, \pi|_{\pi^{-1}[C]})$ über einer zusammenhängenden Komponente C von B Faserbündel von einem bestimmten Fasertyp F.

Definition 1.50. *Sei $\mathbb{K}$ der Körper der reellen oder komplexen Zahlen. Ein $\mathbb{K}$–Vektorraumbündel ist ein Faserbündel (E, B, π), so dass jede Faser $\pi^{-1}[\{b\}]$ ein $\mathbb{K}$–Vektorraum ist, und die lokale Trivialisierungen ϕ für jedes $b \in B$ Vektorraumisomorphismen von $\{b\} \times F$ nach $\pi^{-1}[\{b\}]$ sind.*

Beispiel 1.51. *Sei V ein normierter $\mathbb{K}$–Vektorraum und X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und π die natürliche Projektion von $V \times X$ auf X. Dann ist $(V \times X, X, \pi)$ ein Vektorraumbündel über X. Dieses Vektorraumbündel wird trivial genannt.*

Die lokale Trivialität besagt genau, dass jedes Vektorraumbündel lokal ein triviales Vektorraumbündel ist. Wir wollen jetzt umgekehrt ein Vektorraumbündel aus lokalen trivialen Vektorraumbündeln konstruieren. Sei also X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, F ein normierter endlichdimensionaler $\mathbb{K}$–Vektorraum, und $\mathcal{L}(F)$ der normierte Vektorraum aller stetigen linearen Abbildungen von F nach F. Er enthält als offene Teilmenge die Gruppe $GL(F)$ der invertierbaren linearen Abbildungen. Sei $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von X. Wir werden die trivialen Vektorraumbündel $(F \times U)_{U \in \mathcal{U}}$ zu einem Vektorraumbündel über X verkleben. Für nicht schnittfremde Paare $(U, V) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$ sei $\phi_{V,U} : U \cap V \to GL(F)$ eine glatte Funktion. Sie definiert folgende glatte Abbildung:

$$\psi_{V,U} : F \times (U \cap V) \to F \times (U \cap V), \quad (f, x) \mapsto (\phi_{V,U}(x) f, x).$$

Weil $\phi_{V,U}(x)$ für jedes $x \in U \cap V$ invertierbar ist, ist die Umkehrabbildung gleich

$$\psi_{V,U}^{-1} : F \times (U \cap V) \to F \times (U \cap V), \quad (f, x) \mapsto (\phi_{V,U}^{-1}(x)f, x).$$

Also sind diese Abbildungen Diffeomorphismen. Weil $\phi_{V,U}(x)$ und $\phi_{V,U}^{-1}(x)$ für alle $x \in U \cap V$ linear sind, sind diese Diffeomorphismen sogar Isomorphismen von Vektorraumbündeln. Damit diese Isomorphismen die trivialen Vektorraumbündel $(F \times U)_{U \in \mathcal{U}}$ auf eindeutige Weise zu einem Vektorraumbündel über X verklebt, müssen für alle $(U, V, W) \in \mathcal{U}^3$ die drei trivialen Vektorraumbündel $F \times U, F \times V$ und $F \times W$ auf $U \cap V \cap W$ eindeutig miteinander identifiziert werden. Deshalb fordern wir:

Kozykelbedingung: Für alle nicht schnittfremden Tripel $(U, V, W) \in \mathcal{U}^3$ gilt

$$\phi_{W,V}(x)\phi_{V,U}(x) = \phi_{W,U}(x) \quad \text{für alle } x \in U \cap V \cap W.$$

Wenn wir $U = V = W$ setzen erhalten wir

$$\phi_{U,U}(x) = \phi_{U,U}^{-1} \circ \phi_{U,U} = \mathbb{1}_F \text{ für alle } x \in U$$

Wenn wir $U = W$ setzen erhalten wir

$$\phi_{U,V}(x)\phi_{V,U}(x) = \mathbb{1}_F \qquad \Longleftrightarrow \qquad \phi_{U,V}(x) = \phi_{V,U}^{-1}(x) \qquad \text{für alle } x \in U \cap V.$$

Auf dem Raum $\bigcup_{U \in \mathcal{U}}(F \times U)$ führen wir folgende Relation ein:

$$(e, x) \in F \times U \sim (f, y) \in F \times V \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = x \text{ in } X \text{ und } \phi_{V,U}(x)e = f.$$

Wir zeigen jetzt, dass diese Relation wegen der Kozykelbedingung eine Äquivalenzrelation ist. Wegen $\phi_{U,U}(x) = \mathbb{1}_U$ ist die Relation reflexiv. Wegen $\phi_{U,V}(x) = \phi_{V,U}^{-1}(x)$ ist $\phi_{V,U}(x)e = f$ äquivalent zu $\phi_{U,V}(x)f = e$. Deshalb ist die Relation $\sim$ symmetrisch. Weil für alle $x \in U \cap V \cap W$ gilt $\phi_{W,U}(x) = \phi_{W,V}(x)\phi_{V,U}(x)$, folgt aus $(e, x) \in F \times U \sim (f, y) \in F \times V$ und $(f, y) \in F \times v \sim (g, z) \in F \times W$ auch $z = y = x \in U \cap V \cap W$ und $\phi_{W,U}(x)e = \phi_{W,V}(x)\phi_{V,U}(x)e = \phi_{W,V}(x)f = g$. Also ist die Relation $\sim$ auch transitiv.

Sei E die Menge aller Äquivalenzklassen dieser Äquivalenzrelation. Die Projektionen $p_2 : F \times U \to U$ der trivialen Vektorraumbündel $F \times U$ induzieren eine Abbildung $\pi : E \to X$. Alle Fasern $(\pi^{-1}[\{x\}])_{x \in X}$ dieser Abbildung sind Vektorräume. Weil für alle $x \in U \cap V$ die Werte $\phi_{V,U}(x)$ der Übergangsfunktionen lineare Abbildungen sind, sind diese Fasern als Vektorräume isomorph zu F. Wir versehen jetzt E mit einer Topologie. Eine Teilmenge $O \subset E$ ist genau dann offen, wenn für alle $U \in \mathcal{U}$, das Urbild von O unter der natürlichen Abbildung $F \times U \to E$ offen ist. Für jede offene Teilmenge $O \subset X$ und $U \in \mathcal{U}$ ist $F \times (O \cap U)$ offen in $F \times U$. Also ist $\pi : E \to X$

stetig. Für $U, V \in \mathcal{U}$ und eine offene Teilmenge $O \subset F \times U$ ist die Schnittmenge mit den Elementen von $F \times U$, deren Äquivalenzklassen in $\pi^{-1}[V]$ liegen, die offene Teilmenge $O \cap F \times (V \cap U) \subset F \times U$, die durch den Diffeomorphismus $\psi_{V,U}$ auf eine offene Teilmenge von $F \times V$ abgebildet wird. Also bildet die stetige und bijektive Abbildung $F \times U \to \pi^{-1}[U]$ auf die Äquivalenzklassen offene Mengen auf offene Mengen ab, und ist ein Homöomorphismus. Für $x, y \in E$ mit $\pi(x) \neq \pi(y)$ liegen $\pi(x)$ und $\pi(y)$ in disjunkten offenen Umgebungen in X. Ihre Urbilder unter π sind disjunkte offene Umgebungen von x und y. Für $x \neq y \in E$ mit $\pi(x) = \pi(y)$ gibt es ein $U \in \mathcal{U}$ mit $\pi(x) = \pi(y) \in U$. Die Urbilder von x und y unter $F \times U \to \pi^{-1}[U]$ sind verschieden und besitzen disjunkte Umgebungen in $F \times U$. Ihre Bilder unter $F \times U \to \pi^{-1}[U]$ sind disjunkte Umgebungen von x und y. Also ist E ein Hausdorffraum. Weil X ein Lindelöfraum ist, besitzt $\mathcal{U}$ eine abzählbare Teilüberdeckung $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$. Für jedes $V \in \mathcal{V}$ ist $F \times V$ ein Lindeöfraum, und jede offene Überdeckung von E besitzt eine abzählbare Teilüberdeckung der Äquivalenzklassen von den Elementen in $F \times V$. Die abzählbare Vereinigung aller dieser Teilüberdeckungen ist eine abzählbare Teilüberdeckung von E, und E ist ein Lindelöfraum. Wegen Lemma 1.30 besitzt X einen Atlas, dessen Definitionsbereiche U jeweils in einem Element von $\mathcal{U}$ enthalten sind. Die entsprechenden Karten $\phi : U \to \mathbb{R}^m$ induzieren mit einem Vektorraumisomorphismus $F \simeq \mathbb{R}^n$ Karten $\pi^{-1}[U] \simeq F \times U \to \mathbb{R}^n \times \phi[U]$ von E. Weil $\psi_{V,U}$ für $U, V \in \mathcal{U}$ Diffeomorphismen sind, bilden diese Karten einen Atlas. Damit haben wir gezeigt:

Satz 1.52. *Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit einer offenen Überdeckung $\mathcal{U}$ und F ein endlichdimensionaler normierter $\mathbb{K}$–Vektorraum. Dann definieren glatte Funktionen $\phi_{V,U} : U \cap V \to GL(F)$ für nicht schnittfremde Paare $(U, V) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$, die die Kozykelbedingung erfüllen, ein Vektorraumbündel (E, X, π) vom Fasertyp F.* **q.e.d.**

Satz 1.53. **(i)** *Sei B eine zusammenhängende differenzierbare Mannigfaltigkeit. Dann sind alle Fasern $(\pi^{-1}[\{b\}])$ eines Vektorraumbündels (E, B, π) über B als topologische Vektorräume isomorph, d.h. (E, B, π) ist von einem bestimmten Fasertyp.*

(ii) *Sei F ein normierter Vektorraum und (E, B, π) ein Vektorraumbündel vom Fasertyp F. Dann gibt es eine Überdeckung $\mathcal{U}$ von B und Kozykel ϕ, d.h. für alle $(U, V) \in \mathcal{U}^2$ glatte Abbildungen $\phi_{V.U} : U \cap V \to GL(F)$, die die Kozykelbedingung erfüllen, so dass das entsprechende Vektorraumbündel isomorph ist zu (E, B, π).*

Beweis: (i) Wegen der lokalen Trivialität gibt es für jedes $b \in B$ eine offene Umgebung U von b, auf der alle Fasern $(\pi^{-1}[\{b'\}])_{b' \in U}$ als topologische Vektorräume isomorph sind zu $\pi^{-1}[\{b\}]$. Also sind die Teilmengen von B, auf denen die Fasern als topologische Vektorräume isomorph sind, offen. Wenn $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in einer solchen Teilmenge ist, dann gibt es eine Umgebung von dem Grenzwert, auf der die Fasern als

topologische Vektorräume isomorph sind. Deshalb sind diese Teilmengen auch abgeschlossen. Wenn B zusammenhängend ist, dann ist für alle $b \in B$ die Teilmenge, auf denen alle Fasern als topologische Vektorräume isomorph zu $\pi^{-1}[\{b\}]$ sind, gleich B.
(ii) Wegen der lokalen Trivialität gibt es für jedes Vektorraumbündel (E, B, π) vom Fasertyp F eine Überdeckung $\mathcal{U}$, und für alle $U \in \mathcal{U}$ Diffeomorphismen $\phi_U : F \times U \to \pi^{-1}[U]$, so dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccccc} F \times U & \xrightarrow{\phi_U} & \pi^{-1}[U] & \hookrightarrow & E \\ p_2 \downarrow & & \pi \downarrow & & \pi \downarrow \\ U & \xrightarrow{\mathbb{1}_U} & U & \hookrightarrow & B \end{array}.$$

Dabei ist ϕ_U über $b \in U$ faserweise ein Isomorphismus der normierten Vektorräume F und $\pi^{-1}[\{b\}]$ sind. Für alle $(U, V) \in \mathcal{U}^2$ definieren die Einschränkungen der Diffeomorphismen ϕ_U und ϕ_V auf $F \times (U \cap V)$ folgenden Diffeomorphismus

$$\phi_V^{-1}\big|_{\pi^{-1}[U \cap V]} \circ \phi_U\big|_{F \times (U \cap V)} : F \times (U \cap V) \to F \times (U \cap V).$$

Dieser Diffeomorphismus ist faserweise linear und definiert eine glatte Abbildung

$$\phi_{V,U} : U \cap V \to GL(F).$$

Weil für alle $U, V, W \in \mathcal{U}$ $\quad \phi_W^{-1}|_{\pi^{-1}[U \cap V \cap W]} \circ \phi_U|_{F \times (U \cap V \cap W)} =$

$$= \phi_W^{-1}|_{\pi^{-1}[U \cap V \cap W]} \circ \phi_V|_{F \times (U \cap V \cap W)} \circ \phi_V^{-1}|_{\pi^{-1}[U \cap V \cap W]} \circ \phi_U|_{F \times (U \cap V \cap W)}$$

gilt, erfüllen diese Abbildungen die Kozykelbedingung. Dieser Kozykel $(\phi_{V,U})_{(U.V) \in \mathcal{U}^2}$ ist so definiert, dass die Trivialisierungen $(\phi_U)_{U \in \mathcal{U}}$ äquivalente Elemente von $\bigcup_{U \in \mathcal{U}} F \times U$ auf gleiche Elemente von E abbilden: Für $U, V \in \mathcal{U}$ und $x \in U \cap V$ gilt nämlich

$$\phi_U|_{F \times \{x\}} = \phi_V|_{F \times \{x\}} \circ (\phi_{V,U}(x) \times \mathbb{1}_{\{x\}}).$$

Deshalb induzieren die Abbildungen $(\phi_U)_{U \in \mathcal{U}}$ eine bijektive Abbildung von dem durch den Kozykel definierten Vektorraumbündel nach E, die faserweise ein Isomorphismus von Vektorräumen ist. Weil ϕ_U lokalen Trivialisierungen von E sind, ist die induzierte Abbildung ein Diffeomorphismus. **q.e.d.**

Satz 1.54. (i) *Auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit X ist $TX = \bigcup_{x \in X} T_x X$ ein reelles Vektorraumbündel über X. Es heißt Tangentialbündel von X.*

(ii) *Sei $f : X \to Y$ eine r mal (stetig) differenzierbare Abbildung von der differenzierbaren Mannigfaltigkeit X auf die differenzierbare Mannigfaltigkeit Y. Dann definiert $T(f) : TX \to TY$ eine $(r-1)$ mal (stetig) differenzierbare Abbildung* *von der differenzierbaren Mannigfaltigkeit TX auf die differenzierbare Mannigfaltigkeit TY, so dass folgendes Diagramm kommutiert:*

$$\begin{array}{ccc} TX & \xrightarrow{T(f)} & TY \\ \pi\downarrow & & \pi\downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

(iii) *Seien X, Y und Z differenzierbare Mannigfaltigkeiten und $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ differenzierbare Abbildungen. Dann gilt $T(g \circ f) = T(g) \circ T(f)$.*

(iv) *Die Tangentiale Abbildung $T(\mathbb{1}_X)$ der identischen Abbildung $\mathbb{1}_X$ von der differenzierbaren Mannigfaltigkeit X ist die identische Abbildung von TX.*

Beweis: Auf allen zusammenhängenden Komponenten sind die Dimensionen der Tangentialräume gleich einer natürlichen Zahl. Wegen Korollar 1.14 ist jede differenzierbare Mannigfaltigkeit eine höchstens abzählbare Vereinigung von offenen zusammenhängenden Komponenten. Deshalb können wir uns im Folgenden auf zusammenhängende differenzierbare Mannigfaltigkeiten X der Dimension n beschränken.

Die Tangentialräume vom $\mathbb{R}^n$ bilden ein triviales Vektorraumbündel:

$$T\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \quad \text{mit} \quad \pi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad (v, w) \mapsto w.$$

Dies folgt aus der Identifikation des Tangentialraumes $T_w\mathbb{R}^n$ von $\mathbb{R}^n$ im Punkt $w \in \mathbb{R}$ mit dem Raum aller infinitesimalen Richtungen $v \in \mathbb{R}^n$, die wir schon zur Einführung der Vektorraumstruktur auf T_xX benutzt haben. Sei $(\phi_U)_{U\in\mathcal{U}}$ ein Atlas von X mit den Definitionsbereichen $(U \in \mathcal{U})$. Diese Karten $(\phi_U)_{U\in\mathcal{U}}$ induzieren bijektive Abbildungen

$$T(\phi_U) : TU \to T\phi_U[U] \subset T\mathbb{R}^n,$$

die faserweise, also für alle $x \in U$ Vektorraumisomorphismen

$$T_x(\phi_U) : T_xU \to T_{\phi_U(x)}\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n$$

induzieren. Indem wir die Tangentialbündel von $\phi_U[U]$ mit dem trivialen Bündel

$$T\phi_U[U] = \mathbb{R}^n \times \phi_U[U] \subset T\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

identifizieren, und dann die Kartenwechsel

$$\phi_V\phi_U^{-1} : \phi_U[U \cap V] \to \phi_V[U \cap V]$$

benutzen, können wir diese trivialen Vektorraumbündel zu einem Vektorraumbündel über X verkleben. Die entsprechenden Abbildungen

$$U \cap V \to GL(\mathbb{R}^n)$$

sind dann gegeben durch die Ableitungen der Übergangsfunktionen

$$(\phi_V \circ \phi_U^{-1})' \circ \phi_U : U \cap V \to GL(\mathbb{R}^n).$$

Für nicht schnittfremde Definitionsbereiche U und V zweier Karten ϕ_U und ϕ_V nimmt $(\phi_V \circ \phi_U^{-1})'$ Werte in $GL(\mathbb{R}^n)$ an. Für $U, V, W \in \mathcal{U}$ gilt

$$(\phi_W \circ \phi_U^{-1})(y) = (\phi_W \circ \phi_V^{-1}) \circ (\phi_V \circ \phi_U^{-1})(y) \text{ für alle } y \in \phi_U[U \cap V \cap W].$$

Daraus folgt mit der Kettenregel

$$(\phi_W \circ \phi_U^{-1})'(\phi_U(x)) = (\phi_W \circ \phi_V^{-1})'(\phi_V(x)) \cdot (\phi_V \circ \phi_U^{-1})'(\phi_U(x)) \text{ für alle } x \in U \cap V \cap W.$$

Also ist die Kozykelbedingung erfüllt und alle trivialen Vektorraumbündel $(\mathbb{R}^n \times U)_{U \in \mathcal{U}}$ definieren durch diese Kozykel ein Vektorraumbündel über X. Für jede Karte

$$\phi_U : U \to \phi_U[U] \subset \mathbb{R}^n$$

erhalten wir bijektive Abbildungen

$$(\mathbb{1}_{\mathbb{R}^n} \times \phi_U^{-1}) \circ T(\phi_U) : TU \to T\phi_U[U] \simeq \mathbb{R}^n \times \phi_U[U] \to \mathbb{R}^n \times U.$$

Dadurch erhalten wir eine bijektive Abbildung von TX in das durch die Kozykel definierte Vektorraumbündel über X. Diese Abbildungen sind gerade so definiert, dass sie mit den Äquivalenzrelationen, aus deren Äquivalenzklassen das verklebte Vektorraumbündel besteht, verträglich ist: Auf $T(U \cap V)$ gilt nämlich

$$((\phi_V \circ \phi_U^{-1})' \circ \phi_U \times \mathbb{1}_{U \cap V}) \circ (\mathbb{1}_{\mathbb{R}^n} \times \phi_U^{-1}) \circ T(\phi_U) = (\mathbb{1}_{\mathbb{R}^n} \times \phi_V^{-1}) \circ T(\phi_V)$$

weil für alle $x \in U \cap V$

$$T_{\phi_U(x)}(\phi_V \circ \phi_U^{-1}) \circ T_x(\phi_U) = T_x(\phi_V)$$

gilt, und $T_{\phi_U(x)}(\phi_V \circ \phi_U^{-1})$ durch die Identifikation von

$$T_{\phi_U(x)}\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n \quad \text{und} \quad T_{\phi_V(x)}\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n$$

mit der Abbildung $(\phi_V \circ \phi_U^{-1})'(\phi_U(x)) \in GL(\mathbb{R}^n)$ identifiziert wird. Damit ist (i) gezeigt.

Aufgrund der Konstruktion des Tangentialbündels in (i) genügt es (ii) bezüglich zweier Karten nachzuprüfen. Sei also ϕ eine Karte von X um $x \in X$ und ψ eine Karte von Y in $f(x)$. Dann ist die Tangentialabbildung $T_x(f)$ als Abbildung von

$$T_{\phi(x)}\mathbb{R}^n \text{ nach } T_{\psi(f(x))}\mathbb{R}^n \quad \text{gegeben durch} \quad (\psi \circ f \circ \phi^{-1})'(\phi(x)).$$

Hierbei ist n die Dimension von ϕ und m die Dimension von ψ. Weil also $T(f)$ durch die Ableitung von f bestimmt ist, ist $T(f)$ einmal weniger als f differenzierbar.

(iii) folgt aus Satz 1.36 (iii).

(iv) folgt daraus, dass die Ableitung von $\mathbb{1}_{\mathbb{R}^n}$ an jeder Stelle gleich $\mathbb{1}_{\mathbb{R}^n}$ ist. **q.e.d.**

1.8 Operationen auf Vektorraumbündeln

Definition 1.55. *Seien (E, B, π) und (E', B', π') zwei Vektorraumbündel über $\mathbb{K}$. Dann ist ein Morphismus zwischen diesen beiden Vektorraumbündeln definiert als zwei glatte Abbildungen $f : B \to B'$ und $g : E \to E'$, so dass folgendes Diagramm kommutiert:*

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{g} & E' \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ B & \xrightarrow{f} & B' \end{array}$$

und die Abbildung g faserweise linear ist, d.h. für alle $b \in B$ ist die Einschränkungen von g auf $\pi^{-1}[\{b\}]$ eine lineare Abbildung nach $\pi'^{-1}[\{f(b)\}]$. Sind f und g Diffeomorphismen, so heißt der Morphismus auch Isomorphismus der Vektorraumbündel (E, B, π) und (E', B', π'). Dann bilden die Umkehrabbildungen auch einen Morphismus, weil die Umkehrabbildung einer bijektiven linearen Abbildung linear ist.

Beispiel 1.56. (i) *Jede Karte $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit X induziert einen Isomorphismus $T(\phi) : TU \to T\phi[U]$ der Tangentialbündel.*

(ii) *Jede glatte Abbildung $f : X \to Y$ zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten induziert mit $T(f) : TX \to TY$ einen Morphismus der Tangentialbündel.*

(iii) *In Satz 1.53 (ii) haben wir gezeigt, dass jedes Vektorraumbündel von einem Fasertyp isomorph ist zu dem durch ein Kozykel induzierten Vektrorraumbündel.*

Definition 1.57. *Sei (X, B, π) ein differenzierbares Faserbündel über der differenzierbaren Mannigfaltigkeit B. Sei $U \subset B$ eine offene Teilmenge von B. Dann heißt eine p mal (stetig) differenzierbare Abbildung $f : U \to X$, so dass die Verkettung von f mit π gleich der identischen Abbildung von U ist, ein p mal (stetig) differenzierbarer Schnitt von dem Faserbündel (X, B, π) über U. Wenn $U = B$ wird f globaler Schnitt genannt.*

Nicht jedes Faserbündel besitzt auch globale Schnitte, aber wegen der lokalen Trivialität besitzt jedes Faserbündel lokale Schnitte. Jedes Vektorraumbündel (E, B, π) besitzt immer den globalen Nullschnitt, der jedem $b \in B$ die eindeutige Null aus der Faser $\pi^{-1}[\{b\}]$ zuordnet. Die Menge aller dieser Nullen bildet wegen der lokalen Trivialität eine Untermannigfaltigkeit von E, die offenbar diffeomorph ist zu B.

Lemma 1.58. *Sei F ein normierter $\mathbb{K}$–Vektorraum der Dimension n und (E, B, π) ein Vektorraumbündel vom Fasertyp F. Dann ist E genau dann als Vektorraumbündel isomorph zu dem trivialen Bündel $(F \times B, B, \pi)$, wenn E n globale glatte Schnitte $f_1, \ldots, f_n$ besitzt, deren Werte in allen Fasern $(\pi^{-1}[\{b\}])_{b \in B}$ linear unabhängig sind.*

Beweis: Wenn $\phi : F \times B \to E$ ein Diffeomorphismus ist, so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} F \times B & \xrightarrow{\phi} & E \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ B & \xrightarrow{\mathbf{1}_B} & B \end{array}$$

kommutiert, und ϕ faserweise ein Vektorraumisomorphismus ist, dann definiert jedes $e \in F$ folgenden globalen Schnitt von E:

$$f : B \to \{e\} \times B \xrightarrow{\phi} E.$$

Insbesondere induziert jede Basis $(e_1, \ldots, e_n)$ von F durch ϕ globale glatte holomorphe Schnitte $f_1, \ldots, f_n$, die faserweise alle linear unabhängig sind.

Jede Basis $(e_1, \ldots, e_n)$ von F induziert einen Isomorphismus von den normierten Vektorräumen F und $\mathbb{K}^n$. Wir zeigen jetzt, dass globale glatte Schnitte $f_1, \ldots, f_n$ von E, die faserweise linear unabhängig sind, einen Isomorphismus von dem trivialen Vektorraumbündel $\mathbb{K}^n \times B \simeq F \times B$ mit E induzieren. Weil die Werte von den Schnitten $f_1, \ldots, f_n$ in allen Fasern $\pi^{-1}[\{b\}]$ mit $b \in B$ eine Basis der Faser bilden, ist

$$f : \mathbb{K}^n \times B \to E, \quad (\lambda, b) \mapsto f(\lambda, b) = \lambda_1 f_1(b) + \ldots + \lambda_n f_n(b),$$

eine bijektive, faserweise lineare Abbildung, so dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n \times B & \xrightarrow{f} & E \\ p_2 \downarrow & & \pi \downarrow \\ B & \xrightarrow{\mathbf{1}_B} & B \end{array}$$

Weil die Schnitte alle glatt sind, ist f sogar ein Diffeomorphismus und damit auch ein Isomorphismus zwischen dem trivialen Vektorraumbündel $\mathbb{K}^n \times B$ und E. **q.e.d.**

Mithilfe der linearen Algebra und der Analysis können wir aus zwei (endlichdimensionalen) normierten Vektorräumen V und W die normierten Vektorräume des kartesischen Produktes $V \times W$ und der linearen stetigen Abbildungen von V nach $W : \mathcal{L}(V, W)$ bilden. Wir werden jetzt diese Operationen auf alle Fasern $\pi^{-1}[\{b\}]$ und $\pi'^{-1}[\{b\}]$ zweier Vektorraumbündel (E, B, π) und (E', B, π') über der gleichen Basis B anwenden und dadurch zwei neue Vektorraumbündel

$$(E \oplus E', B, \pi \oplus \pi') \qquad \text{bzw.} \qquad (\mathrm{Hom}(E, E'), B, \pi'')$$

einführen. Wir errinnern daran, dass die direkte Summe $\oplus$ von Vektorräumen mit dem kartesischen Produkt übereinstimmt.

Satz 1.59. *Seien (E, B, π) und $(E', B; \pi')$ zwei Vektorraumbündel über der differenzierbaren Mannigfaltigkeit B. Dann gibt es zwei Vektorraumbündel*

$$(E \oplus E', B, \pi \oplus \pi') \quad \textit{und} \quad (\mathrm{Hom}(E, E'), B, \pi''),$$

deren Fasern

$$(\pi \oplus \pi')^{-1}[\{x\}] \quad \textit{und} \quad \pi''^{-1}[\{x\}]$$

für alle $x \in B$ als topologische Vektorräume isomorph sind zu

$$E_x \times E'_x \quad \textit{bzw.} \quad \mathcal{L}(E_x, E'_x) \quad \textit{mit} \quad E_x = \pi^{-1}[\{x\}] \quad \textit{und} \quad E'_x = \pi'^{-1}[\{x\}].$$

Beweis: Es genügt die Aussage auf jeder zusammenhängenden Komponente von B zu zeigen. Wegen Satz 1.53 genügt es dann die Aussage für Vektorraumbündel zu zeigen, die durch Kozykel induziert werden. Seien F und F' zwei normierte Vektorräume. Dann sind die beiden folgenden Abbildungen analytische Gruppenhomomorphismen:

$$\begin{array}{rccl} \times : & GL(F) \times GL(F') \to GL(F \times F'), & & (A, B) \mapsto A \times B \text{ mit} \\ A \times B : & F \times F' \to F \times F', & & (f, f') \mapsto (Af, Bf'). \\ \Pi : & GL(F) \times GL(F') \to GL(\mathcal{L}(F, F')), & & (A, B) \mapsto \Pi(A, B) \text{ mit} \\ \Pi(A, B) : & \mathcal{L}(F, F') \to \mathcal{L}(F, F'), & & C \mapsto B \circ C \circ A^{-1} \end{array}$$

Dabei wird Af durch $\Pi(A, B)(C)$ auf Bf' abgebildet, wenn f durch C auf f' abgebildet wird. Seien jetzt (E, B, π) und (E', B, π) zwei Vektorraumbündel vom Fasertyp F bzw. F' mit normierten Vektorräumen F und F'. Die Schnittmengen zweier offener Überdeckungen von B auf denen jeweils die Urbilder von π bzw. π' triviale Bündle sind bilden eine Überdeckung $\mathcal{U}$ durch offene Mengen U, auf denen die Vektorraumbündel $\pi^{-1}[U]$ und $\pi'^{-1}[U]$ isomorph zu $F \times U$ bzw. $F' \times U$ sind. Wegen Satz 1.53 werden dann die beiden Vektorraumbündel (E, B, π) und (E', B, π) induziert durch Kozykel

$$\begin{array}{ll} \phi_{V,U} : U \cap V \to GL(F) & \text{für alle } (U, V) \in \mathcal{U}^2 \\ \psi_{V,U} : U \cap V \to GL(F') & \text{für alle } (U, V) \in \mathcal{U}^2. \end{array}$$

Weil diese beiden Kozykel die Kozykelbedingung erfüllen, erfüllen auch die Kozykel

$$\begin{aligned} \phi_{V,U} \times \psi_{V,U} &: U \cap V \to GL(F \times F') && \text{für alle } (U,V) \in \mathcal{U}^2 \\ \Pi(\phi_{V,U}, \psi_{V,U}) &: U \cap V \to GL(\mathcal{L}(F,F')) && \text{für alle } (U,V) \in \mathcal{U}^2 \end{aligned}$$

die Kozykelbedingung und induzieren zwei Vektorraumbündel $E \oplus E'$ bzw. $\mathrm{Hom}(E,E')$ vom Fasertyp $F \times F'$ bzw. $\mathcal{L}(F,F')$ auf B. Wir zeigen jetzt, dass die Fasern dieser Vektorraumbündel $E \oplus E'$ bzw. $\mathrm{Hom}(E,E')$ über allen Punkten $x \in B$ isomorph sind zu $E_x \times E'_x$ bzw. $\mathcal{L}(E_x, E'_x)$. Seien also für alle $U \in \mathcal{U}$ die lokalen Trivialisierungen von E und E' gegeben durch Isomorphismen von Vektorraumbündeln

$$\phi_U : F \times U \to \pi^{-1}[U] \text{ und } \psi_U : F' \times U \to \pi'^{-1}[U]$$

so dass folgende Diagramme kommutieren:

$$\begin{array}{ccccc} F \times U & \xrightarrow{\phi_U} & \pi^{-1}[U] & \hookrightarrow & E \\ p_2 \downarrow & & \pi \downarrow & & \pi \downarrow \\ U & \xrightarrow{\mathbb{1}_U} & U & \hookrightarrow & B \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{ccccc} F' \times U & \xrightarrow{\psi_U} & \pi'^{-1}[U] & \hookrightarrow & E' \\ p_2 \downarrow & & \pi' \downarrow & & \pi \downarrow \\ U & \xrightarrow{\mathbb{1}_U} & U & \hookrightarrow & B \end{array}$$

Für alle $U \in \mathcal{U}$ ist die Abbildung

$$F \times F' \times U \to \bigcup_{x \in U} E_x \times E'_x, \quad (f, f', x) \mapsto \Big(\phi_U|_{F \times \{x\}} f, \psi_U|_{F' \times \{x\}} f', x \Big)$$

eine bijektive Abbildung von dem trivialen Vektorraumbündel $F \times F' \times U$ über U mit Faser $F \times F'$ auf die disjunkte Vereinigung $\bigcup_{x \in U} E_x \times E'_x$ der kartesischen Produkte der Fasern von E und E' über $x \in U$. Für alle $U, V \in \mathcal{U}$ und $x \in U \cap V$ gilt

$$\Big(\phi_U|_{F \times \{x\}} \times \psi_U|_{F' \times \{x\}} \Big)(f, f') = \Big(\phi_V|_{F \times \{x\}} \times \psi_V|_{F' \times \{x\}} \Big) \circ (\phi_{V,U}(x) \times \psi_{V,U}(x))\,(f, f').$$

Also sind diese Abbildungen verträglich mit der Äquivalenzrelation des von den Kozykeln $(\phi_{V,U} \times \psi_{V.U})_{(U,V) \in \mathcal{U}}$ definierten Vektorraumbündels $E \oplus E'$. Dann sind die Fasern des Vektorraumbündels $E \oplus E'$ isomorph zu $E_x \times E'_x$.

Analog ist für alle $U \in \mathcal{U}$ die Abbildung

$$\mathcal{L}(F, F') \times U \to \bigcup_{x \in U} \mathcal{L}(E_x, E'_x), \quad (C, x) \mapsto \psi_U|_{F' \times \{x\}} \circ (C \times \mathbb{1}_{\{x\}}) \circ \phi_U^{-1}\Big|_{E_x}$$

eine bijektive Abbildung von dem trivialen Vektorraumbündel $\mathcal{L}(F \times F') \times U$ über U mit Faser $\mathcal{L}(F, F')$ in die disjunkte Vereinigung $\bigcup_{x \in U} \mathcal{L}(E_x, E'_x)$ aller linearen Abbildungen von der Faser E_x von E in die Faser E'_x von E'. Für $U, V \in \mathcal{U}$ und $x \in U \cap V$ gilt

$$\begin{aligned} \psi_U|_{F' \times \{x\}} \circ \big(C \times \mathbb{1}_{\{x\}} \big) \circ \phi_U^{-1}\Big|_{E_x} &= \psi_V|_{F' \times \{x\}} \circ \big(\psi_{V,U}(x) \circ C \circ \phi_{V,U}^{-1}(x) \times \mathbb{1}_{\{x\}} \big) \circ \phi_V^{-1}\Big|_{E_x} \\ &= \psi_V|_{F' \times \{x\}} \circ \big(\Pi(\phi_{V,U}(x), \psi_{V,U}(x)) C \times \mathbb{1}_{\{x\}} \big) \circ \phi_V^{-1}\Big|_{E_x}. \end{aligned}$$

Deshalb sind diese Abbildungen verträglich mit der Äquivalenzrelation des von dem Kozykel $(\Pi(\phi_{V,U},\psi_{V,U}))_{(U,V)\in\mathcal{U}^2}$ induzierten Vektorraumbündels $\mathrm{Hom}(E,E')$. Also bestehen die Fasern von $\mathrm{Hom}(E,E')$ für alle $x\in B$ aus $\mathcal{L}(E_x,E'_x)$. **q.e.d.**

Das Vektorraumbündel $E\oplus E'$ wird Withney Summe der beiden Vektorraumbündel (E,B,π) und (E',B,π') genannt. Diese Whitney Summe können wir auch definieren durch das Faserprodukt $E\times_B E'$ als die Einschränkung des Vektorraumbündels $(E\times E',B\times B,\pi\times\pi')$ auf die Diagonale von $B\times B$. Wegen der lokalen Trivialität ist die Projektion jedes Faserbündels eine Submersion. Also ist wegen Korollar 1.47 das Faserprodukt $E\times_B E'$ eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit von $E\times E'$.

Beispiel 1.60. **(i)** *Das duale Bündel E' eines $\mathbb{K}$–Vektorraumbündels (E,B,π) ist das Bündel aller Homomorphismen von dem Bündel E in das triviale $\mathbb{K}$–Linienbündel $(\mathbb{K}\times B,B,p_2)$ über B. So ist z.B. für jede differenzierbare Mannigfaltigkeit X das Kotangentialbündel das duale Bündel $T'X$ des Tangentialbündels (TX,X,π).*

(ii) *Seien V und W zwei endlichdimensionale normierte Vektorräume über $\mathbb{K}$. Weil alle endlichdimensionalen Vektorräume auf natürliche Weise isomorph sind zu ihren Bidualräumen, identifizieren wir das Tensorprodukt $V\otimes W$ mit $\mathcal{L}(V',W)$. Wir definieren das Tensorprodukt zweier Vektorraumbündel (E,B,π) und (F,B,π) vom Fasertyp V bzw. W als das Vektorraumbündel $E\otimes F=\mathrm{Hom}(E',F)$, der Homomorphismen von dem dualen Bündel E' von E in das Vektorraumündel F.*

Definition 1.61. *Seien X und B differenzierbare Mannigfaltigkeiten und (E,B,π) ein Vektorraumbündel und $f:X\to B$ glatt. Wegen Korollar 1.47 ist das Faserprodukt $E\times_B X$ der beiden Abbildungen $\pi:E\to B$ und $f:X\to B$ eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit von $E\times X$ und das Faserprodukt $B\times_B X$ der beiden Abbildungen $\mathbb{1}_B:B\to B$ und $f:X\to B$ eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit von $B\times X$. Die Einschränkung des Vektorraumbündels $(E\times X,B\times X,\pi\times\mathbb{1}_X)$ auf die Untermannigfaltigkeit $B\times_B X$ definiert das Vektorraumbündel $f^*(E)=(E\times_B X,B\times_B X,\pi')$. Es wird inverses Bild des Vektorraumbündels (E,B,π) unter der Abbildung f genannt.*

Die lokalen Trivialisierungen von E induzieren lokale Trivialisierungen von $(E\times X,B\times X,\pi\times\mathbb{1}_X)$ und $(E\times_B X,B\times_B X,\pi')$. Die Einschränkung von $f\times\mathbb{1}_X:X\times X\to B\times X$ auf die Diagonale $X\simeq X\times_X X$ ist ein natürlicher Diffeomorphismus $X\simeq B\times_B X$. Dadaurch wird das Bündel $f^*(E)$ zu einem Bündel über X.

Satz 1.62. *Seien (E,B,π) und (E',B',π') zwei Vektorraumbündel. Dann induziert jeder Morphismus (g,f) mit $g:E'\to E$ und $f:B'\to B$ von (E',B',π') auf (E,B,π) einen Morphismus $(h,\mathbb{1}_{B'})$ mit $h:E'\to f^*(E)$ von (E',B',π') auf das inverse Bild $f^*(E)$ des Vektorraumbündels (E,B,π) unter der Abbildung f.*

Beweis: Offenbar ist $(g \times \mathbb{1}_{B'}, f \times \mathbb{1}_{B'})$ ein Morphismus des Vektorraumbündels $(E' \times B', B' \times B', \pi' \times \mathbb{1}_{B'})$ auf das Vektorraumbündel $(E \times B', B \times B', \pi \times \mathbb{1}_{B'})$. Das Faserprodukt $E' \times_{B'} B'$ bezüglich der glatten Abbildungen $\pi' : E' \to B'$ und $\mathbb{1}_{B'} : B' \to B'$ ist die Einschränkung des Vektorraumbündels $(E' \times B', B' \times B', \pi' \times \mathbb{1}_{B'})$ auf das Faserprodukt $B' \times_{B'} B'$ bezüglich zwei glatten Abbildungen $\mathbb{1}_{B'} : B' \to B'$ als Untermannigfaltigkeit von $B' \times B'$. Die zweite Untermannigfaltigkeit ist die Diagonale von $B' \times B'$, und die erste Untermannigfaltigkeit ist das inverse Bild $\mathbb{1}^*_{B'}(E')$ des Vektorraumbündels (E', B', π') unter der Abbildung $\mathbb{1}_{B'} : B' \to B'$. Seien $p_{E'} : E' \times B' \to E'$ und $p_{B'} : B' \times B' \to B'$ die beiden Projektionen auf den ersten Faktor der kartesischen Produkte. Dann ist $(p_{E'}, p_{B'})$ ein Morphismus des Vektorraumbündels $(E' \times B', B' \times B', \pi' \times \mathbb{1}_{B'})$ auf das Vektorraumbündel (E', B', π'). Er induziert einen Isomorphismus des inversen Bildes $\mathbb{1}^*_{B'}(E')$ des Vektorraumbündels (E', B', π') mit dem Vektorraumbündel (E', B', π').

Das Faserprodukt $E \times_B B'$ bezüglich der glatten Abbildungen $\pi : E \to B$ und $f : B' \to B$ ist die Einschränkung des Vektorraumbündels $(E \times B', B \times B', \pi \times \mathbb{1}_{B'})$ auf das Faserprodukt $B \times_B B'$ bezüglich der glatten Abbildungen $\mathbb{1}_B : B \to B$ und $f : B' \to B$ als Untermannigfaltigkeit von $B \times B'$. Es ist das inverse Bild $f^*(E)$ des Vektorraumbündels (E, B, π) bezüglich der glatten Abbildung f. Weil die Abbildung $f \times \mathbb{1}_{B'}$ offenbar die Diagonale $B' \times_{B'} B'$ von $B' \times B'$ auf die Untermannigfaltigkeit $B \times_B B'$ abbildet, wird durch den Morphismus $(g \times \mathbb{1}_{B'}, f \times \mathbb{1}_{B'})$ das Vektorraumbündel $\mathbb{1}^*_{B'}(E')$ auf das Vektorraumbündel $f^*(E)$ abgebildet. Weil $\mathbb{1}^*_{B'}(E')$ als Vektorraumbündel isomorph ist zu (E', B', π') erhalten wir einen Morphismus von (E', B', π') auf des inverse Bild $f^*(E)$ des Vektorraumbündels (E, B, π) unter der Abbildung f. **q.e.d.**