5. Übung

12. Ein Anfangswertproblem ohne eindeutige Lösung.

Aus Beispiel 1.15(i) ist bereits bekannt, dass die Lösung eines Anfangswertproblems nicht in allen Fällen eindeutig bestimmt ist. Wir betrachten

$$\dot{u} = 2\sqrt{|u|} \quad \text{mit} \quad u(0) = 0. \tag{$\star$}$$

(a) An welchen Stellen erfüllt die Differentialgleichung $(\star)$ nicht die Voraussetzungen des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes? *(2 Punkte)*

(b) Zeigen Sie, dass $u : I \to \mathbb{R}$ **genau dann** eine *maximale* Lösung (im Sinne der Sätze 1.24 bzw. 1.28) des Anfangswertproblems $(\star)$ ist, wenn $I = \mathbb{R}$ und es a, b mit $-\infty \leq a \leq 0 \leq b \leq +\infty$ gibt, so dass

$$u(t) = \begin{cases} -(t-a)^2 & \text{für } t < a \\ 0 & \text{für } a \leq t \leq b \\ (t-b)^2 & \text{für } t > b \end{cases}$$

gilt. Es genügt, den Fall $t \geq 0$ zu betrachten, da der Fall $t < 0$ analog funktioniert.

(10 Punkte)

[Tipp: Ist $u : I \to \mathbb{R}$ eine maximale Lösung von $(\star)$, so setze man $b := \sup\{\, t \in I \cap \mathbb{R}_{\geq 0} \mid u|_{[0,t]} = 0 \,\}$. Im Falle $b < \infty$ fixiere man $t_0 > b$ und vergleiche u mit der maximalen Lösung des Anfangswertproblems $\dot{v} = 2\sqrt{|v|}$ mit $v(t_0) = u(t_0)$, das man für $(t, v) \in O := \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ betrachtet, wobei auf dem Gebiet O die Voraussetzungen des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes erfüllt werden.]

13. Globale Flüsse.

(a) Zeigen Sie, dass durch die folgenden Vorschriften (globale*) Flüsse $\Phi : \mathbb{R} \times M \to M$ auf dem Raum M definiert werden und skizzieren Sie die zugehörigen sog. Phasenportraits, indem Sie einige ausgewählte Trajektorien skizzieren (Bemerkung: Als Phasenportrait bezeichnet man die Menge aller Trajektorien eines dynamischen Systems).

(i) $M := \mathbb{R}^2, \quad \Phi : (t, (x, y)) \mapsto (e^t x, e^t y)$ *(3 Punkte)*

(ii) $M := \mathbb{C}, \quad \Phi : (t, z) \mapsto e^{it} z$ *(3 Punkte)*

(b) Es seien ϕ und ψ globale Flüsse auf den metrischen Räumen M und N. Zeigen Sie: Die Abbildung

$$\phi \times \psi : \mathbb{R} \times M \times N \to M \times N, \qquad (t, x, y) \mapsto (\phi(t, x), \psi(t, y))$$

definiert einen (globalen*) Fluss (einen sog. Produktfluss) auf $M \times N$. *(3 Punkte)*

Bitte wenden.

*Die Globalität muss nicht explizit gezeigt werden, da die Flüsse bereits global definiert sind.

(c) Skizzieren Sie die Orbits des Produktflusses $\phi \times \psi$ aus Teil (b) auf dem Zylinder $\mathbb{R} \times S^1$, wobei die beiden Flüsse ϕ und ψ durch $\phi(t,x) := e^t x$ auf $M := \mathbb{R}$ und $\psi(t,z) := e^{it}z$ auf $N := S^1 := \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$ gegeben seien. *(1 Punkt)*

14. Lösung einer Differentialgleichung

Bestimmen Sie die Lösung $y : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des folgenden Anfangswertproblems:

$$y'(x) = e^{y(x)} \cdot \cos(x), \quad y(0) = 1.$$

Das Intervall I muss hierbei nicht bestimmt werden. *(4 Punkte)*

Abgabe bis spätestens Freitag, den 16. März 2018, 12:00h, im entsprechenden Briefkasten (siehe die Einteilung der Übungsruppen)

Hinweis: Wir bieten folgende Termine für mündlichen Prüfungen an. Die Studenten, die nur die halbe Vorlesung besuchen, könnnen entweder den Termin im April oder einen der beiden Termine im Juni als Ersttermin wählen. Die Studenten, die die ganze Vorlesung besuchen, können nur zwischen den beiden Terminen im Juni als Ersttermin wählen. Der Termin im August ist für alle der Zweittermin. Sie können sich auch direkt für den Zweittermin anmelden. Dann wird Ihnen aber kein zweiter Termin mehr angeboten. Bitte tragen Sie sich bei Frau Braak (Raum A5,6 B129) Montags bis Donnerstags in die entsprechende Liste ein.

mündliche Prüfungen am Freitag, den 27.April nachmittags, Freitag, den 15. Juni ganztägig, Donnerstag, den 28. Juni ganztägig und Freitag, den 31. August ganztägig.