8. Übung

23. Eine nicht-lineare Differentialgleichung

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $y : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der folgenden Differentialgleichung:

$$y'(x) - y(x) = x \cdot (y(x))^5$$

[Tipp: Beispiel 1.46] *(7 Punkte)*

24. Komplexe Systeme

Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $a, b : I \to \mathbb{R}$ stetig und $A : I \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ definiert durch

$$A(t) := \begin{pmatrix} a(t) & -b(t) \\ b(t) & a(t) \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass das reelle System $\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = A(t) \cdot \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ äquivalent zu einer skalaren komplexen Gleichung $\dot{z}(t) = c(t)z(t)$ mit $z := x + iy$ ist und leiten Sie eine lineare Differentialgleichung für $v(t) := z(t)\bar{z}(t)$ her. *(5 Punkte)*

(b) Zeigen Sie $A(t) \cdot A(s) = A(s) \cdot A(t)$ für alle $t, s \in I$. *(2 Punkte)*
Bemerkung: Dies zeigt, dass in diesem Fall für die Fundamentallösung zu obigem reellen System $F(t) = \exp\left(\int_{t_0}^t A(s)ds\right)$ (mit Anfangsbedingung $F(t_0) = \mathbb{1}$) gilt.

25. Unitäre Fundamentallösungen

(a) Es sei $A : \mathbb{R} \to GL(n, \mathbb{K})$ eine differenzierbare Abbildung von $\mathbb{R}$ in den Raum der invertierbaren $n \times n$-Matrizen. Zeigen Sie: Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\frac{d}{dt}(A(t)^{-1}) = -A(t)^{-1}\dot{A}(t)A(t)^{-1}.$$

[Tipp: Man differenziere den Ausdruck $\mathbb{1} = A(t) \cdot A^{-1}(t)$.] *(3 Punkte)*

(b) Für eine Matrix $C \in \mathbb{C}^{n\times n}$ definieren wir $C^H := \bar{C}^T$ als die zu C adjungierte Matrix. Eine Matrix $C \in \mathbb{C}^{n\times n}$ heißt bekanntlich unitär, wenn sie die Gleichung $CC^H = \mathbb{1}$ erfüllt. Wir betrachten die Fundamentallösung F für das lineare System $\dot{F}(t) = A(t)F(t)$, $F(0) = \mathbb{1}$, wobei $t \mapsto A(t)$ stetig in einem Intervall I (mit $0 \in I$) sei und $A^H(t) = -A(t)$ für alle $t \in I$ erfülle.
Zeigen Sie: $F(t)$ ist für alle $t \in I$ unitär. *(5 Punkte)*
[Tipp: Betrachten Sie mit Hilfe von (a) eine Differentialgleichung für $(F^H(t))^{-1}, t \in I$.]

Bitte wenden.

26. Floquettheorie

Wir betrachten in dieser Aufgabe die Differentialgleichung

$$\dot{u}(t) = A(t)u(t), \qquad A(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & 1 \\ 0 & \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Die Matrix $A(t)$ ist in t periodisch mit Periode 2π. Das Ziel dieser Aufgabe ist es, eine invertierbare Transformation $G : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^{2\times 2}$ der Differentialgleichung zu bestimmen, so dass die resultierende Differentialgleichung $\dot{u}(t) = \tilde{A}u(t)$ autonom ist.

(a) Zeigen Sie, dass die Matrix

$$F(t) = \begin{pmatrix} \exp(\sin(t)) & t\exp(\sin(t)) \\ 0 & \exp(\sin(t)) \end{pmatrix}$$

die Fundamentallösung von $\dot{F}(t) = A(t)F(t)$ mit $F(0) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ ist. *(3 Punkte)*

(b) Bestimmen Sie die Monodromie M von $F(t)$ und ein $B \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ mit $\exp(B) = M$. *(3 Punkte)*

(c) Die Matrix $\tilde{A}$ wird definiert durch $B/2\pi$. Bestimmen Sie die zu $\tilde{A}$ gehörige Fundamentallösung $\tilde{F}(t)$ und die Monodromie $\tilde{M}$. *(3 Punkte)*

(d) Berechnen Sie nun die Transformation $G : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^{2\times 2}, \quad t \mapsto G(t)$, die das gegebene nicht-autonome System $\dot{u}(t) = A(t)u(t)$ gemäß Satz 1.63 in das autonome System $\dot{u}(t) = \tilde{A}u(t)$ transformiert. Geben Sie eine Formel an, mit der sich $\tilde{A}$ mit Hilfe von $A(t)$ und $G(t)$ berechnen lässt. *(4 Punkte)*

Abgabe bis spätestens Freitag, den 20. April 2017, 12:00h, in den entsprechenden Briefkästen