3. Übung

6. Lipschitz-Stetigkeit.

Es sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \to \mathbb{R}^m,\ (t, y) \mapsto f(t, y)$ eine stetige und bezüglich y stetig differenzierbare Abbildung derart, dass $(t, y) \mapsto \frac{\partial f(t,y)}{\partial y}$ stetig ist. Zeigen Sie:

(a) Die Funktion f ist lokal Lipschitz-stetig auf D bzgl. y, d.h. in jedem Punkt $(t_0, y_0) \in D$ gibt es eine Umgebung $U \subseteq D$ von (t_0, y_0) und eine Konstante $L = L(t_0, y_0) > 0$ mit

$$\|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq L\|y_1 - y_2\| \quad \text{für alle } (t, y_1), (t, y_2) \in U.$$

[Tipp: benutze den mehrdimensionalen Schrankensatz.] *(3 Punkte)*

(b) Auf jeder kompakten Menge $K \subseteq D$ ist f global Lipschitz-stetig bzgl. y, d.h. es existiert eine Konstante $L > 0$ (unabhängig von speziellen Punkten $(t, y) \in K$) mit

$$\|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq L\|y_1 - y_2\| \quad \text{für alle } (t, y_1), (t, y_2) \in K.$$

[Tipp: Zeige allgemein, dass (b) aus (a) folgt.] *(6 Punkte)*

7. Die Fredholmsche Integralgleichung.

Sei $X := C([a, b])$ der Vektorraum aller stetigen Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, der mittels Norm

$$\|f\|_\infty := \max_{t \in [a,b]} |f(t)|$$

bekanntlich zu einem Banach-Raum wird. Seien $u \in C([a, b])$ und $k \in C([a, b] \times [a, b])$ gegebene stetige reelle Funktionen und

$$M := \max_{t,s \in [a,b]} |k(t, s)|.$$

Zeigen Sie, dass die sog. *Fredholmsche Integralgleichung*

$$x(t) = \mu \int_a^b k(t, s)x(s)ds + u(t), \quad t \in [a, b]$$

dann für jeden Parameter $\mu \in \mathbb{R}$ mit

$$|\mu| < \frac{1}{M(b - a)}$$

genau eine Lösung $x \in C([a, b])$ besitzt.

[Tipp: Banachscher Fixpunktsatz mit $F(x) := u + \mu \int_a^b k(\cdot, s)x(s)ds$, $x \in X$.]

(7 Punkte)

Bitte wenden.

8. Ein Anfangswertproblem.

(a) Geben Sie eine Abbildung $F : C(I, \mathbb{R}) \to C(I, \mathbb{R})$ $(I = [-\epsilon, \epsilon]$ mit einem geeigneten $\epsilon > 0)$ an, deren Fixpunkt Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{u}(t) = u(t) + t, \quad u(0) = 0 \tag{$\star$}$$

ist und bestimmen Sie $\epsilon > 0$ so, dass die Abbildung $F : C(I, \mathbb{R}) \to C(I, \mathbb{R})$ nach dem Banachschen Fixpunktsatz genau einen Fixpunkt hat. [Tipp: Modifiziere den Beweis des Satzes von Picard-Lindelöf.] *(4 Punkte)*

(b) Geben Sie explizit eine Folge $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C(I, \mathbb{R})$ an, die gegen den Fixpunkt von F konvergiert, ohne die explizite Lösung von $(\star)$ zu kennen.

[Tipp: Iteration aus Banachschem Fixpunktsatz. Man wähle einen geeigneten Startwert.] *(4 Punkte)*

(c) Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge aus Aufgabenteil (b) und untersuchen Sie, für welche Teilmenge von $\mathbb{R}$ die Folge konvergiert. Löst der Grenzwert dieser Folge tatsächlich das Anfangswertproblem $(\star)$? *(4 Punkte)*

Abgabe bis spätestens Freitag, den 2. März 2017, 12:00h, im entsprechenden Briefkasten