9. Übung

27. Linear unabhängige Lösungen linearer Systeme

Die Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ habe n linear unabhängige Eigenvektoren $v_1, \dots, v_n$ mit zugehörigen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie: Die Funktionen $y_1, \dots, y_n$ mit $y_k(t) := e^{\lambda_k t} v_k$, $k = 1, \dots, n$ sind linear unabhängige Lösungen der Differentialgleichung $y' = A \cdot y$. *(2 Punkte)*

28. Stabilitätsuntersuchung von Ruhelagen I

Untersuchen Sie, ob der Nullpunkt der folgenden linearen Systeme stabil, asymptotisch stabil oder instabil ist und skizzieren Sie die Phasenportraits (indem Sie zuvor die Differentialgleichungen allgemein lösen). Charakterisieren Sie ferner den Typ der Ruhelage 0 (Quelle, Senke, Sattel, Knoten, Spirale usw.).

$$\textbf{(a)} \quad y' = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} y, \qquad \textbf{(b)} \quad y' = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} y$$

[Tipp zur schnellen Lösung der Differentialgleichungen: Aufgabe 27] *(6+8 Punkte)*

29. Stabilitätsuntersuchung von Ruhelagen II

Wir betrachten für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ die skalare Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = \alpha \cdot x(t)^3.$$

(a) Bestimmen Sie alle Ruhelagen x^* des zu dieser Differentialgleichung gehörenden lokalen Flusses. *(1 Punkt)*

(b) Lösen Sie diese Differentialgleichung zu einem beliebigen Anfangswert $x(0) = x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. *(4 Punkte)*

(c) Für welche Werte $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist die Ruhelage x^* attraktiv, für welche instabil? Begründen Sie Ihre Antwort. *(4 Punkte)*

Bitte wenden.

30. Stabilität inhomogener linearer Systeme

In Analogie zu Definition 2.1 definieren wir die Stabilität von Lösungen autonomer Systeme (dies ist gewissermaßen eine Verallgemeinerung von Definition 2.1 auf Nicht-Ruhelagen): Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig und betrachte das autonome System

$$y' = f(y). \tag{1}$$

Eine auf $[0, \infty)$ definierte Lösung y von (1) heißt **stabil**, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass alle Lösungen z von (1) mit $z(0) \in B(y(0), \delta)$ für alle $t \geq 0$ existieren und $z(t) \in B(y(t), \epsilon)$ für alle $t \geq 0$ gilt.

Eine auf $[0, \infty)$ definierte Lösung y von (1) heißt **attraktiv**, wenn es ein $\delta > 0$ gibt, so dass alle Lösungen z von (1) mit $z(0) \in B(y(0), \delta)$ für alle $t \geq 0$ existieren und es für alle $\epsilon > 0$ ein $t_0 > 0$ gibt, so dass $z(t) \in B(y(t), \epsilon)$ für alle $t > t_0$ gilt. Die Begriffe **instabil** und **asymptotisch stabil** sind wie in Def. 2.1 definiert.

Seien $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie:

(a) Ist $\tilde{y} \equiv 0$ asymptotisch stabile Lösung des homogenen Systems $y'(t) = A \cdot y(t)$, so strebt jede Lösung des homogenen Systems (unabhängig von der Größe des Anfangswerts) gegen Null für $t \to \infty$. *(4 Punkte)*

(b) Eine beliebige Lösung des inhomogenen Systems $y'(t) = A \cdot y(t) + b$ ist (asymptotisch) stabil genau dann, wenn $\tilde{y} \equiv 0$ (asymptotisch) stabile Lösung für das homogene System $y'(t) = A \cdot y(t)$ ist. *(8 Punkte)*

Abgabe bis spätestens Freitag, den 27. April 2018, 12:00h, im entsprechenden Briefkasten

Hinweis: Die Ersttermine für die mündlichen Prüfungen (für 8 ECTS) sind der **15., 28. und 29. Juni 2018**. Tragen Sie sich hierzu bei Frau Braak (Raum B129) in eine entsprechende Liste ein. Diese Termine dürfen auch als Zweittermine von den Studenten, die die Vorlesung nur zur Hälfte hörten (4 ECTS), genutzt werden. Der eigentliche Zweittermin (für 4 als auch 8 ECTS) ist am 31. August.