11. Übung

34. Transformation autonomer Systeme

Gegeben sei das autonome System

$$y'(t) = f(y(t)) \tag{1}$$

mit einer auf einer offenen Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ definierten lokal Lipschitz-stetigen Funktion $f : D \to \mathbb{R}^n$. Sei ferner $t \mapsto \tilde{y}(t)$ eine auf dem Intervall $[0, \infty)$ existierende fixierte Lösung von (1). Wir betrachten das durch $\tilde{y}$ "translatierte" System

$$x'(t) = f(x(t) + \tilde{y}(t)) - f(\tilde{y}(t)). \tag{2}$$

Zeigen Sie:

(a) Die transformierte nicht-autonome Differentialgleichung (2) besitzt die triviale Lösung $\tilde{x} \equiv 0$. *(1 Punkt)*

(b) Die triviale Lösung $\tilde{x}$ von (2) ist genau dann (asymptotisch) stabil, wenn die Lösung $\tilde{y}$ von (1) (asymptotisch) stabil ist. [Beachten Sie die Definition aus Aufgabe 30 für das System (1). Für das nicht-autonome System (2) überlegen Sie sich, wie sich die übliche (für autonome Systeme definierte) Definition einer Ruhelage auf den nicht-autonomen Fall verallgemeinern lässt.] *(6 Punkte)*

35. Phillips Modell mit Beschleuniger

Wir betrachten ein dynamisches System mit stetiger Zeit, in dem wir die Beziehung zwischen dem Produkt Y und der (induzierten) Investition I beschreiben durch

$$I'(t) = -k(I(t) - vY'(t)), \quad k, v > 0$$

Die Entwicklungsgeschwindigkeit des Produkts Y sei proportional zu der Differenz zwischen der Produktmenge und der Nachfrage Z:

$$Y'(t) = -\lambda(Y(t) - Z(t)), \quad \lambda > 0$$

Die Nachfrage $Z(t)$ bestehe aus drei Komponenten: Konsum $C(t)$, autonome Investition A (von t unabhängig) und induzierte Investition $I(t)$, es ist also $Z(t) = C(t) + A + I(t)$. Zusätzlich soll der Konsum ein fester Anteil des Produktes sein, $C(t) = cY(t), 0 < c < 1$. Dieses Modell bezeichnet man als Phillips Modell mit Beschleuniger.

(a) Leiten Sie eine Differentialgleichung für $Y''(t)$ her. (Die rechte Seite darf insbesondere keine Terme mehr enthalten, die von $I(t)$ abhängen, kombinieren Sie dazu die obigen Gleichungen.) *(4 Punkte)*

(b) Berechnen Sie die Ruhelage dieses dynamischen Systems, indem Sie die Differentialgleichung aus (a) zunächst in ein System 1. Ordnung transformieren. *(3 Punkte)*

(c) Zeigen Sie, dass die Ruhelage aus (b) genau dann asymptotisch stabil ist, wenn die Parameter λ, k, v, c die Bedingung $\lambda(1 - c) + k - \lambda kv > 0$ erfüllen. [Tipp: Aufgabe 30(b)] *(5 Punkte)*

Bitte wenden.

36. Rein imaginäre Eigenwerte

In dieser Aufgabe wollen wir zeigen, dass die Menge $N := \{A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \,|\, \sigma(A) \cap i\mathbb{R} = \emptyset\}$ offen und dicht in $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ liegt.

(a) Zeigen Sie: N ist dicht in $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. *(4 Punkte)*

[Tipp: Konstruieren Sie zu $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \setminus N$ eine Folge der Form $A_k := A + \mu_k \cdot \mathbb{1}$, $k \in \mathbb{N}$, mit geeigneten Koeffizienten μ_k, so dass $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset N$ gilt.]

(b) Wir führen für ein normiertes Polynom $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ n-ten Grades $p(x) := x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ die folgende Notation ein: Sei $a := (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ der Vektor der Koeffizienten und $z := (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ der Vektor der n Nullstellen von p. Sei nun $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von normierten Polynomen $p_k : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$, n-ten Grades. Zeigen Sie: Ist die Folge der Koeffizienten $(a_k)_k \subset \mathbb{C}^n$ beschränkt, so ist die Folge der Nullstellen $(z_k)_k \subset \mathbb{C}^n$ ebenfalls beschränkt. [Tipp: Betrachten Sie zu einem normierten Polynom p n-ten Grades die Skalierung $\tilde{p}(x) := \frac{1}{\lambda^n} p(\lambda x)$ mit $\lambda := \max\{|x| : p(x) = 0\}$ und führen Sie einen Widerspruchsbeweis, indem Sie λ_k und $\tilde{p}_k$ zu p_k, $k \in \mathbb{N}$, betrachten und annehmen, dass die in der Behauptung angegebene Folge der Nullstellen unbeschränkt sei.] *(4 Punkte)*

(c) Zeigen Sie mit Hilfe von Teil (b): Die Menge der normierten Polynome n-ten Grades mit reellen Koeffizienten und mit mindestens einer Nullstelle auf der imaginären Achse $i\mathbb{R}$ ist eine abgeschlossene Teilmenge im Raum aller normierten Polynome n-ten Grades mit reellen Koeffizienten. *(4 Punkte)*

(d) Zeigen Sie mit Hilfe von (c), dass N offen in $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ ist, indem Sie die Abgeschlossenheit von $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \setminus N$ zeigen. *(3 Punkte)*

Abgabe bis spätestens Freitag, den 11. Mai 2018, 12:00h, im entsprechenden Briefkasten