2. Übung

3. Periodische Orbits.
Sei $\Phi : \mathbb{Z} \times S^1 \to S^1$ das zeitdiskrete dynamische System, das durch

$$(n,z) \mapsto \Phi(n,z) := e^{2\pi i \alpha n} z = (e^{2\pi i \alpha})^n z, \quad \text{mit } \alpha \in [0,1)$$

gegeben ist. Hierbei wird der Phasenraum $M := S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ mit den komplexen Zahlen vom Betrag 1 identifiziert. Zeigen Sie: Jeder Orbit ist genau dann periodisch, wenn $\alpha \in \mathbb{Q} \cap [0,1)$, wenn also $\alpha = \frac{p}{q}, q \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{N}_0,\ p < q,\ q$ und p teilerfremd. *(4 Punkte)*

4. Systeme von Differentialgleichungen.

(a) Schreiben Sie das folgende System von Differentialgleichungen dritter Ordnung in die Form $x'(t) = A \cdot x(t)$ eines Differentialgleichungssystems erster Ordnung. Geben Sie die Matrix A hierbei explizit an.

$$\begin{aligned} y''' + 2y' + y - 3z' + z &= 0 \\ 2z''' + z'' - 4y'' + 2z + 6y &= 0\ . \end{aligned}$$

(5 Punkte)

(b) Bringen Sie die skalare inhomogene lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$y^{(n)}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t) y^{(k)}(t) = f(t) \quad \text{mit } a_k, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

in die Form $u'(t) = A(t)\,u(t) + b(t)$ eines Differentialgleichungssystems erster Ordnung. Geben Sie die von t abhängige Matrix $A(t)$ sowie den Vektor $b(t)$ auch hier explizit an. *(5 Punkte)*

5. Lineare Unabhängigkeit von Funktionen.

(a) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $y_1, \ldots, y_m : I \to \mathbb{C}^n$ Funktionen. Geben Sie eine Definition für die lineare Unabhängigkeit dieser Funktionen. Zeigen Sie: Existiert ein $t_0 \in I$ derart, dass die Vektoren $y_1(t_0), \ldots, y_m(t_0) \in \mathbb{C}^n$ linear unabhängig sind, so sind auch die Funktionen $y_1, \ldots, y_m$ linear unabhängig. *(5 Punkte)*

(b) Gilt in Teil a) auch die Umkehrung? (Beweis bzw. Gegenbeispiel!) *(3 Punkte)*

(c) Entscheiden Sie im Folgenden jeweils, ob die angegebenen Funktionen auf $\mathbb{R}$ linear unabhängig sind.

(i) $y_1(t) = (\sin(t), \cos(t)), \quad y_2(t) = (e^t, t)$ *(2 Punkte)*

(ii) $f_1(t) = (\sin(t), \cos(t)), \quad f_2(t) = (e^t, t), \quad f_3(t) = (\cos(t), \sin(t))$ *(4 Punkte)*
[Tipp: Es mag hilfreich sein, verschiedene Werte für t einzusetzen.]

Abgabe bis spätestens **Freitag, den 23. Februar 2018, 12:00h, im entsprechenden Briefkasten** (Eingang C-Teil, A5-Gebäude). Wir möchten Sie bitten, Ihre Lösungen partnerweise (d.h. **zwei Namen pro Blatt**) abzugeben. Abgaben mit drei oder mehr Namen pro Blatt sind nicht zulässig.