6. Übung

15. Diverse Differentialgleichungen

Finden Sie die (allgemeinen bzw. ggf. eindeutigen) Lösungen der folgenden Differentialgleichungen bzw. Anfangswertprobleme:

(a) $y'(x) = (x + y(x))^2$ *(6 Punkte)*

(b) $y'(x) = \dfrac{y(x)}{x} - \dfrac{x^2}{y(x)^2}$ mit $y(1) = 1$ *(6 Punkte)*

16. Exakte Differentialgleichungen

Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung

$$e^{3x} \cdot y'(x) + 3e^{3x}\, y(x) - 2x = 0$$

exakt ist und bestimmen Sie eine Lösung zum Anfangswert $y(0) = 2$. Ist diese Lösung eindeutig auf einer Umgebung von $x_0 := 0$? (kurze Begründung) *(6 +1 Punkte)*

17. Eulersche Multiplikatoren

(a) Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\dot{u}(t) \cdot h(t, u(t)) + g(t, u(t)) = 0\ , \tag{$*$}$$

wobei $g, h : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen in den Variablen t und u sein mögen. Zeigen Sie: Hängt $\beta := (\frac{\partial g}{\partial u} - \frac{\partial h}{\partial t})/g$ allein von u ab (nicht aber von t), so ist $M(u) := \exp(-\int_{u_0}^{u} \beta(s)ds)$ (mit $u_0 \in \mathbb{R}$) ein Eulerscher Multiplikator für $(*)$. *(3 Punkte)*
[Es darf ignoriert werden, dass β an eventuellen Nullstellen von g nicht definiert ist.]

(b) Finden Sie für die Differentialgleichung

$$(3t^2 - u^2(t)) \cdot \dot{u}(t) - 2t \cdot u(t) = 0$$

einen Eulerschen Multiplikator, sowie eine Funktion $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die die Lösung $t \mapsto u(t)$ der Differentialgleichung durch $F(t, u(t)) \equiv const.$ charakterisiert. *(6 Punkte)*

18. Lineare Unabhängigkeit von Lösungen linearer Differentialgleichungen

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $A : I \to \mathbb{C}^{n \times n}$ stetig und $y_1, \ldots, y_m : I \to \mathbb{C}^n$ seien linear unabhängige Lösungen der homogenen linearen Differentialgleichung $y'(t) = A(t) \cdot y(t)$. Zeigen Sie, dass dann für alle $t_0 \in I$ die Vektoren $y_1(t_0), \ldots, y_m(t_0) \in \mathbb{C}^n$ ebenfalls linear unabhängig sind. *(5 Punkte)*

Abgabe bis spätestens Freitag, den 23. März 2018, 12:00h, im entsprechenden Briefkasten