10. Übung

31. Flüsse einer Differentialgleichung 2. Ordnung

Gegeben sei die Differentialgleichung 2. Ordnung

$$\ddot{x} + 2\dot{x} - \alpha x = 0 \tag{1}$$

mit $\alpha \in \mathbb{R}$ und gesuchter Lösungsfunktion $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Transformieren Sie die Gleichung (1) zunächst auf ein System erster Ordnung der Form

$$\dot{y} = f(y) \tag{2}$$

mit einer Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Charakterisieren Sie die Ruhelage $y \equiv 0$ (Spirale, Quelle, Senke, Knoten, Sattel usw.) in Abhängigkeit von α und skizzieren Sie das Phasenportrait für den Fall $\alpha = 0$, indem Sie wie in Aufgabe 28 für den Fall $\alpha = 0$ die Differentialgleichung (2) allgemein lösen. *(9 Punkte)*

32. Attraktivität aufgrund negativen Realteils

Die Aussage, dass 0 eine Senke ist, wenn alle Eigenwerte einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ negativen Realteil haben, gilt nur für von t unabhängige A. Wir betrachten hierzu die Differentialgleichung $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ mit

$$A(t) := \begin{pmatrix} -1 + \frac{3}{2}\cos^2(t) & 1 - \frac{3}{2}\sin(t)\cos(t) \\ -1 - \frac{3}{2}\sin(t)\cos(t) & -1 + \frac{3}{2}\sin^2(t) \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte von $A(t)$ und zeigen Sie, dass diese negativen Realteil haben. *(4 Punkte)*

(b) Zeigen Sie, dass eine Lösung der Differentialgleichung gegeben ist durch

$$x(t) = e^{t/2}\begin{pmatrix} -\cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}.$$

(3 Punkte)

(c) Zeigen Sie, dass die Ruhelage $x \equiv 0$ des Systems $\dot{x}(t) = A(t) \cdot x(t)$ nicht attraktiv ist. *(2 Punkte)*

Bitte wenden.

33. Topologische Flussäquivalenz

Wir betrachten die linearen $\mathbb{R}^2$-wertigen autonomen Systeme $\dot{x} = Ax$ und $\dot{y} = -\mathbb{1} \cdot y$, wobei ersteres durch

$$A := -\alpha \cdot \mathbb{1} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

für $\alpha > 0$ gegeben sei.

(a) Geben Sie explizit eine Abbildung $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ an, so dass die beiden Systeme $\dot{x} = Ax$ und $\dot{y} = -\mathbb{1}y$ topologisch flussäquivalent sind, d.h.

$$h(e^{tA}x) = e^{-t}h(x) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^2.$$

Betrachten Sie dazu ein $h(x)$ von der Form $h(x) = x|x|^\gamma$ mit einem zu bestimmenden γ in Abhängigkeit von α (mit $|\cdot|$ ist hier die euklidische Norm gemeint). *(3 Punkte)*

(b) Zeigen Sie, dass die in (a) gefundene Funktion h tatsächlich ein Homöomorphismus ist, indem Sie die Umkehrabbildung h^{-1} von h explizit bestimmen. Zum Nachweis der Stetigkeit von h bzw. h^{-1} genügt der Nachweis der Stetigkeit jeweils bei Null. Für alle von Null verschiedenen Werte darf die Stetigkeit als offensichtlich angenommen werden. *(5 Punkte)*

[Tipp: Für das Finden von h^{-1} mache man ebenfalls den Ansatz $h^{-1}(x) = x|x|^\delta$ mit einem zu bestimmenden δ in Abhängigkeit von γ.]

(c) In diesem Teil wollen wir eine Alternative zur Bestimmung der Funktion h aus Teil (a) angeben: Bestimmen Sie die Funktion h aus Teil (a) mit Hilfe von Lemma 2.13 und Lemma 2.14 aus der Vorlesung.

[Tipp: Für die Norm $\|\cdot\|_A$ in Lemma 2.13 dürfen Sie die euklidische Norm verwenden. Bestimmen Sie zunächst die Umkehrabbildung von $\hat{\Phi}$ aus Lemma 2.13 und berechnen Sie dann explizit die Abbildung Ψ aus dem Beweis von Lemma 2.14.] *(6 Punkte)*

Abgabe bis spätestens Freitag, den 4. Mai 2017, 12:00h, im entsprechenden Briefkasten