4. Übung

9. Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen von Anfangswertproblemen.
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und es gelte

$$f(x) < 0 \quad \text{für } x > 0, \quad f(x) > 0 \quad \text{für } x < 0.$$

Sei weiter das Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad t \geq 0, \quad x(0) = 0 \tag{1}$$

gegeben. Sei x eine Lösung von (1).

(a) Zeigen Sie: Falls $x(t_1) > 0$ für ein $t_1 > 0$ gilt, so besitzt die Menge $\{t \in [0, t_1] : x(t) \leq 0\}$ ein Maximum $t_2 \geq 0$ mit $x(t_2) = 0$. *(4 Punkte)*

(b) Folgern Sie aus (a), dass es kein solches t_1 wie in (a) beschrieben geben kann.
[Tipp: Mittelwertsatz] *(4 Punkte)*

(c) Zeigen Sie, dass jede Lösung x von (1) die Bedingung $x(t) = 0$ für alle $t \geq 0$ erfüllt, d.h. dass $x \equiv 0$ die eindeutige Lösung von (1) ist. *(4 Punkte)*

10. Globale Existenz und Eindeutigkeit.
In dieser Aufgabe sollen für den Fall endlich-dimensionaler Banachräume die Bedingungen (i)-(iii) aus Satz 1.24 durch neue Bedingungen (i')-(iii') ersetzt werden:
Sei V ein *endlich-dimensionaler* Banachraum und seien die Voraussetzungen von Satz 1.24 gegeben, d.h. sei $O \subset \mathbb{R} \times V$ eine offene Teilmenge und $f : O \to V$ stetig und in der zweiten Komponente lokal Lipschitz-stetig. Zeigen Sie, dass für jedes $(t_0, q_0) \in O$ für das nach Satz 1.24 eindeutige maximale Existenzintervall (a, b) mit $t_0 \in (a, b)$, auf dem das Anfangswertproblem

$$\dot{q} = f(t, q), \quad q(t_0) = q_0$$

genau eine Lösung q besitzt, eine der folgenden Bedingungen für die Intervallgrenzen a bzw. b erfüllt sind:

(i')=(i) $a = -\infty$ (bzw. $b = \infty$)

(ii') $t \mapsto \|q(t)\|$ ist für kleine $\epsilon > 0$ auf $(a, a + \epsilon)$ bzw. $(b - \epsilon, b)$ unbeschränkt.

(iii') Es gibt eine Folge $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in (a, b) mit Grenzwert a bzw. b, so dass $(t_n, q(t_n))_n$ konvergiert und der Grenzwert $\lim\limits_{n \to \infty} (t_n, q(t_n))$ nicht in O liegt.

[Tipp: Zeigen Sie, dass die Bedingung (iii) die Bedingung (iii') impliziert, und dass (iii') äquivalent dazu ist, dass für kleine $\epsilon > 0$ der Abschluss von $\{(t, q(t)) \mid t \in (a, a + \epsilon)\}$ bzw. $\{(t, q(t)) \mid t \in (b - \epsilon, b)\}$ nicht in O liegt. Dann benutze man den Satz von Heine Borel, um zu zeigen, dass wenn die beiden Bedingungen (iii') und (ii') nicht gelten, dass dann auch die Bedingung (ii) nicht gilt. Der Satz von Heine Borel besagt, dass in einem endlichdimensionalen Banachraum jede beschränkte und abgeschlossene Teilmenge kompakt ist.] *(6 Punkte)*

Bitte wenden.

11. Existenz von Lösungen von Anfangswertproblemen.

(a) Seien $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall sowie $v, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetige, nichtnegative Funktionen. Ferner existiere ein $c > 0$ mit

$$v(t) \le c + \int_a^t v(s)g(s)ds \quad \text{für alle}\, t \in [a,b].$$

Zeigen Sie, dass dann

$$v(t) \le c \cdot \exp\left(\int_a^t g(s)ds\right) \quad \text{für alle}\, t \in [a,b]$$

gilt.

[Tipp: Schätzen Sie mit $f(t) := c + \int_a^t v(s)g(s)ds$ die Ableitung $f'(t)$ ab und betrachten Sie den Ausdruck $\ln(f(t)/c)$. Warum ist dieser Ausdruck wohldefiniert?] *(4 Punkte)*

(b) Sei V ein Banachraum und $f : \mathbb{R} \times V \to V$ stetig und in der zweiten Komponente lokal Lipschitz-stetig. Weiter sei für den Anfangszeitpunkt $t_0 \in \mathbb{R}$ das Anfangswertproblem

$$\dot{u}(t) = f(t, u(t)), \quad u(t_0) = u_0$$

gegeben. Ferner sei f *linear beschränkt*, d.h. es gibt auf $\mathbb{R}$ stetige, reellwertige, nicht-negative Funktionen $t \mapsto A(t)$ und $t \mapsto B(t)$, so dass für alle $(t,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$

$$\|f(t,y)\| \le A(t)\|y\| + B(t)$$

gilt. Zeigen Sie mit Hilfe von Teil a), dass dann obiges Anfangswertproblem eine eindeutige *globale*, d.h. eine auf ganz $(-\infty, \infty)$ definierte Lösung besitzt.

[Tipp: zeige zuerst, dass für die globale Lösung in Satz 1.24 $b = \infty$ gilt. Danach übertrage man diese Argumente um auch $a = -\infty$ zu zeigen. *(7 Punkte)*

Abgabe bis spätestens Freitag, den 9. März 2017, 12:00h, im entsprechenden Briefkasten