## 13. Übung

**41. Ein Kriterium für Instabilität nach Lyapunov**

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen mit $0 \in D$ und $f : D \to \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig mit $f(0) = 0$. Wir betrachten das autonome System

$$\dot{y}(t) = f(y(t)). \tag{1}$$

Sei $L : D \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare *Lyapunov-Funktion* zum System (1), d.h. es gilt

$$\nabla L(y) \cdot f(y) \leq 0 \quad \text{für alle}\, y \in D.$$

Beweisen Sie folgendes Kriterium für Instabilität: Falls $L$ zusätzlich

$$L(0) = 0 \quad \text{und} \quad \nabla L(y) \cdot f(y) < 0 \text{ für alle } y \in D \setminus \{0\} \tag{2}$$

erfüllt und es in jeder Umgebung von $0 \in D$ einen Punkt gibt, in dem $L$ einen negativen Wert annimmt, dann ist die Ruhelage $y^* \equiv 0$ von (1) instabil. *(7 Zusatzpunkte)*

[Tipp: Nehmen Sie an, $y^*$ wäre stabil und führen Sie einen Widerspruchsbeweis: Zeigen Sie dazu, dass für einen geeigneten Anfangswert $y(0) = y_0$ die Trajektorie der zugehörigen Lösung $t \mapsto y(t)$ in einer in $D$ kompakten Menge enthalten ist, zugleich jedoch $L(y(t)) \to -\infty$ für $t \to \infty$ gilt.]

**42. Stabilitätsuntersuchung nach Lyapunov**

Gegeben sei das autonome System

$$\dot{x} = -y + x^3$$
$$\dot{y} = x + y^3$$

mit gesuchter Lösungsfunktion $t \mapsto (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie durch Konstruktion einer geeigneten Lyapunov-Funktion, dass der Nullpunkt $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ eine instabile Ruhelage obigen Systems ist. *(3 Zusatzpunkte)*

**43. Erste Integrale**

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \to \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig. Wir betrachten das autonome System

$$\dot{y}(t) = f(y(t)). \tag{3}$$

Eine stetig differenzierbare Funktion $H : D \to \mathbb{R}$ heißt *erstes Integral* zum System (3), wenn

$$\nabla H(y) \cdot f(y) = 0 \quad \text{für alle}\, y \in D.$$

Erste Integrale sind also insbesondere Lyapunov-Funktionen.

**(a)** Sei $H : D \to \mathbb{R}$ ein erstes Integral zu (3). Zeigen Sie, dass $H$ längs jeder Trajektorie des durch (3) definierten dynamischen Systems konstant ist, d.h. $H(\Phi(t; y_0)) = H(y_0)$ für alle $y_0 \in \mathbb{R}^n$ und alle $t$ aus dem jeweiligen maximalen Existenzintervall. Mit $t \mapsto \Phi(t; y_0)$ bezeichnen wir jeweils die Lösung von (3) zum Anfangswert $y(0) = y_0$. *(2 Zusatzpunkte)*

*Bitte wenden.*

**(b)** Für den Rest der Aufgabe betrachten wir das autonome System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= 2x - 4x^3 \end{aligned} \tag{4}$$

mit gesuchter Lösungsfunktion $t \mapsto (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie ein erstes Integral $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zu diesem System. [Tipp: Bestimmen Sie Gleichungen, die $\frac{\partial H}{\partial x}$ und $\frac{\partial H}{\partial y}$ erfüllen müssen. Hieraus lässt sich dann leicht ein geeignetes $H$ finden.] *(2 Zusatzpunkte)*

**(c)** Bestimmen Sie alle Ruhelagen des Systems (4) und untersuchen Sie sie auf Stabilität (stabil, instabil, asymptotisch stabil). *(6 Zusatzpunkte)*

**(d)** Zeigen Sie, dass die Niveaumenge $N := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : H(x, y) = H(x_0, y_0)\}$ für alle $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ kompakt ist und alle Lösungen von (4) auf ganz $\mathbb{R}$ existieren.

*(4 Zusatzpunkte)*

**(e)** Sei $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ so, dass in der Niveaumenge $N$ aus (d) keine Ruhelagen von (4) enthalten sind. Zeigen Sie: Für alle $(x, y) \in N$ gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass

$$B((x, y), \epsilon) \cap N \subseteq \{\Phi(t; x, y) : t \in \mathbb{R}\}$$

gilt (hierbei bezeichnet $B((x, y), \epsilon)$ den Ball um $(x, y)$ mit Radius $\epsilon$; mit $t \mapsto \Phi(t; x, y)$ bezeichnen wir wie in Teil (a) die Lösung von (4) zum Anfangswert $(x, y)$).

*(4 Zusatzpunkte)*

**(f)** Seien $(x_0, y_0)$ und $N$ wie in Teil (e). Zeigen Sie mit Hilfe von Teil (e), dass dann für alle $(x, y) \in N$ der Orbit zu $t \mapsto \Phi(t; x, y)$ periodisch ist. *(6 Zusatzpunkte)*

**(g)** Sei $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ beliebig und $N$ wie in (e) mit dem Zusatz, dass $N$ nun auch Ruhelagen von (4) enthalten darf. Begründen Sie kurz, dass für $N$ je einer der folgenden 4 Fälle in Abhängigkeit von $(x_0, y_0)$ auftritt und charakterisieren Sie diese 4 Fälle durch die Werte von $H(x_0, y_0)$ (z.B. "Fall 1 $\Leftrightarrow$ $H(x_0, y_0) > 0$" usw.):

- Fall 1: $N$ besteht aus einem periodischen Orbit (und ist insbesondere zusammenhängend).
- Fall 2: $N$ besteht aus zwei periodischen Orbits.
- Fall 3: $N$ besteht aus drei Orbits, wovon einer eine Ruhelage ist.
- Fall 4: $N$ besteht aus zwei Ruhelagen.

Skizzieren Sie nun mit dieser Kenntnis und dem Wissen aus den vorherigen Aufgabenteilen das Phasenportrait zum System (4). *(5 Zusatzpunkte)*

**Abgabe bis spätestens Freitag, den 25. Mai 2018, 12:00h, im entsprechenden Briefkasten**
**Hinweis:** Die auf den Übungsblättern 1 bis 13 erreichbare Gesamtpunktzahl beträgt 343 Punkte, so dass die 50%-Grenze demzufolge bei 172 Punkten liegt.