12. Übung

37. Das Mathematische Pendel

Gegeben sei die Schwingungsgleichung des *Mathematischen Pendels mit Reibung*

$$\ddot{x} + \dot{x} + g \cdot \sin(x) = 0 \tag{1}$$

mit $g > 1$ und gesuchter Funktion $t \mapsto x(t) \in \mathbb{R}$. (Bemerkung am Rande: die physikalische Bedeutung der Konstanten g ist die Fallbeschleunigung.)

(a) Transformieren Sie das System (1) auf ein System 1. Ordnung der Form

$$\dot{y} = f(y) \tag{2}$$

mit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass zu jedem Anfangswert $y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^2$ eine (globale) Lösung $t \mapsto y(t)$ von (2) auf dem Intervall $[0, \infty)$ existiert. *(3 Punkte)*

(b) Bestimmen Sie alle Ruhelagen von (2) und untersuchen Sie diese auf Stabilität (stabil, instabil, asymptotisch stabil). *(6 Punkte)*

38. Stabilitätsuntersuchungen

Gegeben sei das (nicht-lineare) autonome System

$$\dot{x} = ax + x^2 + y^2,$$
$$\dot{y} = bx - y + xy$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq 0$ und gesuchter Funktion $t \mapsto (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$.

(a) Zeigen Sie, dass im Fall $a < 0$ der Nullpunkt eine asymptotisch stabile Ruhelage ist. *(3 Punkte)*

(b) Man beweise oder widerlege, dass die Behauptung in (a) auch im Fall $a = 0$ gilt. *(3 Punkte)*

39. Die Lorenz-Gleichungen

Seien σ, r und b positive Konstanten. Die *Lorenz-Gleichungen* lauten

$$\dot{x} = \sigma(y - x),$$
$$\dot{y} = rx - y - xz,$$
$$\dot{z} = xy - bz.$$

mit gesuchter Funktion $t \mapsto (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie:
Für $0 < r < 1$ ist der Nullpunkt obigen Systems eine asymptotisch stabile Ruhelage und für $r > 1$ ist der Nullpunkt eine instabile Ruhelage. *(8 Punkte)*

Bitte wenden.

40. Nichtlineare dynamische Systeme

(a) Bestimmen Sie den Fluss zu dem nichtlinearen System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x \\ \dot{y} &= y + x^2 \end{aligned}$$

mit gesuchter Funktion $t \mapsto (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$, indem Sie dieses Differentialgleichungssystem zuvor lösen. *(5 Punkte)*

(b) Definiere nun die Abbildung

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (x, y + \frac{x^2}{3}). \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass diese Abbildung h eine topologische Flussäquivalenz zwischen dem nichtlinearen System aus (a) und dem linearen $\mathbb{R}^2$-wertigen System $\dot{z} = Az$ liefert. Hierbei ist die Matrix A definiert durch $A := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. *(4 Punkte)*

Abgabe bis spätestens Freitag, den 18. Mai 2018, 12:00h, im entsprechenden Briefkasten