7. Übung

19. Skalare lineare Differentialgleichungen

Bestimmen Sie die Lösung $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des inhomogenen linearen Anfangswertproblems

$$\dot{u}(t) = t \cdot u(t) + t, \quad u(1) = 1 \,.$$

(5 Zusatzpunkte)

20. Lineare Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten

Lösen Sie das folgende lineare Anfangswertproblem und vereinfachen Sie die Lösung so weit wie möglich.

$$\dot{u}(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot u(t), \qquad u(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(7 Zusatzpunkte)

Tipp: Zur Berechnung der Matrixexponentialfunktion beachte man gegebenenfalls die in der Vorlesung gezeigte Beispiel 1.56 aus dem Skript. Man kann die Aufgabe aber auch ohne Kenntnis von 1.56 lösen.

21. Lineare Systeme und Fundamentallösung

Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $t_0 \in I$ und $A : I \to \mathbb{C}^{2\times 2}$, sowie die Differentialgleichung

$$\dot{u}(t) = A(t) \cdot u(t) \tag{1}$$

gegeben. Weiter sei $F : I \to \mathbb{C}^{2\times 2}$ die zugehörige Fundamentallösung, d.h. die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{F}(t) = A(t) \cdot F(t), \quad F(t_0) = \mathbb{1}.$$

Zeigen Sie:

$$F(t) = (y_1(t), y_2(t))\,, \quad t \in I,$$

wobei $y_1, y_2 : I \to \mathbb{C}^2$ die als Spaltenvektoren geschriebenen (eindeutigen) Lösungen von (1) mit Anfangswerten $y_1(t_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ bzw. $y_2(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind. *(2 Zusatzpunkte)*

Bitte wenden.

22. Lineare Differentialgleichungssysteme mit nicht-konstanten Koeffizienten

Es sei $A : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^{2\times 2}$ definiert durch $A(t) := \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, sowie die (nicht-autonome) lineare Differentialgleichung

$$\dot{u}(t) = A(t) \cdot u(t) \tag{2}$$

gegeben.

(a) Bestimmen Sie die Fundamentallösung $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^{2\times 2}$ von (2) zum Anfangszeitpunkt $t_0 := 0$, d.h. die Lösung von

$$\dot{F}(t) = A(t) \cdot F(t), \quad F(0) = \mathbb{1}.$$

[Tipp: Zur Bestimmung von $F(t)$ betrachte man das zweidimensionale DGL-System (2) als System von zwei eindimensionalen Differentialgleichungen und löse diese separat nach den bekannten Methoden. Man beachte weiter Aufgabe 21.] *(7 Zusatzpunkte)*

(b) Bestimmen Sie $\exp\left(\int_0^t A(s)\, ds\right)$ und folgern Sie mit Teil a) $F(t) \neq \exp\left(\int_0^t A(s)\, ds\right)$.
[Tipp: Beispiel 1.56 aus dem Skript]

(7 Zusatzpunkte)

Bemerkung: Dies zeigt, dass $\exp\left(\int_0^t A(s)\, ds\right)$ *keine* Fundamentallösung zum DGL-System (2) ist und daher insbesondere $\frac{d}{dt} \exp\left(\int_0^t A(s)\, ds\right) \neq A(t) \cdot \exp\left(\int_0^t A(s)\, ds\right)$ gilt.

Abgabe bis spätestens Freitag, den 13. April 2018, 12:00h, im entsprechenden Briefkasten

- Erinnerung: Vom 4.4. bis 12.4.2017 müssen Sie sich beim Studienbüro für die Prüfung anmelden. Studenten, die die Vorlesung ganz hören (8 ECTS), melden sich zu **Dynamische Systeme und Stabilität** an. Studenten, die die Vorlesung nur zur Hälfte hören (4 ECTS), melden sich zu **Dynamische Systeme** an.

- Dies ist das letzte zur Prüfungszulassung relevante Übungsblatt für diejenigen Studenten, die die Vorlesung nur zur Hälfte hören (mit 4 ECTS). Beachten Sie jedoch, dass der prüfungsrelevante Stoff das gesamte Kapitel 1 der Vorlesung umfasst.