Martin Schmidt
Tobias Simon

Dynamische Systeme

9. März 2017

5. Übung

12. Ein Anfangswertproblem ohne eindeutige Lösung.
Aus Beispiel 1.15(i) ist bereits bekannt, dass die Lösung eines Anfangswertproblems nicht in allen Fällen eindeutig bestimmt ist. Wir betrachten

$$\dot{u} = 2\sqrt{|u|} \quad \text{mit} \quad u(0) = 0. \tag{$\star$}$$

(a) An welchen Stellen erfüllt die Differentialgleichung ($\star$) nicht die Voraussetzungen des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes? *(2 Punkte)*

(b) Zeigen Sie, dass $u : I \to \mathbb{R}$ **genau dann** eine *maximale* Lösung (im Sinne der Sätze 1.24 bzw. 1.28) des Anfangswertproblems ($\star$) ist, wenn $I = \mathbb{R}$ und es a, b mit $-\infty \leq a \leq 0 \leq b \leq +\infty$ gibt, so dass

$$u(t) = \begin{cases} -(t-a)^2 & \text{für } t < a \\ 0 & \text{für } a \leq t \leq b \\ (t-b)^2 & \text{für } t > b \end{cases}$$

gilt. Es genügt, den Fall $t \geq 0$ zu betrachten, da der Fall $t < 0$ analog funktioniert.

(10 Punkte)

[Tipp: Ist $u : I \to \mathbb{R}$ eine maximale Lösung von ($\star$), so setze man $b := \sup\{\, t \in I \cap \mathbb{R}_{\geq 0} \,|\, u|_{[0,t]} = 0 \,\}$. Im Falle $b < \infty$ fixiere man $t_0 > b$ und vergleiche u mit der maximalen Lösung des Anfangswertproblems $\dot{v} = 2\sqrt{|v|}$ mit $v(t_0) = u(t_0)$, das man für $(t, v) \in O := \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ betrachtet, wobei auf dem Gebiet O die Voraussetzungen des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes erfüllt werden.]

13. Globale Flüsse.

(a) Zeigen Sie, dass durch die folgenden Vorschriften (globale*) Flüsse $\Phi : \mathbb{R} \times M \to M$ auf dem Raum M definiert werden und skizzieren Sie die zugehörigen sog. Phasenportraits, indem Sie einige ausgewählte Trajektorien skizzieren (Bemerkung: Als Phasenportrait bezeichnet man die Menge aller Trajektorien eines dynamischen Systems).

(i) $M := \mathbb{R}^2, \quad \Phi : (t, (x, y)) \mapsto (e^t x, e^t y)$ *(3 Punkte)*

(ii) $M := \mathbb{C}, \quad \Phi : (t, z) \mapsto e^{it} z$ *(3 Punkte)*

(b) Es seien ϕ und ψ globale Flüsse auf den metrischen Räumen M und N. Zeigen Sie: Die Abbildung

$$\phi \times \psi : \mathbb{R} \times M \times N \to M \times N, \qquad (t, x, y) \mapsto (\phi(t, x), \psi(t, y))$$

definiert einen (globalen*) Fluss (einen sog. Produktfluss) auf $M \times N$. *(3 Punkte)*

Bitte wenden.

*Die Globalität muss nicht explizit gezeigt werden, da die Flüsse bereits global definiert sind.

(c) Skizzieren Sie die Orbits des Produktflusses $\phi \times \psi$ aus Teil (b) auf dem Zylinder $\mathbb{R} \times S^1$, wobei die beiden Flüsse ϕ und ψ durch $\phi(t,x) := e^t x$ auf $M := \mathbb{R}$ und $\psi(t,z) := e^{it} z$ auf $N := S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ gegeben seien. *(1 Punkt)*

14. Lösung einer Differentialgleichung

Bestimmen Sie die Lösung $y : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des folgenden Anfangswertproblems:

$$y'(x) = e^{y(x)} \cdot \cos(x), \quad y(0) = 1.$$

Das Intervall I muss hierbei nicht bestimmt werden. *(4 Punkte)*

Abgabe bis spätestens Freitag, den 17. März 2017, 12:00h, im Briefkasten Nr. 46260

Hinweis: Die mündlichen Prüfungen für diejenigen, die die Vorlesung nur zur Hälfte hören, finden am **24. April 2017** statt. Tragen Sie sich hierzu bitte bei Frau Braak (A5, Raum B129) in eine entsprechende Liste ein.