Satz: In einem endlich-dimensionalen normierten $\mathbb{K}$-Vektorraum V sind alle beschränkten und abgeschlossenen Teilmengen kompakt. (Hierbei bezeichnet $\mathbb{K}$ entweder $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$)

Dieser Satz wird in Aufgabe 10 benötigt. Sei $n := \dim(V) < \infty$. Aus der Analysis und Linearen Algebra sind bekannt:

(1) $V \cong \mathbb{K}^n$ (als Vektorraumisomorphismus)

(2) Im $\mathbb{K}^n$ sind beschränkte und abgeschlossene Teilmengen kompakt (Satz von Heine-Borel)

(3) Auf dem $\mathbb{K}^n$ sind alle Normen äquivalent.

Es genügt, den Satz für abgeschlossene Bälle $\overline{B_R(0)} := \{x \in V : \|x\| \leq R\}$ mit $R > 0$ zu zeigen, denn zu jeder beschränkten und abgeschlossenen Menge $K \subset V$ gibt es ein $R > 0$ mit $K \subset \overline{B_R(0)}$. Aus der Kompaktheit von $\overline{B_R(0)}$ folgt dann die Kompaktheit von K, da abgeschlossene Teilmengen kompakter Mengen kompakt sind. Zu zeigen bleibt also, dass $\overline{B_R(0)} \subset V$ kompakt ist.

Beweis obigen Satzes: Sei $B := (b_1, \ldots, b_n)$ eine Basis des normierten Raumes $(V, \|\cdot\|)$ und

$$\phi : V \to \mathbb{K}^n, \quad x =: \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \mapsto (a_1, \ldots, a_n) =: a(x) \in \mathbb{K}^n$$

der kanonische Isomorphismus, der jedem $x \in V$ seinen Koeffizientenvektor $a(x)$ bzgl. der Basis B zuordnet. Wir definieren für $x \in V$ die von der Basis B induzierte Norm $\|x\|_B := \|\phi(x)\|_1$, wobei $\|\cdot\|_1$ die 1-Norm auf dem $\mathbb{K}^n$ bezeichnet (wegen (3) kann man statt $\|\cdot\|_1$ auch jede andere Norm auf $\mathbb{K}^n$ wählen). Aufgrund der Definition von $\|\cdot\|_B$ und wegen (2) ist $\overline{B_R(0)} \subset V$ bezüglich $\|\cdot\|_B$ kompakt (denn die Kugeln bezüglich $\|\cdot\|_B$ sind gerade die 1-Norm-Kugeln im Koeffizientenraum $\mathbb{K}^n$). Zu zeigen bleibt, dass $\overline{B_R(0)}$ auch bezüglich der *gegebenen* Norm $\|\cdot\|$ kompakt ist. Dazu zeigen wir, dass auf V alle Normen äquivalent sind, indem wir zeigen, dass die (beliebig vorgegebene) Norm $\|\cdot\|$ äquivalent zur (speziell gewählten und von der Basis B abhängigen) Norm $\|\cdot\|_B$ ist.
Wegen der Stetigkeit der Abbildungen

$$(V, \|\cdot\|_B) \to (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_1), \quad x \mapsto a(x)$$

(beachte die Definition $\|x - \tilde{x}\|_B = \|a(x) - a(\tilde{x})\|_1$ für $x, \tilde{x} \in V$),

$$\phi^{-1} : (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_1) \to (V, \|\cdot\|)$$

(die Stetigkeit folgt aus $\|x - \tilde{x}\| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i - \tilde{a}_i| \cdot \|b_i\| \leq \|a - \tilde{a}\|_1 \cdot \max\limits_{i=1,\ldots,n} \|b_i\|$ für $x, \tilde{x} \in V$) und

$$(V, \|\cdot\|) \to (\mathbb{R}, |\cdot|), \quad x \mapsto \|x\|$$

ist die Abbildung

$$f : (V, \|\cdot\|_B) \to (\mathbb{R}, |\cdot|), \quad x \mapsto \|x\|$$

stetig und nimmt auf dem Kompaktum $K := \{x \in V : \|x\|_B = 1\}$ ein Minimum $m > 0$ und ein Maximum $M < \infty$ an (dabei ist $m = 0$ auszuschließen, da dies $x = 0$ implizieren würde, jedoch $0 \notin K$

gilt). Per definitionem gilt $x/\|x\|_B \in K$ für alle $x \in V\setminus\{0\}$. Es folgt nunmehr: Es gibt $0 < m \leq M < \infty$ mit

$$\begin{aligned} &\forall_{x\in V\setminus\{0\}} \quad m \leq \left\| \frac{x}{\|x\|_B} \right\| = \frac{\|x\|}{\|x\|_B} \leq M \\ \Leftrightarrow\ &\forall_{x\in V} \quad m\|x\|_B \leq \|x\| \leq M\|x\|_B. \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass $\|\cdot\|$ äquivalent zu $\|\cdot\|_B$ ist und somit, dass auf V alle Normen äquivalent sind und damit $\overline{B_R(0)}$ auch kompakt bezüglich $\|\cdot\|$ ist. Damit ist der Satz bewiesen. $\square$