

4. Übung

9. Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen von Anfangswertproblemen.

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und es gelte

$$f(x) < 0 \quad \text{für } x > 0, \quad f(x) > 0 \quad \text{für } x < 0.$$

Sei weiter das Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad t \geq 0, \quad x(0) = 0 \tag{1}$$

gegeben. Sei x eine Lösung von (1).

- (a) Zeigen Sie: Falls $x(t_1) > 0$ für ein $t_1 > 0$ gilt, so besitzt die Menge $\{t \in [0, t_1] : x(t) \leq 0\}$ ein Maximum $t_2 \geq 0$ mit $x(t_2) = 0$. (4 Punkte)
- (b) Folgern Sie aus (a), dass es kein solches t_1 wie in (a) beschrieben geben kann.
[Tipp: Mittelwertsatz] (4 Punkte)
- (c) Zeigen Sie, dass jede Lösung x von (1) die Bedingung $x(t) = 0$ für alle $t \geq 0$ erfüllt, d.h. dass $x \equiv 0$ die eindeutige Lösung von (1) ist. (4 Punkte)

10. Globale Existenz und Eindeutigkeit.

In dieser Aufgabe sollen für den Fall endlich-dimensionaler Banachräume die Bedingungen (i)-(iii) aus Satz 1.24 durch neue Bedingungen (i')-(iii') ersetzt werden:

Sei V ein *endlich-dimensionaler* Banachraum und seien die Voraussetzungen von Satz 1.24 gegeben, d.h. sei $O \subset \mathbb{R} \times V$ eine offene Teilmenge und $f : O \rightarrow V$ stetig und in der zweiten Komponente lokal Lipschitz-stetig. Zeigen Sie, dass für jedes $(t_0, q_0) \in O$ für das nach Satz 1.24 eindeutige maximale Existenzintervall (a, b) mit $t_0 \in (a, b)$, auf dem das Anfangswertproblem

$$\dot{q} = f(t, q), \quad q(t_0) = q_0$$

genau eine Lösung q besitzt, eine der folgenden Bedingungen für die Intervallgrenzen a bzw. b erfüllt sind:

- (i')=(i) $a = -\infty$ (bzw. $b = \infty$)
- (ii') $t \mapsto \|q(t)\|$ ist für alle $\epsilon > 0$ auf $(a, a + \epsilon)$ bzw. $(b - \epsilon, b)$ unbeschränkt.
- (iii') Es gibt eine Folge $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in (a, b) , so dass $(t_n, q(t_n))_n$ konvergiert und $\lim_{n \rightarrow \infty} (t_n, q(t_n)) \notin O$.

[Tipp: Zeigen Sie, dass unter der Annahme, dass (i') und (iii') nicht gelten, dann (ii') gelten muss durch Widerspruchsbeweis. D.h. man nehme an, dass auch (ii') nicht gelte und führe dies mit (ii) aus Satz 1.24 zum Widerspruch. Hierzu überlege man sich, warum (ii) aus Satz 1.24 in dieser Situation überhaupt gilt.] (6 Punkte)

Bitte wenden.

11. Existenz von Lösungen von Anfangswertproblemen.

- (a) Seien $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall sowie $v, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetige, nichtnegative Funktionen. Ferner existiere ein $c > 0$ mit

$$v(t) \leq c + \int_a^t v(s)g(s)ds \quad \text{für alle } t \in [a, b].$$

Zeigen Sie, dass dann

$$v(t) \leq c \cdot \exp \left(\int_a^t g(s)ds \right) \quad \text{für alle } t \in [a, b]$$

gilt.

[Tipp: Schätzen Sie mit $f(t) := c + \int_a^t v(s)g(s)ds$ die Ableitung $f'(t)$ ab und betrachten Sie den Ausdruck $\ln(f(t)/c)$. Warum ist dieser Ausdruck wohldefiniert?] (4 Punkte)

- (b) Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und in der zweiten Komponente lokal Lipschitz-stetig. Weiter sei für den Anfangszeitpunkt $t_0 \in \mathbb{R}$ das Anfangswertproblem

$$\dot{u}(t) = f(t, u(t)), \quad t \geq t_0, \quad u(t_0) = u_0$$

gegeben. Ferner sei f *linear beschränkt*, d.h. es gibt auf \mathbb{R} stetige, reellwertige, nicht-negative Funktionen $t \mapsto A(t)$ und $t \mapsto B(t)$, so dass für alle $(t, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$

$$\|f(t, y)\| \leq A(t)\|y\| + B(t)$$

gilt. Zeigen Sie mit Hilfe von Teil a), dass dann obiges Anfangswertproblem eine *globale*, d.h. eine auf ganz $[t_0, \infty)$ definierte Lösung besitzt.

[Tipp: Satz 1.24 bzw. Aufgabe 10] (7 Punkte)

Bemerkung: Satz 1.24 liefert freilich auch, dass die betreffende Lösung sogar *eindeutig* ist.

Abgabe bis spätestens Freitag, den 10. März 2017, 12:00h, im Briefkasten Nr. 46260