

8. Übung

23. Eine nicht-lineare Differentialgleichung

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $y : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ der folgenden Differentialgleichung:

$$y'(x) - y(x) = x \cdot (y(x))^5$$

[Tipp: Beispiel 1.46]

(7 Punkte)

24. Komplexe Systeme

Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $A : I \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ definiert durch

$$A(t) := \begin{pmatrix} a(t) & -b(t) \\ b(t) & a(t) \end{pmatrix}.$$

- (a) Zeigen Sie, dass das reelle System $\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = A(t) \cdot \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ äquivalent zu einer skalaren komplexen Gleichung $\dot{z}(t) = c(t)z(t)$ mit $z := x + iy$ ist und leiten Sie eine lineare Differentialgleichung für $v(t) := z(t)\bar{z}(t)$ her. (5 Punkte)

- (b) Zeigen Sie $A(t) \cdot A(s) = A(s) \cdot A(t)$ für alle $t, s \in I$. (2 Punkte)

Bemerkung: Dies zeigt, dass in diesem Fall für die Fundamentallösung zu obigem reellen System $F(t) = \exp\left(\int_{t_0}^t A(s)ds\right)$ (mit Anfangsbedingung $F(t_0) = \mathbf{1}$) gilt.

25. Unitäre Fundamentallösungen

- (a) Es sei $A : \mathbb{R} \rightarrow GL(n, \mathbb{K})$ eine differenzierbare Abbildung von \mathbb{R} in den Raum der invertierbaren $n \times n$ -Matrizen. Zeigen Sie: Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\frac{d}{dt}(A(t)^{-1}) = -A(t)^{-1}\dot{A}(t)A(t)^{-1}.$$

[Tipp: Man differenziere den Ausdruck $\mathbf{1} = A(t) \cdot A^{-1}(t)$.]

(3 Punkte)

- (b) Für eine Matrix $C \in \mathbb{C}^{n \times n}$ definieren wir $C^H := \bar{C}^T$ als die zu C adjungierte Matrix. Eine Matrix $C \in \mathbb{C}^{n \times n}$ heißt bekanntlich unitär, wenn sie die Gleichung $CC^H = \mathbf{1}$ erfüllt. Wir betrachten die Fundamentallösung F für das lineare System $\dot{F}(t) = A(t)F(t)$, $F(0) = \mathbf{1}$, wobei $t \mapsto A(t)$ stetig in einem Intervall I (mit $0 \in I$) sei und $A^H(t) = -A(t)$ für alle $t \in I$ erfülle.

Zeigen Sie: $F(t)$ ist für alle $t \in I$ unitär.

(5 Punkte)

[Tipp: Betrachten Sie mit Hilfe von (a) eine Differentialgleichung für $(F^H(t))^{-1}, t \in I$.]

Bitte wenden.

26. Floquettheorie

Wir betrachten in dieser Aufgabe die Differentialgleichung

$$\dot{u}(t) = A(t)u(t), \quad A(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & 1 \\ 0 & \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Die Matrix $A(t)$ ist in t periodisch mit Periode 2π . Das Ziel dieser Aufgabe ist es, eine invertierbare Transformation $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^{2 \times 2}$ der Differentialgleichung zu bestimmen, so dass die resultierende Differentialgleichung $\dot{u}(t) = \tilde{A}u(t)$ autonom ist.

(a) Zeigen Sie, dass die Matrix

$$F(t) = \begin{pmatrix} \exp(\sin(t)) & t \exp(\sin(t)) \\ 0 & \exp(\sin(t)) \end{pmatrix}$$

die Fundamentallösung von $\dot{F}(t) = A(t)F(t)$ mit $F(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist. (3 Punkte)

(b) Bestimmen Sie die Monodromie M von $F(t)$ und ein $B \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ mit $\exp(B) = M$.

(3 Punkte)

(c) Die Matrix \tilde{A} wird definiert durch $B/2\pi$. Bestimmen Sie die zu \tilde{A} gehörige Fundamentallösung $\tilde{F}(t)$ und die Monodromie \tilde{M} . (3 Punkte)

(d) Berechnen Sie nun die Transformation $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^{2 \times 2}$, $t \mapsto G(t)$, die das gegebene nicht-autonome System $\dot{u}(t) = A(t)u(t)$ gemäß Satz 1.63 in das autonome System $\dot{u}(t) = \tilde{A}u(t)$ transformiert. Geben Sie eine Formel an, mit der sich \tilde{A} mit Hilfe von $A(t)$ und $G(t)$ berechnen lässt. (4 Punkte)

Abgabe bis spätestens Freitag, den 7. April 2017, 12:00h, im Briefkasten Nr. 46260