Kapitel 1

Gewöhnliche Differentialgleichungen

1.1 Einführung

Definition 1.1. *Ein dynamisches System ist eine Halbgruppe G zusammen mit einer stetigen Abbildung*

$$\Phi : G \times M \to M$$

auf einem metrischen Raum M die folgendes erfüllt:

(i) $\Phi(0, x) = x$ *für alle* $x \in M$

(ii) $\Phi(s, \Phi(t, x)) = \Phi(s + t, x)$ *für alle* $x \in M, s, t \in G$

Dabei ist G im zeitkontinuierlichen Fall entweder $G = \mathbb{R}$ oder $G = \mathbb{R}_0^+$ und im im zeitdiskreten Fall $G = \mathbb{Z}$ oder $G = \mathbb{N}_0$. M heißt Phasenraum.

Der Parameter aus G ist dabei typischerweise die Zeit. Im zeitdiskreten Fall betrachten wir nur den Verlauf zu einer Folge von Zeitpunkten, die voneinander durch gleichlange Zeitabstände getrennt sind. Die beiden Bedingungen (i) und (ii) bedeuten, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} G \to &\text{ stetige Abbildungen von } M \text{ auf sich selber} \\ t \mapsto \Phi(t, \cdot) : &\quad M \to M, \quad x \mapsto \Phi(t, x). \end{aligned}$$

ein (Halb-)Gruppenhomomorphismus ist. Weil die Halbgruppe $\mathbb{N}_0$ und die Gruppe $\mathbb{Z}$ frei von 1 erzeugt werden, haben wir folgende einfach Charakterisierung von zeitdiskreten dynamischen Systemen.

Übungsaufgabe 1.2. *Ein dynamisches System Φ mit $G = \mathbb{Z}$ oder $G = \mathbb{N}_0$ erfüllt $\Phi(n, x) = A^n(x)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ mit $A : M \to M, \quad x \mapsto A(x) = \Phi(1, x)$. Wenn $G = \mathbb{Z}$, dann ist A ein Homöomorphismus und es gilt $\Phi(n, x) = A^n(x)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. Umgekehrt definiert jede stetige Abbildung $A : M \to M$ ein dynamisches System mit $G = \mathbb{N}_0$ und jeder Homöomorphismus $A : M \to M$ ein dynamisches System mit $G = \mathbb{Z}$.*

Übungsaufgabe 1.3. *Sei Φ ein zeitkontinuierliches dynamisches System auf einem reellen Vektorraum M dessen Abbildung Φ partiell nach t differenzierbar ist. Dann ist für alle $x \in M$ die Bahn $t \mapsto \Phi(t, x)$ eine Lösung der Differentialgleichung*

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t, x) = F(\Phi(t, x)) \quad \mathit{mit} \quad F(x) = \frac{\partial}{\partial t}\Phi(0, x).$$

Wir werden später sehen, dass diese zeitkontinuierlichen dynamischen Systeme eindeutig durch eine gewöhnliche Differentialgleichung bestimmt sind und umgekehrt viele gewöhnliche Differentialgleichung ein zeitkontinuierliches System definieren. Deshalb steht die Theorie der zeitkontinuierlichen dynamischen Systeme in sehr enger Verbindung zur Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen.

Um einen gegebenen zeitlichen Verlauf zu einem dynamischen System zu machen, müssen wir zu allererst den Phasenraum richtig wählen. Von der richtigen Wahl des Phasenraumes hängt es nämlich oft ab, ob ein zeitlicher Verlauf überhaupt als dynamisches System beschrieben werden kann. Ein Beispiel, das die Entwicklung der Theorie der dynamischen Systeme ganz wesentlich angestoßen hat, sind die Newtonschen Gleichungen. In einem Kraftfeld F wird die Beschleunigung eines Punktteilchens beschrieben durch die Gleichung

$$\frac{d}{dt}m\dot{x} = m\ddot{x} = F$$

Hier ist m die Masse der Punkteteilchen und $t \mapsto x(t)$ die Funktion der Koordinaten in Abhängigkeit von der Zeit. Die zeitliche Ableitung bezeichnen wir durch einen Punkt. Wenn F von x und $\dot{x}$ und t abhängt, erhalten wir die gewöhnliche Differentialgleichung

$$m\ddot{x}(t) = F(t, x(t), \dot{x}(t)).$$

Die entsprechenden zeitlichen Verläufe der Koordinaten können nur dann durch ein dynamisches System beschrieben werden, wenn wir den Phasenraum so wählen, dass er neben den Koordinaten x auch die Geschwindigkeit des Punktteilchens enthält. Wenn die Kraft auch noch von der Zeit t abhängt, müssen wir sogar auch noch die Zeit zu den Freiheitsgraden des Phasenraums hinzufügen.

Ein anderes Beispiel für die Wichtigkeit der richtigen Wahl des Phasenraums sind Fibonaccis Kaninchen, oder allgemeinere Rekursionsformeln.

Fibonaccis Kaninchen 1.4. *Leonardo von Pisa hat schon 1202 ein Populationsmodell mit diskreter Zeit $n = 0, 1, 2, ...$ untersucht. Ein neugeborenes Kaninchenpaar wird in einen umzäunten Garten gesetzt. Jedes Kaninchenpaar erzeugt während seines Lebens jeden Monat ein weiteres Paar. Ein neugeborenes Paar wird nach einem Monat fruchtbar und bekommt somit nach zwei Monaten seine ersten Nachkommen. Es soll angenommen werden, dass die Kaninchen nie sterben. Bezeichnen wir mit k_n die Anzahl Kaninchenpaare nach n Monaten, dann ist $k_0 = k_1 = 1$ (das erste Paar) und $k_2 = 2$, da das erste Paar seine ersten Nachkommen nach zwei Monaten bekommt. Auch im dritten Monat bekommt nur das erste Paar neue Nachkommen, es ist also $k_3 = 3$. Im vierten Monat leben noch alle Kaninchen aus dem dritten Monat und die Paare, die nach zwei Monaten schon da waren, bekommen Nachwuchs. Es ist also $k_4 = k_3 + k_2$. Allgemein erhält man die Rekursionsgleichung*

$$k_{n+1} = k_n + k_{n-1} \quad \textit{für alle} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dabei steht der 1. Term k_n für die Anzahl der Kaninchen, die schon da sind, während der 2. Term k_{n-1} die Anzahl der im $(n + 1)$-ten Monat neu geborenen Kaninchenpaare angibt. Um aus dieser Rekursionsformel ein zeitdiskretes dynamisches System zu machen, muss man den Phasenraum als die Menge aller Paare (k_n, k_{n-1}), das heißt man muß zu der Anzahl der Kaninchenpaare im jeweiligen Jahr die Anzahl im vorherigen Jahr hinzufügen. Das entsprechende dynamische System lässt sich dann einfach lösen.

Man kann dieses dynamische System mit einem generierenden Funktional lösen. Sei

$$K(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k_n}{n!} t^n.$$

Dann ist die Ableitung von $K(t)$ das generierende Funktional von

$$\dot{K}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k_n}{n!} n t^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k_{n+1}}{n!} t^n.$$

Also folgt aus der Rekursionsgleichung

$$\ddot{K}(t) = \dot{K}(t) + K(t) \quad \text{mit den Anfangswerten} \quad K(0) = 1 = \dot{K}(0).$$

Somit haben wir diese Rekursionsformal also in eine Differentialgleichung übersetzt und die Startswerte in ein sogenanntes Anfangswertproblem dieser Differentialgleichung. Weil in dieser Differentialgleichung Ableitungen bis zur zweiten Ordnung auftauchen, werden wir bei der Integration zweimal integrieren müssen und entsprechend zwei Integrationskonstanten auftauchen. Deshalb müssen wir zwei Anfangswerte vorgeben.

Ganz ähnlich wie bei den Newtonschen Gleichungen müssen wir zu der Folge k_n mit generierendem Funktional $K(t)$ die Folge k_{n+1} mit generierendem Funktional $\dot{K}(t)$ hinzufügen, um ein dynamisches System zu erhalten. Im nächsten Abschnitt lernen wir, solche Differentialgleichungen zu lösen. Wenn das entsprechende Anfangswertproblem gelöst ist, und die Lösung im Punkt $t = 0$ auch glatt ist, dann ergibt ihre Taylorreihe eine Lösung von Fibonaccis Kaninchen. Es stellt sich heraus, dass diese Lösung sogar auf ganz $t \in \mathbb{C}$ eine konvergente Potenzreihe definiert.

Diese Erweiterungen des Phasenraums im Fall der Newtonschen Gleichungen und im Fall von Fibonaccis Kaninchen sind miteinander verwandt. Ganz allgemein muss der Phasenraum groß genug gewählt werden um ein dynamisches System zu erhalten.

Man kann Fibonaccis Kanichen oder allgemeiner Rekursionsgleichungen auch mit einem anderen generierenden Funktional lösen. Wir stellen diese andere Methode hier vor, weil mit ihr auch andere Rekursionsgleichungen gelöst werden können. Sei diesmal

$$K(z) = \sum_{n=0}^{\infty} k_n z^n.$$

Dann können wir die Rekursionsformel direkt in folgende Gleichung umschreiben

$$\frac{K(z) - k_0 - k_1 z}{z} = \sum_{n=1}^{\infty} k_{n+1} z^n = \sum_{n=1}^{\infty} (k_n + k_{n-1}) z^n = K(z) - k_0 + zK(z).$$

Wenn wir diese Gleichung nach $K(z)$ auflösen erhalten wir

$$K(z) = \frac{k_0 + (k_1 - k_0)z}{1 - z - z^2}.$$

Mit den Anfangswerten $k_0 = 1 = k_1$ ergibt das

$$K(z) = \frac{1}{1 - z - z^2}.$$

Das ist offenbar eine gebrochen rationale Funktion, die auf dem Komplement der Nullstellen des Nenners analytisch ist und als konvergente Potenzreihe geschrieben werden kann. Durch Partialbruchzerlegung können wir diese Potenzreihe auch ausrechen und damit die Fibonaccis Folge lösen. Seien $z_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ und $z_2 = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ die beiden Lösungen von $z^2 + z - 1 = 0$. Dann gibt es zwei eindeutige reelle Zahlen α und β mit

$$\frac{1}{1 - z - z^2} = \frac{\alpha}{z - z_1} + \frac{\beta}{z - z_2}.$$

Durch Multiplikation mit dem Nenner erhalten wir

$$\alpha(z_2 - z_1) = -1 \quad \beta(z_1 - z_2) = -1.$$

Mithilfe der geometrischen Reihe ist die Potenzreihe $K(z)$ gegeben durch

$$K(z) = \frac{1}{(z_2 - z_1)z_1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{z_1}\right)^n + \frac{1}{(z_1 - z_2)z_2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{z_2}\right)^n.$$

Definition 1.5. *$x \in M$ heißt Fixpunkt oder Ruhelage eines dynamischen Systems $\Phi : G \times M \to M$, wenn $\Phi(g, x) = x \quad \forall g \in G$.*

Beispiel 1.6. *Der einzige Fixpunkt der Abbildung $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 2x$ ist $x = 0$.*

Definition 1.7. **(i)** *Für $x \in M$ heißt $\{\Phi(g, x) \mid g \in G\}$ Orbit oder Trajektorie (durch x), die Abbildung $\Phi(\cdot, x) : G \to M, \quad g \mapsto \Phi(g, x)$ heißt Bahnkurve (durch x).*

(ii) *Ein Orbit durch x heißt periodisch mit Periode $g \in G$, wenn $g > 0$ und $\Phi(g, x) = x$. Eine Periode heißt Minimalperiode, wenn $\Phi(\tilde{g}, x) \neq x$ für $0 < \tilde{g} < g$.*

Proposition 1.8. *Wenn G eine Gruppe ist, dann definiert die Zugehörigkeit zu einem Orbit eine Äquivalenzrelation auf dem Phasenraum.*

Beweis: Wir definieren also für $x_1, x_2 \in M$

$$x_1 \sim x_2, \text{ falls } x_2 \in \Phi(G, x_1).$$

Diese Relation ist eine Äquivalenzrelation, denn

(i) Wegen $\Phi(0, \cdot) = \mathbb{1}_M$ ist immer $x \sim x$.

(ii) Gilt $x_2 = \Phi(t, x_1)$, dann folgt $x_1 = \Phi(-t, x_2)$ aus $\Phi(t_2, \cdot) \circ \Phi(t_1, \cdot) = \Phi(t_1 + t_2, \cdot)$ und $\Phi(0, \cdot) = \mathbb{1}_M$. Die Relation ist damit symmetrisch ($x_1 \sim x_2 \Rightarrow x_2 \sim x_1$).

(iii) Gilt $x_2 = \Phi(t_1, x_1)$ und $x_3 = \Phi(t_2, x_2)$, dann folgt $x_3 = \Phi(t_1 + t_2)(x_1)$. Die Relation ist damit transitiv ($x_1 \sim x_2, x_2 \sim x_3 \Rightarrow x_1 \sim x_3$). **q.e.d.**

Beispiel 1.9. *Sei $M = S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ und $\Phi : \mathbb{Z} \times M \to M$ gegeben durch die Drehung $\Phi(n, z) = e^{2\pi i \alpha n} \cdot z$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann ist jeder Orbit genau dann periodisch, wenn $\alpha \in \mathbb{Q}$, also $\alpha = \frac{q}{p}, q \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{N}$ teilerfremd. Die Minimalperiode ist dann p.*

Man ist nicht nur an einzelnen Bahnen interessiert, sondern auch am Verhalten benachbarter Bahnen. Z.B. ist es beruhigend, dass auch bei einer kleinen Veränderung der Geschwindigkeit der Erde, z.B. durch Meteroiteneinschlag, ihre neue Bahn auf Dauer in der Nähe der alten bleibt. Die Untersuchung der Stabilität von solchen Fixpunkten wird uns im zweiten Kapitel beschäftigen.

1.2 Gewöhnliche Differentialgleichungen

Wenn die Abbildung Φ eines zeitkontinuierlichen dynamischen Systems auf einem Vektorraum $M = V$ partiell nach t differenzierbar ist, dann können wir die Bedingung (ii) bei $s = 0$ nach s differenzieren und erhalten

$$\frac{\partial\Phi(t,x)}{\partial t} = F(\Phi(t,x)) \quad \text{mit} \qquad F : V \to V \qquad x \mapsto F(x) = \frac{\partial\Phi(0,x)}{\partial t}.$$

Also erfüllen alle Trajektorien durch den Anfangspunkt $x_0 \in M$ die gewöhnliche Differentialgleichung $\dot{q}(t) = F(q(t))$ mit dem Anfangswert $q(0) = q_0$. Differentialgleichungen sind Gleichungen, die Funktionen zu ihren Ableitungen in Beziehung setzen. Wenn diese Funktionen von mehreren Variablen abhängen, dann sind die Ableitungen, die in der entsprechenden Differentialgleichung mit der Funktion in Beziehung gebracht werden, partielle Ableitungen. Dann spricht man von partiellen Differentialgleichungen. Typischerweise sind Differentialgleichungen im folgenden Sinne *lokale* Gleichungen, dass sie nur die Werte einer gesuchten Funktion und endlich vieler Ableitungen für *einen* Wert der Variablen miteinender in Beziehung bringen. Mit gewöhnlichen Differentialgleichungen werden also im Allgemeinen Gleichungen von der folgenden Form bezeichnet

$$F(t, q(t), \dot{q}(t), \ldots, q^{(k)}(t)) = 0.$$

Hierbei ist $t \mapsto q(t)$ die gesuchte Funktion, die auch vektorwertig sein kann.

Definition 1.10. *Differentialgleichungen von der Form*

$$F(t, q(t), \dot{q}(t), \ldots, q^{(k)}(t)) = 0$$

heißen gewöhnliche Differentialgleichungen.

Historisch wurden solche Differentialgleichungen von Newton gleichzeitig mit der Entdeckung der Differentialrechnung eingeführt, um die Bewegung von massiven Teilchen im Gravitationsfeld zu beschreiben. Im einfachsten Fall eines Punktteilchens im Schwerefeld nehmen die Newton'schen Gleichungen folgende Form an:

$$m\ddot{q}(t) = F(t, q(t), \dot{q}(t)),$$

wobei $F(t, q(t), \dot{q}(t))$ die auf das Punktteilchen wirkende Kraft darstellt. Im einfachsten Fall $F = -mg$ taucht nur die zweite Ableitung der gesuchten Koordinatenfunktion von q des Teilchens in Abhängigkeit von der Zeit auf, so dass wir deren Lösung aus der Differential- und Integralrechnung schon kennen:

$$q(t) = q_0 + q_1(t - t_0) - \frac{g(t - t_0)^2}{2}.$$

Die Lösung können wir aus der Differentialgleichung durch zweimaliges Integrieren der linken und rechten Seite erhalten. Das Ziel unserer Untersuchung einer Differentialgleichung ist dabei möglichst alle Lösungen zu bestimmen und dann solche zusätzlichen Eigenschaften der Lösungen zu finden, die die Lösung eindeutig festlegen.

Definition 1.11. *Eine Lösung ist eine Funktion q, die so oft differenzierbar ist, dass alle in der Differentialgleichung vorkommenden Ableitungen existieren, und die zusammen mit diesen Ableitungen die Differentialgleichung erfüllt.*

In der Differentialgleichung

$$m\ddot{q} = -mg$$

hängen m (die Masse des Teilchens) und g (das Schwerefeld) nicht von t ab. Deshalb ist die Differentialgleichung äquivalent zu

$$\ddot{q} = -g.$$

Wenn wir die linke und die rechte Seite integrieren erhalten wir nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\dot{q}(t) - \dot{q}(t_0) = -g(t - t_0) \text{ bzw.} \quad \dot{q}(t) = \dot{q}(t_0) - g(t - t_0).$$

Nach nochmaligem Integrieren erhalten wir schließlich

$$q(t) = q(t_0) + \dot{q}(t_0)(t - t_0) - \frac{g(t - t_0)^2}{2}.$$

Die Funktion $q(t) = -\frac{g}{2}(t - t_0)^2 + q_1(t - t_0) + q_0$ ist auf $\mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar und es gilt:

$$\dot{q}(t) = -g(t - t_0) + q_1 \text{ und} \quad \ddot{q}(t) = -g.$$

Also sind alle Lösungen von der Form

$$q(t) = -\frac{g(t - t_0)^2}{2} + q_1(t - t_0) + q_0, \text{ wobei } q(t_0) = q_0 \text{ und } \frac{dq}{dt}(t_0) = q_1.$$

Damit haben wir in diesem einfachen Beispiel unser Ziel erreicht.

Zusammenfassung 1.12. *Die höchste vorkommende Ableitung der Differentialgleichung $m\ddot{q} = -gm$ ist die zweite Ableitung. Durch geeignetes zweimaliges Integrieren konnten wir die Differentialgleichung lösen. Dabei entstanden zwei Integrationskonstanten und die Lösungen waren dann eindeutig durch die Wahl dieser Integrationskonstanten bestimmt. Diese Integrationskonstanten konnten wir schließlich als die*

Werte der Lösung und ihrer ersten Ableitung zu dem Zeitpunkt t_0 interpretieren. Deshalb ist der Lösungsraum dieser Differentialgleichung zweidimensional und wird parametrisiert durch $(q(t_0), \dot{q}(t_0)) \in \mathbb{R}^2$. Zu jeder solchen Wahl eines Anfangszustandes $(q(t_0), \dot{q}(t_0)) = (q_0, q_1)$ gibt es dann genau eine Lösung, die gegeben ist durch

$$q(t) = -\frac{g}{2}(t - t_0)^2 + q_1(t - t_0) + q_0.$$

Typischerweise beschreiben solche Differentialgleichungen die zeitliche Entwicklung von veränderlichen Größen in der Natur. Diese Differentialgleichungen geben dann ein kausales Verhalten der veränderlichen Größen vor. Durch das Lösen der Differentialgleichung können wir aus der Kenntnis der veränderlichen Größen und genügend vieler Ableitungen von ihnen zu einem (Anfangs-)Zeitpunkt t_0 das Verhalten von ihnen sowohl in der Zukunft, als auch in der Vergangenheit ausrechnen und damit ihr Verhalten in der Zukunft vorhersagen und auf ihr Verhalten in der Vergangenheit zurückschließen. Die Anzahl der Ableitungen, die wir zum Zeitpunkt t_0 kennen müssen, ist gegeben durch die Anzahl der Integrationskonstanten, also die Anzahl der Integrale, die wir benötigen, um die Gleichung zu lösen. Da im Allgemeinen auch die Funktionswerte vorgegeben werden, also die Nullte-Ableitung, sollten alle Ableitungen bis zu einer Ordnung niedriger als der höchsten vorkommenden Ableitung vorgeben werden.

Definition 1.13. *Die Ordnung einer Differentialgleichung ist die höchste vorkommende Ordnung aller auftauchenden Ableitungen einer Differentialgleichung.*

Definition 1.14. *(Anfangswertproblem) Die Suche nach einer Lösung q einer gewöhnlichen Differentialgleichung der Ordnung n, die an einem Wert t_0 der Variablen t (nach der abgeleitet wird) zusammen mit den ersten $n-1$ Ableitungen die Werte*

$$q(t_0) = q_0,\ \dot{q}(t_0) = q_1,\ \ldots,\ q^{(n-1)}(t_0) = q_{n-1}$$

annimmt, heißt Anfangswertproblem.

Aufgrund unserer Vorüberlegungen erwarten wir, dass jedes solche Anfangswertproblem eine eindeutige Lösung hat. Wir werden später auch Bedingungen angeben, unter denen wir die Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen solcher Anfangswertprobleme beweisen können. Es stellt sich heraus, dass manche dieser Anfangswertprobleme viele Lösungen besitzen und andere gar keine.

Beispiel 1.15. **(i)** *Das Anfangswertproblem $\dot{q} = 2\sqrt{|q|}$ mit $q(0) = 0$ hat die Lösungen*

$$q(t) = \begin{cases} (t-b)^2 & \text{für } b < t \\ 0 & \text{für } -a \leq t \leq b \\ -(t+a)^2 & \text{für } t < -a \end{cases}$$

Hier sind a und b zwei nichtnegative reelle Zahlen, die beide auch ∞ sein können.

(ii) *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die keine Stammfunktion besitzt (z.B. die charakteristische Funktion der rationalen Zahlen). Dann hat das Anfangswertproblem $\dot{q} = f$ mit $q(0) = 0$ keine Lösung.*

Die charakteristische Funktion der rationalen Zahlen besitzt auf keinem offenen Intervall (a, b) eine Stammfunktion. Wenn nämlich F eine solche Stammfunktion wäre, dann wäre $x \mapsto F(x)$ monoton wachsend und $x \mapsto F(x) - x$ monoton fallend. Wegen dem Mittelwertsatz muss für alle $x_1, x_2 \in (a, b)$ entweder gelten

$$F(x_1) - F(x_2) = x_1 - x_2 \text{ oder } F(x_1) - F(x_2) = 0.$$

Im zweiten Fall folgt aus der Monotonie von F, dass F zwischen x_1 und x_2 konstant ist und im ersten Fall folgt aus der Monotonie von $x \mapsto F(x) - x$, dass diese Funktion zwischen x_1 und x_2 konstant ist. Also ist die Ableitung von F zwischen x_1 und x_2 entweder konstant gleich 0 oder konstant gleich 1. Damit ist F keine Stammfunktion der charakteristischen Funktion der rationalen Zahlen.

1.3 Gewöhnliche Differentialgleichungssysteme

Im einfachsten Fall sind die Funktionen, die mit ihren Ableitungen die Differentialgleichung erfüllen soll, reelle Funktionen. In diesem Fall hat eine gewöhnliche Differentialgleichung der Ordnung n die Form

$$f(t, q(t), \dot{q}(t), \ldots, q^{(n)}(t)) = 0, \quad \text{wobei} \quad f : \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$$

eine reelle Funktion ist. Hierbei werden nur die Werte einer reellen Funktion und aller ihrer Ableitungen bis zur Ordnung n zu einem Zeitpunkt t mit einander in Beziehung gebracht werden. Wenn wir zusätzlich noch annehmen, dass sich die Differentialgleichung nach der höchsten Ableitung auflösen lässt, dann nimmt sie die Form

$$q^{(n)}(t) = f(t, q(t), \dot{q}(t), \ldots, q^{(n-1)}(t)) \text{ an, mit einer Funktion} \quad f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}.$$

Wenn wir $\mathbb{R}^m$-wertige Funktionen q betrachten, dann nimmt sie die Form

$$q^{(n)}(t) = f(t, q(t), \dot{q}(t), \ldots, q^{(n-1)}(t)) \text{ an, mit einer Funktion} \quad f : \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^m)^n \to \mathbb{R}^m.$$

Solche Differentialgleichungen heißen Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen oder gewöhnliche Differentialgleichungssysteme. Um die folgende Untersuchung zu vereinfachen, machen wir von folgender Beobachtung Gebrauch.

Satz 1.16. *Jedes gewöhnliche Differentialgleichungssystem von obiger Form lässt sich durch Vergrößerung von m auf $m \cdot n$ in ein gewöhnliches Differentialgleichungssystem erster Ordnung verwandeln. Wenn außerdem t zu einer zusätzlichen Komponente von q gemacht wird, also m auf $m \cdot n + 1$ erhöht wird, dann hängt f nicht mehr von t ab.*

Beweis: Fassen wir die Funktionen $(q, \dot{q}, \ldots, q^{(n-1)})$ zu einer $\mathbb{R}^{n \cdot m}$-wertigen Funktion zusammen, so ist die gewöhnliche Differentialgleichung

$$q^{(n)}(t) = f(t, q(t), \dot{q}(t), \ldots, q^{(n-1)}(t))$$

offenbar äquivalent zu

$$\frac{d}{dt}(q(t), \dot{q}(t), \ldots, q^{(n-1)}(t)) = (\dot{q}(t), \ldots, q^{n-1}(t), f(t, q(t), \dot{q}(t), \ldots, q^{(n-1)}(t))).$$

Hierbei geht das entsprechende Anfangswertproblem

$$q(t_0) = q_0, \ldots, q^{(n-1)}(t_0) = q_{n-1}$$

über in

$$(q, \dot{q}, \ldots, q^{(n-1)})(t_0) = (q_0, \ldots, q_{n-1}).$$

Wenn wir q auch noch um die Funktion t erweitern, dann ist die ursprüngliche Differentialgleichung offenbar äquivalent zu

$$\frac{d}{dt}(t, q, \dot{q}, \ldots, q^{(n-1)}) = (1, \dot{q}, \ldots, q^{n-1}, f(t, q, \dot{q}, \ldots, q^{(n-1)})).$$

Hierbei geht das entsprechende Anfangswertproblem

$$q(t_0) = q_0, \ \ldots, \ q^{(n-1)}(t_0) = q_{n-1}$$

über in

$$(t, q, \dot{q}, \ldots, q^{(n-1)})(t_0) = (t_0, q_0, \ldots, q_{n-1}).$$

q.e.d.

Die Ableitung von zeitkontinuierlichen Systemen werden durch solche Differentialgleichungssysteme beschrieben. Im nächsten Abschnitt untersuchen wir, unter welchen Bedingungen diese Differentialgleichungen die Abbildung Φ eindeutig bestimmen.

Beispiel 1.17. *Die Differentialgleichung $m\ddot{q} = -gm$ ist äquivalent zu dem Differentialgleichungssystem*

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} q \\ \dot{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{q} \\ -g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q \\ \dot{q} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix}.$$

1.4 Existenz und Eindeutigkeit

Das wichtigste mathematische Mittel um die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen von Differentialgleichungen zu beweisen ist der Banachsche Fixpunktsatz.

Satz 1.18. *(***Banachscher Fixpunktsatz***) Sei X ein vollständiger metrischer Raum und f eine lipschitzstetige Abbildung von X nach X mit Lipschitzkonstante $L < 1$, d.h. für alle $x, y \in X$ gilt $d(f(x), f(y)) \leq Ld(x, y)$. Dann besitzt f genau einen Fixpunkt und für jedes $x_0 \in X$ konvergiert die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_{n+1} = f(x_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gegen den Fixpunkt.*

Beweis: Aus der Lipschitz-Stetigkeit von f folgt für jedes $n \in \mathbb{N}$ und alle $x, y \in X$:

$$d(f^n(x), f^n(y)) \leq L^n d(x, y).$$

Hier bezeichnet f^n die n-fache Verknüpfung von f mit sich selber. Also folgt aus der Dreiecksungleichung für alle $m > n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} d(f^m(x_0), f^n(x_0)) &\leq \sum_{l=n}^{m-1} d(f^{l+1}(x_0)), f^l(x_0)) && \leq \sum_{l=n}^{m-1} L^l d(f(x_0), x_0) \\ &= (1 - L^{m-n}) \frac{L^n}{1-L} d(f(x_0), x_0) && \leq \frac{L^n}{1-L} d(f(x_0), x_0). \end{aligned}$$

Wegen $0 < L < 1$ konvergiert $\frac{L^n}{1-L} d(f(x_0), x_0)$ gegen Null und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge. Wegen der Vollständigkeit konvergiert sie. Wegen der Stetigkeit von f gilt

$$f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Also ist der Grenzwert ein Fixpunkt von f. Wegen der Lipschitzstetigkeit von f ist der Abstand von zwei Fixpunkten kleiner oder gleich als L mal dem Abstand. Also ist $(1 - L)$ mal dem Abstand kleiner oder gleich Null. Dann ist wegen $L < 1$ der Abstand nicht positiv, also gleich Null und beide Fixpunkte stimmen überein. **q.e.d.**

Um die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen von Differentialgleichungssytemen in normierten Vektorräumen zu zeigen, müssen wir Funktionen von Intervallen in normierte Vektorräume integrieren. Dafür wollen wir das Riemannintegral auf solche Funktionen ausdehnen. Für jedes Teilintervall $I \subset [a, b]$ eines kompakten Intervalles $[a, b]$ und jedes Element v eines normierten Vektorraumes V über $\mathbb{K}$ definiert

$$v\chi_I : [a, b] \to V, \qquad t \mapsto \begin{cases} v & \text{falls } t \in I \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

eine Funktion in $B([a,b],V)$. Dabei kann I auch aus einem Punkt bestehen. Die endlichen Linearkombinationen solcher Funktionen heißen Treppenfunktionen. Sie bilden einen Untervektorraum von $B([a,b],V)$. Wir definieren das Integral $\int_a^b v\chi_I(t)dt$ als v mal der Intervalllänge $|I|$, und setzen es linear auf alle Treppenfunktionen fort. Wir zeigen jetzt, dass diese lineare Fortsetzung eindeutig ist. Für jedes Teilintervall $I \subset [a,b]$ ist $[a,b] \setminus I$ die Vereinigung von einem oder von zwei schnittfremden Intervallen, und entsprechend $[a,b]$ die Vereinigung von zwei oder drei schnittfremden Intervallen, von denen eines I ist. Die Schnittmengen I_i von jeweils einem Intervall aus allen solchen Zerlegungen von endlich vielen J_j zerlegen $[a,b] = \bigcup_i I_i$ in endlich viele schnittfremde Teilintervalle, so dass jedes J_j eine Vereinigung von endlich vielen I_i ist. Dann gilt für

$$f = \sum\nolimits_j \chi_{J_j} v_j = \sum\nolimits_i \chi_{I_i} \sum\nolimits_{\{j|I_i \subset J_j\}} v_j \quad \text{mit} \quad v_j \in V,$$

$$\int_a^b f(t)dt = \sum_j |J_j| v_j = \sum_{\{i,j|I_i \subset J_j\}} |I_i| v_j = \sum_i |I_i| \sum_{\{j|I_i \subset J_j\}} v_j = \int_a^b \sum_i \chi_{I_i}(t) \sum_{\{j|I_i \subset J_j\}} v_j dt.$$

Also ist das Integral der Treppenfunktion f unabhängig von der Zerlegung in eine Linearkombination von $\chi_{J_j} v_j$. Es folgt

$$\left\| \int_a^b f(t)dt \right\| = \left\| \sum\nolimits_{\{i,j|I_i \subset J_j\}} |I_i| v_j \right\| \leq \sum\nolimits_i |I_i| \left\| \sum\nolimits_{\{j|I_i \subset J_j\}} v_j \right\| = \int_a^b \|f(t)\| dt$$
$$\leq \sum\nolimits_i |I_i| \max_i \left\| \sum\nolimits_{\{j|I_i \subset J_j\}} v_j \right\| = (b-a) \|f\|_\infty.$$

Also definiert das Integral eine lipschitzstetige lineare Abbildung von dem normierten Unterrvektorraum aller Treppenfunktionen in $B([a,b],V)$ nach V mit Lipschitzkonstante $(b-a)$. Die Elemente des Abschlusses dieses Unterraumes heißen einfache Funktionen (siehe Dieudonne: Grundzüge der modernen Analysis 1 Abschnitt 7.6).

Satz 1.19. *In einem Banachraum V ist $f \in B([a,b],V)$ genau dann einfach, wenn es für jedes $x \in [a,b]$ Elemente $v, w \in V$ gibt, und für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass $\|f(y)-v\| < \epsilon$ für alle $y \in (x-\delta, x) \cap [a,b]$ und $\|f(y)-w\| < \epsilon$ für alle $y \in (x, x+\delta) \cap [a,b]$ gilt. Jede einfache Funktion hat höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen.*

Beweis: Wenn f die obige Bedingung erfüllt, dann ist für jedes $\epsilon > 0$ jedes $x \in [a,b]$ in einem in $[a,b]$ offenen Teilintervall $I_x \subset [a,b]$ enthalten, so dass die Abstände zwischen Funktionswerten von f an zwei Punkten von $I_x \cap (-\infty, x)$ oder von $I_x \cap (x, \infty)$ jeweils kleiner als ϵ sind. Die offene Überdeckung $\bigcup_{x \in [a,b]} I_x$ der kompakten Menge $[a,b]$ besitzt eine endliche Teilüberdeckung. Wir ordnen die Randpunkte und Indexpunkte der entsprechenden Intervalle I_x zusammen mit a und b der Größe nach an. Dann gibt es eine Treppenfunktion in $B(f,\epsilon) \subset B([a,b],V)$, die zwischen zwei aufeinanderfolgenden Punkten jeweils konstant ist. Das gilt für alle $\epsilon > 0$, und f ist eine einfache Funktionen.

Wenn umgekehrt f einfach ist, dann gibt es für jedes $\epsilon > 0$ eine Treppenfunktion $g \in B(f,\epsilon/2)$. Für jedes $x \in [a,b]$ wählen wir $\delta > 0$ so, dass g auf $(x-\delta,x) \cap [a,b]$ und $(x,x+\delta) \cap [a,b]$ konstant ist. Der Abstand zwischen Funktionswerten von f an zwei Punkten in $(x-\delta,x)\cap[a,b]$ oder in $(x,x+\delta)\cap[a,b]$ ist also jeweils kleiner als ϵ. Das gilt für jedes $\epsilon > 0$ mit einem geeignet gewählten $\delta > 0$. Für streng monotone wachsende bzw. fallende gegen x konvergierende Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolgen mit Grenzwerten v bzw. w. Dann erfüllt f die Bedingung des Satzes. Wenn x nicht zu den abzählbar vielen Unstetigkeitsstellen einer in $B([a,b],V)$ gegen f konvergierenden Folge von Treppenfunktionen gehört, dann gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so dass die Abstände zwischen den Funktionswerte von f an zwei Punkten in $(x-\delta,x+\delta)\cap[a,b]$ kleiner als ϵ sind. Deshalb ist f an höchstens abzähbar vielen Punkten unstetig.**q.e.d.**

Die Summe der charakteristischen Funktionen der Intervalle $(\frac{1}{2n+1},\frac{1}{2n})$ ist auf $[0,1]$ riemannintegrable mit abzählbar vielen Unstetigkeitsstellen, aber nicht einfach.

Für einen Banachraum V ist der Abschluss des Unterraumes der Treppenfunktionen in $B([a,b],V)$ auch ein Banachraum. Das Integral setzt sich zu einer stetigen linearen Abbildung von den einfachen Funktionen nach V fort. Aus der Lipschitzstetigkeit von $f \mapsto \int_a^b f(t)dt$, $f \mapsto \|f\|$ und $\|f\| \mapsto \int_a^b \|f(t)\|dt$ folgt für einfache Funktionen f

$$\left\| \int_a^b f(t)dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\|dt \leq (b-a)\|f\|_\infty.$$

Satz 1.20. *Für eine einfache Funktion $f \in B([a,b],V)$ ist $F:[a,b]\to V$ mit $F(t) = \int_a^t f(s)ds$ lipschitzstetig und dort, wo f stetig ist, differenzierbar mit $F'(t) = f(t)$.*

Beweis: Für $t,t_0 \in [a,b]$ gilt $\|F(t)-F(t_0)\| \leq |\int_{t_0}^t \|f(s)\|ds| \leq |t-t_0|\cdot\|f\|_\infty$. Also ist F lipschitzstetig. Aus $\|f(s)-f(t_0)\| < \epsilon$ für $s \in [t_0,t]\cap[a,b]$ bzw. $[t,t_0]\cap[a,b]$ folgt

$$\left\| \frac{F(t)-F(t_0)}{t-t_0} - f(t_0) \right\| \leq \frac{1}{t-t_0}\int_{t_0}^t \|f(s)-f(t_0)\|ds < \epsilon.$$

Insbesondere ist F überall dort, wo f stetig ist, differenzierbar mit $F'(t) = f(t)$.**q.e.d.**

Aus dem Mittelwertsatz 8.5.1. (Dieudonne: Grundzüge der modernen Analysis 1 Abschnitt 8.5) folgt, dass eine stetige Funktion $F:[a,b]\to V$, die außerhalb einer abzählbaren Teilmenge differenzierbar ist, und deren Ableitung dort mit einer einfachen Funktion f übereinstimmt, sich nur um eine Konstante von $\int_a^x f(t)dt$ unterscheidet.

Wir zeigen jetzt die Existenz und Eindeutigkeit von gewöhnlichen Differentialgleichungen. Wir müssen an die Nichtlinearität allerdings Bedingungen knüpfen.

Definition 1.21. *Eine Funktion f von einem metrischen Raum X in den metrischen Raum Y heißt lokal lipschitzstetig, wenn es für jedes $x_0 \in X$ eine Umgebung $U \subset X$ von x_0 gibt und eine Lipschitzkonstante $L > 0$, so dass für alle $x, x' \in U$ gilt*

$$d(f(x), f(x')) \leq Ld(x, x').$$

Satz 1.22. *(von Picard Lindelöf) Sei I ein offenes Intervall, $U \subset V$ eine offene Teilmenge eines Banachraums V und $f : I \times U \to V$ eine stetige Abbildung, die bezüglich der zweiten Variablen lokal lipschitzstetig ist, d.h. für jedes $(t_0, q_0) \in I \times U$ gibt es ein $\delta > 0$ und ein $L > 0$, so dass für alle $(t, q), (t, \tilde{q}) \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \times B(q_0, \delta)$*

$$\|f(t, q) - f(t, \tilde{q})\| \leq L\|q - \tilde{q}\|$$

gilt. Dann gibt es für jedes $(t_0, q_0) \in I \times U$ ein $\epsilon > 0$, so dass das Anfangswertproblem $\dot{q}(t) = f(t, q(t))$ mit $q(t_0) = q_0$ auf $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$ genau eine Lösung besitzt.

Beweis: Wegen der lokalen Lipschitzstetigkeit gibt es geeignete $\delta > 0$ und $L > 0$ mit $\|f(t, q) - f(t, \tilde{q})\| \leq L\|q - \tilde{q}\|$ für $(t, q), (t, \tilde{q}) \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times \overline{B(q_0, \delta)}$. Für $\epsilon \leq \delta$ sei

$$\begin{aligned} F: \quad & C([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], \overline{B(q_0, \delta)}) \to C([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], V), \\ & \qquad q \mapsto F(q) \quad \text{mit} \quad F(q)(t) = q_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, q(s)) ds. \end{aligned}$$

Für $\epsilon\,(\|f(\cdot, q_0)\|_\infty + L\delta) \leq \delta$ folgt

$$\|F(q) - q_0\|_\infty \leq \left\| \int_{t_0}^{t} (f(s, q_0) + f(s, q(s)) - f(s, q_0)) ds \right\| \leq \epsilon\,(\|f(\cdot, q_0)\|_\infty + L\delta) \leq \delta.$$

Also bildet F $C([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], \overline{B(q_0, \delta)})$ auf sich selber ab. Für q und $\tilde{q}$ gilt dann

$$\|F(q)(t) - F(\tilde{q})(t)\| \leq \int_{t_0}^{t} \|f(s, q(s) - f(s, \tilde{q}(s))\|\, ds \leq \epsilon L\|q - \tilde{q}\|_\infty.$$

Sei also ϵ kleiner als $\epsilon < \min\left\{\delta, \frac{\delta}{\|f(\cdot, q_0)\|_\infty + L\delta}, \frac{1}{L}\right\} = \min\left\{\delta, \frac{\delta}{\|f(\cdot, q_0)\|_\infty + L\delta}\right\}$.

Die Abbildung F von dem vollständigen metrischen Raum $C([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], \overline{B(q_0, \delta)})$ auf sich selber ist lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante $\epsilon \cdot L < 1$. Jeder Fixpunkt ist auf $t \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$ wegen Satz 1.20 differenzierbar und löst das obige Anfangswertproblem mit $q(t_0) = q_0$. Wenn q umgekehrt auf $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$ das Anfangswertproblem löst, dann haben $F(q)$ und q die gleichen Ableitungen und die gleichen Funktionswerte bei $t = t_0$.

Also stimmen diese Funktionen überein und jede Lösung des Anfangswertproblems ist ein Fixpunkt von F. Die Existenz und Eindeutigkeit dieses Anfangswertproblems auf $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$ folgt also aus dem Banachschen Fixpunktsatz. **q.e.d.**

Betrachten wir die Lösung des Anfangswertproblems in Abhängigkeit von t_0, q_0, und f, so können wir im Beweis für alle Anfangswerte $\tilde{t}_0$, $\tilde{q}_0$ und in q lipschitzstetige $\tilde{f}$ mit Lipschitzkonstanten $\tilde{L}$ nahe bei L aus einer Umgebung von (t_0, q_0, f) in dem Raum $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times \overline{B(q_0, \delta)} \times C([t_0 - \delta, t_0 + \delta], \overline{B(q_0, \delta)})$ dasselbe ϵ wählen. Zusammen mit F hängt dann auch die entsprechende Lösung stetig von diesen Daten ab.

Wegen Satz 1.16 können wir das Anfangswertproblem in ein solches verwandeln, in dem f nicht von t abhängt. Weil solche Anfangswertprobleme bezüglich t translationsinvariant sind, können wir dann $t_0 = 0$ wählen. Deshalb untersuchen wir im folgenden nur die Abhängigkeit der Lösung des Anfangswertproblems von q_0 und f. Die entsprechende autonome gewöhnliche Differentialgleichung wird durch ein Vektorfeld $F : U \to V$ auf einer offenen Teilmenge $U \subset V$ eines Banachraumes gegeben. Die Lösung des entsprechenden Anfangswertproblems heißt Integralkurve durch x:

$$\dot{q}(t) = f(q(t)) \quad \text{mit} \quad q(0) = x$$

Jede Lösung q von $\dot{q}(t) = f(t, q(t))$ mit einer differenzierbaren Funktion f erfüllt

$$\ddot{q}(t) = \frac{d}{dt} f(t, q(t)) = \frac{\partial f(t, q(t))}{\partial t} + \frac{\partial f(t, q(t))}{\partial q} \dot{q}(t) = \frac{\partial f(t, q(t))}{\partial t} + \frac{\partial f(t, q(t))}{\partial q} f(t, q(t)).$$

Indem wir mehrfach ableiten sehen wir, dass für r mal (stetig) differenzierbare Funktionen f, jede Lösung auch $(r + 1)$ mal (stetig) differenzierbar ist. Dann hängen die Lösung der entsprechenden Anfangswerte auch r mal (stetig) differenzierbar von q_0 ab:

Satz 1.23. *Sei I ein offenes Intervall, $U \subset V$ eine offene Teilmenge eines Banachraums V und $f : I \times U \to V$ eine stetige Abbildung, die partiell nach q r mal stetig differenzierbar ist mit $r \in \mathbb{N}$. Dann gibt es für alle $(t_0, q_0) \in I \times U$ eine offene Umgebung W von q_0 in V, $\epsilon > 0$ und eine r mal stetig differenzierbare Funktion $g : W \to C([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], V)$, so dass für alle $q_1 \in W$ die Funktion $g(q_1)$ auf $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$ die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems $\dot{q}(t) = f(t, q(t))$ mit $q(t_0) = q_1$ ist.*

Beweis: Wir benutzen den Satz der impliziten Funktion. Weil $\frac{\partial f}{\partial q}$ stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$, so dass U den abgeschlossenen Ball $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times \overline{B(q_0, \delta)}$ enthält und $\frac{\partial f}{\partial q}$ auf $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times \overline{B(q_0, \delta)}$ durch L beschränkt ist. Wegen dem Schrankensatz ist dann f auf $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times \overline{B(q_0, \delta)}$ für festes t in q lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante $L > 0$. Sei also $0 < \epsilon < \min\left\{\delta, \frac{1}{L}\right\}$ ähnlich gewählt wie in dem Beweis des Satzes von

Picard-Lindelöf. Dann definiert

$$F : V \times C([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], \overline{B(q_0, \delta)}) \to C([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], V), \qquad (q_1, q) \mapsto F(q_1, q)$$
$$\text{mit} \quad F(q_1, q)(t) = q_1 + \int_{t_0}^{t} f(s, q(s))ds$$

eine stetige Abbildung. Die partielle Ableitung $\frac{\partial F(q_1,q)}{\partial q}$ ist gegeben durch

$$\frac{\partial F(q_1, q)}{\partial q} : \qquad C([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], V) \to C([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], V), \qquad z \mapsto \frac{\partial F(q_1, q)}{\partial q}(z)$$
$$\text{mit} \qquad \frac{\partial F(q_1, q)}{\partial q}(z)(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{\partial f(s, q(s))}{\partial q}(z(s))ds.$$

Weil die Ableitungen $\frac{\partial f(s,q(s))}{\partial q}$ beschränkt sind durch L, ist die Ableitung $\frac{\partial F(q_1,q)}{\partial q}$ beschränkt durch $L\epsilon < 1$. Also konvergiert für $q_1 \in V$ und $q \in C([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], B(q_0, \delta))$ die Neumannsche Reihe

$$\left(\mathbb{1}_{C([t_0-\epsilon,t_0+\epsilon],V)} - \frac{\partial F(q_1, q)}{\partial q}\right)^{-1} = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{\partial F(q_1, q)}{\partial q}\right)^{l}$$

in $\mathcal{L}(C([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], V))$ gegen den inversen Operator von $\mathbb{1}_{C([t_0-\epsilon,t_0+\epsilon],V)} - \frac{\partial F(q_1,q)}{\partial q}$. Offenbar ist für $q_1, q_2 \in V$ die punktweise Differenz $F(q_1, q) - F(q_2, q)$ der entsprechenden Abbildungen gleich der konstante Abbildung $q_1 - q_2$. Deshalb ist für jedes $q \in C([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], B(q_0, \delta))$ die Abbildung $q_1 \mapsto F(q_1, q)$ eine glatte Abbildung von V nach $C([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], V)$. Also ist die Abbildung

$$G : V \times C([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], B(q_0, \delta)) \to C([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], V),$$
$$(q_1, q) \mapsto \big(\mathbb{1}_{C([t_0-\epsilon,t_0+\epsilon],B(q_0,\delta))} - F(q_1, q)\big) = q - F(q_1, q)$$

eine stetig differenzierbare Abbildung und besitzt auf dem gesamten Definitionsbereich eine invertierbare partielle Ableitung nach $q \in C([t_0-\epsilon, t_0+\epsilon], B(q_0, \delta))$. Das Urbild der $0 \in C(I, V)$ besteht genau aus den Fixpunkten der Abbildungen $q \mapsto F(q_1, q)$. Wegen dem Satz der impliziten Funktion gibt es eine stetig differenzierbare Abbildung g von einer Umgebung W von $q_0 \in V$ auf die entsprechenden Fixpunkte der Abbildungen $q \mapsto F(q_1, q)$. Sie ist genauso oft stetig differenzierbar, wie G. Weil das Integral von t_0 nach t eine lineare stetige und damit glatte Abbildung von $C([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], V)$ auf sich selber ist, sind die partiellen Ableitungen von G nach q bis zur selben Ordnung stetig, bis zu der auch die partiellen Ableitungen von f nach q stetig sind. Also ist G und damit auch g r mal stetig differenzierbar. **q.e.d.**

Der Beweis zeigt auch, dass die Lösung des Anfangswertproblems unter den gleichen Voraussetzungen stetig differenzierbar von t_0 und von f abhängt, wenn auf dem Raum der Funktionen $f \in C(I \times U, V)$ die Supremumsnorm von f und von $\frac{\partial f}{\partial q}$ benutzt wird. Wenn in diesem Satz die Funktion f nicht von t abhängt, dann lassen sich die ersten $r+1$ Ableitungen $\dot{q}(t), \ldots, q^{(r+1)}(t)$ der Lösung durch die ersten r Ableitungen der Funktion f nach q bei $q(t)$ ausdrücken. Deshalb sind die entsprechenden Lösungen des Anfangswertproblems sogar $(r+1)$ mal stetig nach t differenzierbar. Für glatte f, die nicht von t abhängen, hängen die Lösungen des Anfangswertproblems glatt von q_0 und t ab. Die Abhängigkeit von t_0 ist wenn f nicht von t abhängt trivial. Höhere Ableitungen nach t_0 können wir mit dem oben beschriebenen Trick für differenzierbare Funktionen f kontrollieren. Jetzt setzten wir die Lösungen auf möglichst große Intervalle fort.

Satz 1.24. *(Globale Existenz und Eindeutigkeit) Sei $O \subset \mathbb{R} \times V$ eine offene Teilmenge und $f : O \to V$ eine stetige Abbildung, die wie bei der lokalen Existenz und Eindeutigkeit lokal lipschitzstetig ist. Dann gibt es für jedes $(t_0, q_0) \in O$ genau ein maximales Intervall $(a, b) \subset \mathbb{R}$, das t_0 enthält, und auf dem das Anfangswertproblem*

$$\dot{q}(t) = f(t, q(t)) \quad \textit{mit} \quad q(t_0) = q_0$$

genau eine Lösung q enthält. Das Intervall ist in dem Sinne maximal, dass an beiden Rändern, also bei a und b, jeweils eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(i) *$a = -\infty$ bzw. $b = \infty$.*

(ii) *$t \mapsto \|f(t, q(t))\|$ ist für kleine $\epsilon > 0$ auf $(a, a+\epsilon)$ bzw. $(b-\epsilon, b)$ unbeschränkt.*

(iii) *Die Lösung q lässt sich stetig auf $[a, b)$ bzw. $(a, b]$ fortsetzen, der Graph der Fortsetzung liegt aber nicht in O, d.h. $\lim\limits_{t \downarrow a}(t, q(t)) \notin O$ bzw. $\lim\limits_{t \uparrow b}(t, q(t)) \notin O$.*

Beweis: Wir betrachten zuerst zwei Lösungen $q_1 : (a_1, b_1) \to V$ und $q_2 : (a_2, b_2) \to V$ von $\dot{q}(t) = f(t, q(t))$ mit $q_1(t_1) = q_2(t_1)$ für ein $t_1 \in (a_1, b_1) \cap (a_2, b_2)$. Die Menge

$$\{a \in (a_1, t_1] \cap (a_2, t_1] \mid q_1(t) = q_2(t) \text{ für alle } t \in [a, t_1]\}$$

ist wegen der Stetigkeit von $q_1 - q_2$ in $(a_1, t_1] \cap (a_2, t_1]$ abgeschlossen und besitzt wegen dem Satz von Picard-Lindelöf kein Minimum. Also ist sie gleich $(a_1, t_1] \cap (a_2, t_1]$. Dann stimmen q_1 und q_2 auf $(a_1, b_1) \cap (a_2, b_2)$ überein, weil genauso auch

$$\{b \in [t_1, b_1) \cap [t_1, b_2) \mid q_1(t) = q_2(t) \text{ für alle } t \in [t_1, b]\} = [t_1, b_1) \cap [t_1, b_2)$$

gilt. Insbesondere definieren alle Lösungen $q : I \ni t_0 \to V$ des Anfangswertproblems

$$\dot{q}(t) = f(t, q) \quad \text{mit} \quad q(t_0) = q_0$$

auf der Vereinigung ihrer Definitionsbereiche auch eine Lösung. Wir zeigen jetzt, dass diese Vereinigung der Definitionsbereiche an beiden Rändern die Bedingung (iii) erfült, wenn (i) und (ii) nicht gelten. Dann ist die Ableitung der Lösung auf einer Menge $(a, a+\epsilon)$ bzw. $(b-\epsilon, b)$ beschränkt und die Lösung ist dort lipschitzstetig. Für jede Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegen a bzw. b konvergiert, konvergiert $((t_n, q(t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}\times V$. Liegt der Grenzwert in O, besitzt wegen des Satzes von Picard-Lindelöf das Anfangswertproblem

$$\dot{q}(t) = f(t, q(t)) \qquad \text{mit} \qquad q(a) = \lim_{t\to a+} q(t) \qquad \text{bzw.} \qquad q(b) = \lim_{t\to b-} q(t)$$

eine Lösung in einer Umgebung von a bzw. b. Dann hat das alte Anfangswertproblem eine Lösung auf einem größeren Intervall als (a, b). Also gilt (iii). **q.e.d.**

Bemerkung 1.25. **(i)** *Für partiell nach q stetig differenzierbare f ist $\frac{\partial f}{\partial q}$ lokal beschränkt und f wegen dem Schrankensatz in q lokal lipschitzstetig.*

(ii) *Wenn (ii) gilt, kann $t \mapsto f(t, q(t))$ nicht stetig auf $[a, a+\epsilon)$ bzw. $(b-\epsilon, b]$ fortgesetzt werden. Dann können q und f nicht stetig auf größere Definitionsbereiche fortgesetzt werden, die a bzw. b und $(a, q(a))$ bzw. $(b, q(b))$ enthalten.*

(iii) *Für $\dim V < \infty$ ist f auf beschränkten und in $\mathbb{R}\times V$ abgeschlossenen Teilmengen von O beschränkt. Wenn also anstatt (iii) die schwächere Bedingung (iii)' nicht gilt, dass für eine in (a, b) gegen a bzw. b konvergente Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge $(t_n, q(t_n))$ in $\mathbb{R}\times V$ konvergiert mit $\lim_{n\to\infty}(t_n, q(t_n)) \notin O$, dann muss entweder (i) oder (ii) für $t \mapsto \|q(t)\|$ gelten. Also können wir für $\dim V < \infty$ (iii) durch (iii') und in (ii) $t \mapsto \|f(t, q(t)\|$ durch $t \mapsto \|q(t)\|$ ersetzen.*

(iv) *Jedes kompakte Teilintervall I einer maximalen Lösung können wir durch endlich viele Intervalle $(t_i - \epsilon, t_i + \epsilon)$ aus dem Satz von Picard-Lindelöf überdecken. Dann sind auch die Lösungen der Anfansgwertporbleme zu den Daten aus Umgebungen von (t_0, q_0) und von f auf I definiert, und hängen stetig von den Daten ab.*

Wenn $\dim V < \infty$ kann man die Existenz, aber nicht die Eindeutigkeit (wir kennen schon ein Gegenbeispiel), auf stetige Funktionen f verallgemeinern. Anstatt dem Banachschen Fixpunktsatz verwenden wir dann den Satz von Arzela Ascoli.

Satz 1.26. *(Arzela-Ascoli) Sei K ein kompakter metrischer Raum und V ein Banachraum mit $\dim V < \infty$. Eine Teilfolge einer Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $C(K, V)$ konvergiert, wenn*

(i) *für jedes $x \in K$ die Folge $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist und*

(ii) *für jedes $x \in K$ die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichgradig stetig ist in x, d.h. für jedes $x \in K$ und jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass $f_n(x') \in B(f_n(x), \epsilon) \subset V$ für alle $x' \in B(x, \delta) \subset K$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.*

Beweis: Wir zeigen zunächst, dass die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sogar auf K gleichgradig stetig ist. Für jedes $\epsilon > 0$ und $y \in K$ gibt es wegen (ii) ein $\delta_y > 0$, so dass $\|f_n(x) - f_n(y)\| < \frac{\epsilon}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ aus $d(x, y) < 2\delta_y$ folgt. Wegen der Kompaktheit von K hat die Überdeckung $\{B(y, \delta_y)|y \in K\}$ eine endliche Teilüberdeckung $K = B(y_1, \delta_1) \cup \ldots \cup B(y_N, \delta_N)$. Sei δ das Minimum von $\delta_1, \ldots, \delta_N$. Dann enthält für alle Paare $x, x' \in K$ mit $d(x, x') < \delta$ einer der Bälle $B(y_1, \delta_1), \ldots, B(y_N, \delta_N)$ den einen Punkt x. Damit sind beide in einem der Bälle $B(y_1, 2\delta_1), \ldots, B(y_N, 2\delta_N)$ enthalten. Daraus folgt $\|f_n(x)-f_n(x')\| < \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2} = \epsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also ist die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichgradig stetig auf ganz K.

Sei $(x_l)_{l\in\mathbb{N}}$ eine Folge, die in K dicht liegt. Wegen (i) ist dann für alle $l \in \mathbb{N}$ der Abschluss A_l der Menge der Folge $(f_n(x_l))_{n\in\mathbb{N}}$ eine kompakte Teilmenge von V. Wir definieren induktiv eine Teilfolge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und eine Folge $(a_l)_{l\in\mathbb{N}}$ in V, so dass $\|g_n(x_l) - a_l\| < \frac{1}{n}$ für alle $l \in \mathbb{N}$ und $n \geq l$ gilt. Dafür wählen wir zuerst einen Häufungspunkt a_1 von $(f_n(x_1))_{n\in\mathbb{N}}$ und eine Teilfolge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\|g_n(x_1) - a_1\| \leq \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Induktiv wählen wir danach für jedes $L \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ einen Häufungspunkt a_L von $(g_n(x_L))_{n\in\mathbb{N}}$, und ersetzen die Folgenglieder von $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Indizes größer als $L-1$ durch eine Teilfolge von $(g_n)_{n\geq L}$, so dass $\|g_n(x_L)-a_L\| < \frac{1}{n}$ für alle $n \geq L$ gilt. Dann gilt $\|g_n(x_l) - a_l\| < \frac{1}{n}$ für alle $l = 1, \ldots, L$ und $n \geq l$.

Dann gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass $\|g_n(x)-g_n(x')\| < \frac{\epsilon}{3}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ aus $x, x' \in K$ mit $d(x, x') < \delta$ folgt. Also gibt es ein $M \in \mathbb{N}$, so dass $\|g_m(x_l) - g_n(x_l)\| < \frac{\epsilon}{3}$ für alle $m, n \geq M$ an den Zentren der Bälle einer endlichen Teilüberdeckung von K durch $(B(x_l, \delta))_{l\in\mathbb{N}}$ gilt. Es folgt für alle $x \in K$ und $n, m \geq M$

$$\|g_m(x)-g_n(x)\| \leq \|g_m(x)-g_m(x_l)\|+\|g_m(x_l)-g_n(x_l)\|+\|g_n(x_l)-g_n(x)\| < \frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

Also ist $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge und konvergiert in $C(K, V)$. **q.e.d.**

Satz 1.27. *(Satz von Peano) Sei I ein offenes Intervall, U eine offene Teilmenge eines endlichdimensionalen Banachraums V und $f : I \times U \to V$ stetig. Dann gibt es für jedes $(t_0, q_0) \in I \times U$ ein $\epsilon > 0$ und auf $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \subset I$ eine Lösung des Anfangswertproblems $\dot{q}(t) = f(t, q(t))$ mit $q(t_0) = q_0$.*

Beweis: Weil f stetig ist, gibt es für jedes $(t_0, q_0) \in I \times U$ ein $\epsilon > 0$, so dass

$$K_\epsilon \subset I \times U \qquad \text{und} \qquad \|f(t, q)\| \leq \|f(t_0, q_0)\| + 1 \text{ für alle } (t, q) \in K_\epsilon$$

für $K_\epsilon = [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon] \times \overline{B(q_0, \|f(t_0, q_0)\|\epsilon + \epsilon)}$ gilt. Für jede Partition P

$$[t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon] = [t_{-M}, t_{1-M}] \cup \ldots \cup [t_{-1}, t_0] \cup [t_0, t_1] \cup \ldots \cup [t_{N-1}, t_N]$$

mit $t_0 - \epsilon = t_{-M} < t_{1-M} < \ldots < t_{-1} < t_0 < t_1 < \ldots < t_{N-1} < t_N = t_0 + \epsilon$ des Intervalls $[t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$, die t_0 als den Anfangs- und Endpunkt eines Teilintervalls enthält, definieren wir folgendermaßen eine Näherungslösung q_P der Differentialgleichung. Auf den Intervallen $[t_{-m}, t_{1-m}]$ definieren wir q_P induktiv für $m = 1, \ldots, m = M$ dadurch, dass jeweils der Wert bei t_{1-m} für $m = 1$ gleich q_0 ist und für $m > 1$ gleich dem Wert $q_P(t_{1-m})$ von dem schon konstruierten q_P bei t_{1-m} ist, und die Ableitung jeweils konstant gleich $f(t_{m-1}, q_P(t_{1-m}))$ ist. Entsprechend definieren wir die Lösung auch induktiv auf den Intervallen $[t_{n-1}, t_n]$ für $n = 1, \ldots, n = N$ dadurch, dass jeweils der Wert bei t_{n-1} für $n = 1$ gleich q_0 ist und für $n > 1$ gleich dem Wert $q_P(t_{n-1})$ von dem schon konstruierten q_P bei t_{n-1} ist, und die Ableitung jeweils konstant gleich $f(t_{n-1}, q_P(t_{n-1}))$ ist. Weil f auf K_ϵ durch $\|f(t_0, q_0)\| + 1$ beschränkt ist, liegt das Bild von q_P in $B(q_0, \|f(t_0, q_0)\|\epsilon + \epsilon)$. Sei nun $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Partitionen, deren maximale Intervalllängen eine Nullfolge bilden. Wir zeigen jetzt, dass eine Teilfolge der entsprechenden Näherungslösungen $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen eine Lösung des Anfangswertproblems konvergiert. Offenbar erfüllt die Folge $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Voraussetzungen des Satzes von Arzela-Ascoli. Deshalb konvergiert $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $[t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$ nach Übergang zu einer Teilfolge gegen eine stetige Funktion q, die bei t_0 gleich q_0 ist. Weil die stetige Funktion f auf der kompakten Teilmenge K_ϵ auch gleichmäßig stetig ist, konvergiert auch $f(t, q_n(t))$ auf $t \in [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$ gleichmäßig gegen die stetige riemannintegrable Funktion $t \mapsto (f(t, q(t))$. Indem wir für alle $t \in [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$ die Endpunkte der Intervalle einer Partition P zwischen t_0 und t auswählen definiert jede Partition von $[t_0-\epsilon, t_0+\epsilon]$ auch eine Partition des Intervalls $[t_0, t]$ bzw. $[t, t_0]$. Dann ist $q_P(t)-q_0$ gerade eine entsprechende Riemannsumme von dem Integral $\int_{t_0}^t f(s, q_P(s))ds$. Die Differenz der Riemannsummen zweier stetiger Funktionen auf $[t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$ ist beschränkt durch die Supremumsnorm der Differenz der Funktionen mal 2ϵ. Wegen dem Kriterium von Riemann und der gleichmäßigen Konvergenz von $f(t, q_n(t))$ gegen $f(t, q(t))$ konvergiert also $(q_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen

$$q_0 + \int_{t_0}^t f(s, q(s))ds = \lim_{n\to\infty} q_n(t) = q(t) \quad \text{für alle} \quad t \in [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon].$$

Wegen Satz 1.20 ist dann q differenzierbar mit $\dot{q}(t) = f(t, q(t))$ mit $q(t_0) = q_0$. **q.e.d.**

Eine Lösung einer Differentialgleichung auf einem abgeschlossenen Intervall ist eine stetige Funktion, die im Inneren stetig differenzierbar ist, und deren Ableitung sich stetig auf das abgeschlossene Intervall fortsetzen lässt. Weil eine Funktion auf der Vereinigung von zwei Intervallen genau dann stetig ist, wenn sie auf beiden Intervallen stetig ist und auf der Schnittmenge übereinstimmt, können wir solche Lösungen zusammensetzen: Eine Lösung q_1 des Anfangswertproblems $\dot{q}(t) = f(t, q(t))$ mit $q(t_1) = q_0$ auf $[t_1 - \epsilon, t_1]$ und eine q_2 auf $[t_1, t_1 + \epsilon]$ ergibt folgende Lösung auf $[t_1 - \epsilon, t_1 + \epsilon]$:

$$q(t) = \begin{cases} q_1(t) & \text{für } t \in [t_1 - \epsilon, t_1] \\ q_2(t) & \text{für } t \in [t_1, t_1 + \epsilon]. \end{cases}$$

Satz 1.28. *(Globale Existenz) Sei V ein endlichdimensionaler Banachraum, $O \subset \mathbb{R}\times V$ offen und $f : O \to V$ eine stetige Abbildung. Dann gibt es für jedes $(t_0, q_0) \in O$ eine (nicht notwendiger Weise eindeutige) maximale Lösung des Anfangswertproblems*

$$\dot{q}(t) = f(t, q(t)) \quad \text{mit} \quad q(t_0) = q_0$$

auf einem Intervall (a, b), das t_0 enthält. Die Lösung ist in dem Sinne maximal, dass an beiden Rändern, also bei a und b, jeweils eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(i) *$a = -\infty$ bzw. $b = \infty$*

(ii) *$t \mapsto \|f(t, q(t))\|$ ist für kleine $\epsilon > 0$ auf $(a, a + \epsilon)$ bzw. $(b - \epsilon, b)$ unbeschränkt.*

(iii) *Die Lösung q lässt sich stetig auf $[a, b)$ bzw. $(a, b]$ fortsetzen, der Graph der Fortsetzung liegt aber nicht in O, d.h. $\lim\limits_{t\downarrow a}(t, q(t)) \notin O$ bzw. $\lim\limits_{t\uparrow b}(t, q(t)) \notin O$.*

Beweis: Seien $(t_n, q_n) = (t_n, q(t_n)) \in O \subset \mathbb{R}\times V$ die Anfangswerten von Fortsetzungen nach links bzw. rechts mit monoton wachsenden bzw. fallenden konvergenten t_n und beschränkten $\|f(t_n, q_n)\|$. Dann ist die fortgesetzte Lösung q lipschitzstetig und die Folge der entsprechenden $\epsilon_n = t_{n+1} - t_n$ konvergiert gegen Null. Wenn ϵ_n möglichst groß gewählt sind, gibt es $(\tilde{t}_n, \tilde{q}_n) \in (t_n - 2\epsilon_n, t_n + 2\epsilon_n) \times B(q_n, 2\|f(t_n, q_n)\|\epsilon_n + 2\epsilon_n)$ mit

$$\|f(\tilde{t}_n, \tilde{q}_n)\| = \|f(t_n, q_n)\| + 1 \qquad \text{oder} \qquad (\tilde{t}_n, \tilde{q}_n) \notin O.$$

Wegen der Lipschitzstetigkeit von q konvergieren $(t_n, q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\tilde{t}_n, \tilde{q}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen den gleichen Grenzwert, an dem f nicht stetig sein kann, der also nicht in O liegt. **q.e.d.**

Maximale Lösungen können also nicht als Lösungen fortgesetzt werden. Es kann mehrere maximale Lösungen geben, und verschiedene maximale Lösungen können auf unterschiedlichen Intervallen definiert sein und auf Teilintervallen übereinstimmen.

Auch hier kann die Bedingung (iii) durch (iii') aus der Bemerkung 1.25 (iii) ersetzt werden und in (ii) die Funktion $t \mapsto \|f(t, q(t)\|$ durch $t \mapsto \|q(t)\|$. Also sind Lösungen entweder global oder unbeschränkt, oder kommen dem Rand von O beliebig nahe.

Korollar 1.29. *Sei F ein stetiges und beschränktes Vektorfeld auf einem endlichdimensionalen Banachraum V. Dann sind alle Integralkurven auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.*

Beweis: Weil F auf ganz V definiert ist, kann (iii) nicht erfüllt sein. Weil F beschränkt ist, kann (ii) nicht erfüllt sein. Also muss am Rand (i) gelten. **q.e.d.**

Korollar 1.30. *Sei $F : X \to V$ ein stetiges Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge X eines endlichdimensionalen Banachraumes V. Eine Integralkurve durch ein $x \in X$, die nicht für alle $t \in \mathbb{R}$ definiert ist, ist in keiner kompakten Teilmenge von X enthalten.*

Beweis: Der Abschluss einer Integralkurve, die in einer kompakten Teilmenge von X enthalten ist, ist in der kompakten Teilmenge enthalten und (iii) aus Satz 1.28 gilt nicht. Auf ihr ist das Vektorfeld F beschränkt, und (ii) gilt auch nicht. **q.e.d.**

1.5 Flüsse und Vektorfelder

In der Übungsaufgabe 1.3 haben wir gesehen, dass ein zeitkontinuierliches partiell nach t differenzierbares dynamisches System ein Vektorfeld F definiert. In diesem Abschnitt konstruieren wir aus dem Vektorfeld F das dazugehörige dynamische System Φ. Zunächst wollen wir alle maximalen Integralkurven aus dem vorangehenden Satz zu Abbildungen von offenen Teilmengen von $\mathbb{R} \times M$ nach M zusammensetzen.

Definition 1.31. *Sei X ein metrischer Raum. Eine Abbildung $\Phi : W \to X$ auf einer offenen Teilmenge $W \subset \mathbb{R} \times X$ heißt lokaler Fluss, wenn folgende Bedingungen gelten:*

(i) *Für alle $x \in X$ ist $\{t \in \mathbb{R} \mid (t, x) \in W\}$ ein offenes Intervall, das die Null enthält.*

(ii) *Sei $(s, x) \in W$ und $(t, \Phi(s, x)) \in W$, dann ist auch $(t + s, x) \in W$ und es gilt*

$$\Phi(t, \Phi(s, x)) = \Phi(t + s, x).$$

(iii) *Für alle $x \in X$ gilt $\Phi(0, x) = x$.*

Lemma 1.32. *Für $\Phi : W \to X$, stetiger lokaler Fluss auf metrischem Raum X gilt:*

(i) *Für alle $t \in \mathbb{R}$ sei $V_t = \{x \in X \mid (t, x) \in W\}$. Dann ist für alle $t \in \mathbb{R}$ die Menge V_t offen. Für alle $x \in V_t$ ist auch $\Phi(t, x) \in V_{-t}$ und die Abbildung*

$$\Phi(t, \cdot) : \quad V_t \to V_{-t}, \quad x \mapsto \Phi(t, x)$$

ein Homöomorphismus mit der inversen Abbildung $\Phi(-t, \cdot)$.

(ii) *Für jedes $x \in X$ gibt es ein $\epsilon > 0$ und eine offene Umgebung $U \subset X$ von x, so dass W die Menge $(-\epsilon, \epsilon) \times U$ enthält. Für alle $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ sind insbesondere V_t und V_{-t} offene Umgebungen von x und $\Phi(t, \cdot)$ ein Homöomorphismus von der offenen Umgebung V_t von x auf die offene Umgebung V_{-t} von x.*

Beweis: Für alle $(t_0, x_0) \in W$ ist W eine offene Umgebung von $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times X$. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$ und eine offene Umgebung $U \subset X$ von x_0, so dass $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \times U$ in W enthalten ist. Also sind für alle $t \in \mathbb{R}$ die Mengen V_t offen.

Sei $t \in \mathbb{R}$ und $x \in V_t$. Wir führen den Beweis für $t > 0$. Für $t < 0$ geht er analog. Aus der Bedingung (i) folgt $W \supset \{(s, x) \mid s \in [0, t]\} = \{(t + s, x) \mid s \in [-t, 0]\}$. Für jedes $s \in [-t, 0]$ gibt es ein $\epsilon_s > 0$ und eine offene Umgebung $U_s \subset X$ von $\Phi(t + s, x)$ mit $(-\epsilon_s, \epsilon_s) \times U_s \subset W$. Die offene Überdeckung $(U_s)_{s \in [-t,0]}$ der kompakten Menge $\{\Phi(t + s, x) \mid s \in [-t, 0]\}$ besitzt eine endliche Teilüberdeckung. Sei $\epsilon > 0$ das Minimum der entsprechenden $(\epsilon_s)_{s \in [0,1]}$. Aus der Bedingung (ii) folgt für alle $s \in [-t, 0]$

$$(r, \Phi(t+s, x)), (t+s+r, x) \in W \text{ und } \Phi(r, \Phi(t+s, x)) = \Phi(t+s+r, x) \text{ für alle } r \in (-\epsilon, \epsilon).$$

Wenn $(s, \Phi(t, x))$ in W liegt, dann folgt wegen der Bedingung (ii) $(r, \Phi(s, \Phi(t, x))) = (r, \Phi(s+t, x)) \in W$ und damit auch $(s+r, \Phi(t, x)) \in W$ und $(t+s+r, x) \in W$ und $\Phi(s+r, \Phi(t, x)) = \Phi(t+s+r, x)$. Induktiv folgt $(s, \Phi(t, x)) \in W$ und $\Phi(s, \Phi(t, x)) = \Phi(t+s, x)$ zuerst für $s = 0$ und dann für alle $s \in [-t, 0]$. Also liegt $\Phi(t, x)$ in V_{-t} und $\Phi(-t, \cdot)$ ist die Umkehrabbildung von $\Phi(t, \cdot)$. Dann sind $\Phi(t, \cdot)$ und $\Phi(-t, \cdot)$ Homöomorphismen.

Danach folgt (ii) aus dem Beweis von (i). **q.e.d.**

Satz 1.33. *Sei $F : X \to V$ ein lokal lipschitzstetige Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge X eines Banachraumes V. Dann gibt es genau eine offene Teilmenge $W_F \subset \mathbb{R} \times X$ und einen lokalen Fluss $\Phi_F : W_F \to X$, so dass für jedes $x \in X$*

$$\{t \in \mathbb{R} \mid (t, x) \in W_F\} \to X, \qquad t \mapsto \Phi(t, x)$$

die maximale Integeralkurve aus dem Satz 1.24 mit Anfangswert $\Phi(0, x) = x$ ist. Wenn F $r \in \mathbb{N}$ mal stetig differenzierbar ist, dann ist Φ_F ein r mal stetig differenzierbar Fluss mit r mal stetig differenzierbarer partieller Ableitung $\frac{\partial \Phi_F}{\partial t}$.

Umgekehrt ist ein partiell nach t differenzierbarer lokaler Fluss Φ mit lokal lipschitzstetigem $F(x) = \frac{\partial \Phi(0,x)}{\partial t}$ die Einschränkung von Φ_F auf eine offene Menge $W \subset W_F$.

Beweis: Sei $F : X \to V$ ein lokal lipschitzstetiges Vektorfeld auf X. Sei W_F die Vereinigung in $\mathbb{R} \times X$ aller kartesischen Produkte der Definitionsbereiche der eindeutigen maximalen Integralkurven aus Satz 1.24 mit Anfangswert $q(0) = x \in X$ mit den Mengen $\{x\}$. Sei $\Phi_F : W_F \to X$ für jedes $x \in X$ definiert durch die entsprechende Integralkurve. Wenn $(s, x) \in W_F$ und $(t, \Phi_F(s, x)) \in W_F$ liegt, dann stimmen die beiden Integralkurven mit Anfangswert $q(0) = x$ und $q(s) = \Phi_F(s, x)$ wegen der Eindeutigkeit von Integralkurven auf der Schnittmenge der Definitionsbereich überein. Also bilden sie zusammen eine Integralkurve auf einem Intervall das sowohl 0, als auch s und $t + s$ enthält, und $q(0) = x$, $q(s) = \Phi_F(s, x)$ und $q(t+s) = \Phi_F(t, \Phi_F(s, x))$ erfüllt. Also folgt

$$(t + s, x) \in W_F \text{ und } \Phi_F(t + s, x) = \Phi_F(t, \Phi_F(s, x)).$$

Um die Offenheit von W_F und die Differenzierbarkeit von Φ_F zu zeigen, wenn $F : X \to V$ r mal stetig differenzierbar ist, sei $(t, x) \in W_F$ und o.B.d.A. $t > 0$. Wegen Satz 1.23 gibt es für alle $s \in [0, 1]$ ein $\epsilon_s > 0$ und eine offene Umgebung U_s von $\Phi_F(s, x)$, so dass Φ_F auf $(-\epsilon_s, \epsilon_s) \times U_s$ stetig ist. Sei $\epsilon > 0$ das Minimum der ϵ_s einer endlichen Teilüberdeckung der Überdeckung von $\{\Phi_F(s, x) \mid s \in [0, t]\}$ durch $(U_s)_{s\in[0,t]}$. Für die kleinste natürliche Zahl $n > \frac{t}{\epsilon}$ ist dann $\Phi_F(s, \cdot)^n$ für $s \in (0, \epsilon)$ auf einer offenen Umgebung U von x r-mal stetig partiell nach x differenzierbar. Dann enthält W_F die Umgebung $(0, n\epsilon) \times U$ von (t, x) und ist dort r-mal stetig partiell nach x differenzierbar. Außerdem ist auch $\frac{\partial \Phi_F}{\partial t}(t, x) = F(\Phi_F(t, x))$ r mal stetig nach x differenzierbar. Induktiv sind die partiellen Ableitungen von Φ_F nach t bis zur Ordnung $r+1$ stetig partiell nach x differenzierbar. Also ist Φ_F und $\frac{\partial \Phi_F}{\partial t}$ $r$mal stetig differenzierbar.

Sei jetzt $\Phi : W \to X$ ein partiell nach t stetig differenzierbarer Fluss auf X, dessen partielle Ableitung nach t lokal lipschitzstetig ist. Wegen der Bedingung (ii) gilt

$$\frac{\partial \Phi(t+s,x)}{\partial t} = \frac{\partial \Phi(t+s,x)}{\partial s} = \frac{\partial \Phi(s,\Phi(t,x))}{\partial s} \text{ für alle } (t,x) \in W \text{ und } (s,\Phi(t,x)) \in W.$$

Dann ist die partielle Ableitung $\frac{\partial \Phi(s,\Phi(t,x))}{\partial s}$ bei $s = 0$ gleich der partiellen Ableitung $\frac{\partial \Phi(t,x)}{\partial t}$. Also ist $t \mapsto \Phi(t,x)$ die eindeutige Integralkurve durch x des lokal lipschitzstetigen Vektorfeldes $F : X \to V$ mit $F(x) = \frac{\partial \Phi(0,x)}{\partial t}$. Aus der Eindeutigkeit von Integralkurven folgt, dass für jedes $x \in X$ die Bahn $t \mapsto \Phi(t,x)$ eine Einschränkung der maximalen Integralkurve $t \mapsto \Phi_F(t,x)$ des Vektorfeldes F durch x ist. Also ist W eine offene Teilmenge von W_F und Φ die Einschränkung von Φ_F auf W. **q.e.d.**

Aus Lemma 1.32 und Satz 1.33 folgt

Korollar 1.34. *Sei $F : X \to V$ ein lokal lipschitzstetiges Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge X eines Banachraumes V. Dann ist für alle $t \in \mathbb{R}$ die Menge $V_t = \{x \in X | (t,x) \in W_F\}$ eine offene Teilmenge von X und die Abbildung $x \mapsto \Phi_F(t,x)$ ist ein Homöomorphismus von V_t nach V_{-t} mit Umkehrabbildung $x \mapsto \Phi_F(-t,x)$. Wenn F r mal stetig differenzierbar ist, dann sind diese Abbildungen auch r mal stetig differenzierbar. Außerdem gibt es für alle $x \in X$ ein $\epsilon > 0$, so dass für alle $t \in (-\epsilon,\epsilon)$ die Mengen V_t und V_{-t} offene Umgebungen von x sind.* **q.e.d.**

Definition 1.35. **(i)** *Ein lokaler Fluss $\Phi : W \to X$ mit $W = \mathbb{R} \times X$ heißt global.*

(ii) *Ein lokal lipschitzstetiges Vektorfeld $F : X \to V$ auf einer offene Teilmenge eines Banachraumes V heißt vollständig, wenn der entsprechende Fluss Φ_F global ist.*

Offenbar definieren stetige globale Flüsse und vollständige lokal lipschitzstetige Vektorfelder zeitkontinuierliche dynamische Systeme. Allerdings definieren nicht alle stetigen Vektorfelder, deren Integralkurven alle auf ganz $\mathbb{R}$ definiert sind, auch ein zeitkontinuierliches dynamisches System mit $G = \mathbb{R}$

Beispiel 1.36. *Sei F folgendes stetige Vektorfeld auf $\mathbb{R}$:*

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto F(x) = \begin{cases} \frac{2x}{|x|}\sqrt{|x|} & \text{für} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{für} \quad x = 0. \end{cases}$$

Offenbar ist F auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ lokal lipschitzstetig. Die Integralkurven durch $x > 0$ sind für $t \in [-\sqrt{|x|},\infty)$ gegeben durch $\Phi(t,x) = (\sqrt{|x|}+t)^2$ und für $t > -\sqrt{|x|}$ auch *eindeutig. Die Integralkurven durch* $x < 0$ *sind für* $t \in [-\sqrt{|x|}, \infty)$ *gegeben durch* $\Phi(t,x) = -(\sqrt{|x|}+t)^2$ *und für* $t > -\sqrt{|x|}$ *eindeutig. Für* $t > 0$ *bildet* $\Phi(t,\cdot)$ *die Menge* $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ *also auf die Menge* $(-\infty, -t^2) \cup (t^2, \infty)$ *ab. Wegen den Bedingungen (i) und (ii) kann* $\Phi(-t,\cdot)$ *dann alle Punkte in* $[-t^2, t^2]$ *nur auf* 0 *abbilden. Dann müsste* $\Phi(t,0)$ *gleich allen Punkten in* $[-t^2, t^2]$ *sein. Also gibt es kein dynamisches System zu* F.

Satz 1.37. *Auf einem kompakten metrischen Raum* X *sind alle lokalen Flüsse global.*

Beweis: Wegen Lemma 1.32 gibt es für jedes $x \in X$ ein $\epsilon_x > 0$ und eine offene Umgebung U_x von $x \in X$, so dass der Definitionsbereich W die Menge $(-\epsilon_x, \epsilon_x) \times U_x$ enthält. Die Überdeckung $(U_x)_{x \in X}$ von X, hat eine endliche Teilüberdeckung. Sei ϵ das Minimum der entsprechenden ϵ_x. Dann folgt aus der Bedingung (ii) des Flusses, dass für jedes $(s,x) \in W$ die Menge W auch $\{(t+s,x) \in \mathbb{R} \times X | t \in (-\epsilon, \epsilon)\}$ enthält. Aus $\{(0,x) | x \in X\} \subset W$ folgt induktiv für alle $l \in \mathbb{N}$, dass W auch die Menge

$$(-(l+1)\epsilon, (l+1)\epsilon) \times X = \{(t+s,x) \in \mathbb{R} \times X \mid (s,x) \in (-l\epsilon, l\epsilon) \times X, t \in (-\epsilon, \epsilon)\}$$

enthält. Also ist W gleich $\mathbb{R} \times X$. **q.e.d.**

Wir haben in dem Beweis nur benutzt, dass es ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass der Definitionsbereich W des Flusses Φ von F die Menge $(-\epsilon, \epsilon) \times X$ enthält, bzw. die Integralkurven von F mit allen Anfangswerten $x(0) \in X$ auf $(-\epsilon, \epsilon)$ definiert sind.

Korollar 1.38. **(i)** *Ein lokaler Fluss auf einem metrischen Raum* X *ist genau global, wenn* W *für ein* $\epsilon > 0$ *die Menge* $(-\epsilon, \epsilon) \times X$ *enthält.*

(ii) *Der Fluss eines auf einer offenen Menge* X *eines Banachraumes lokal lipschitzstetigen Vektorfeldes* F *ist genau dann global, wenn für ein* $\epsilon > 0$ *die Integralkurven von* F *mit beliebigen Anfangswerten auf* $(-\epsilon, \epsilon)$ *definiert sind.*

(iii) *Der Fluss eines auf einer offenen Teilmenge eines Banachraumes lokal lipschitzstetigen Vektorfeldes, das außerhalb einer kompakten Menge Null ist, ist global.*

(iv) *Auf einem Banachraum definieren beschränkte und lokal lipschitzstetige Vektorfelder globale Flüsse.*

(v) *Auf einem Banachraum definieren lipschitzstetige Vektorfelder globale Flüsse.*

Beweis: (i)-(ii) haben wir schon gezeigt.
(iv): Die Bedingungen (ii)-(iii) im Satz 1.24 gelten nicht.
(iii): Weil es für jedes $x \in X$ ein $\epsilon > 0$ und eine Umgebung U von x gibt, so dass der entsprechende lokale Fluss auf $(-\epsilon, \epsilon) \times U$ definiert ist, und die Integralkurven durch Nullstellen auf ganz $\mathbb{R}$ konstant sind, erfüllt ein Vektorfeld, das (iii) erfüllt, auch (ii).

(v): Sei $F : V \to V$ ein lipschitzstetiges Vektorfeld auf einem Banachraum V mit Lipschitzkonstante L. Im Satz von Picard-Lindelöff haben wir gezeigt, dass die Integralkurve durch $x \in X$ in dem Ball $B(x, \delta)$ mit $\delta > 0$ auf $(-\epsilon, \epsilon)$ mit

$$\epsilon < \min\left\{\delta, \frac{\delta}{\|F(x)\| + L\delta}\right\}$$

definiert ist. Mit $\delta = \|F(x)\| + 1$ wählen wir $\epsilon = \frac{1}{1+L}$. Also folgt (v) aus (ii). **q.e.d.**

Korollar 1.39. (i) *Für einen globalen stetigen Fluss auf dem metrischen Raum X ist*

$$\Phi(\cdot,\cdot) : \quad \mathbb{R} \to C(X, X), \quad t \mapsto \Phi(t, \cdot)$$

ein Homomorphismus von $\mathbb{R}$ in die Gruppe der Homöomorphismen von X.

Umgekehrt definiert jeder Gruppenhomomorphismen von $\mathbb{R}$ in die Gruppe der bijektiven Abbildungen von X einen globalen Fluss.

(ii) *Sei $F : X \to V$ ein vollständiges lokal lipschitzstetiges Vektorfeld auf einer offene Menge X eines Banachraumes V. Dann definiert der entsprechende Fluss $\Phi_F : \mathbb{R} \times X \to X$ einen Gruppenhomomorphismus von $\mathbb{R}$ in die Gruppe der Homöomorphismen von X.*

Beweis: (i) Offenbar ist $W = \mathbb{R} \times X$ dazu äquivalent, dass für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt $V_t = X$. Die Bedingung (ii) besagt genau, dass $t \mapsto \Phi(t, \cdot)$ ein Gruppenhomomorphismus ist. Also folgt die Aussage aus dem Lemma 1.32.

(ii) folgt aus (i) und und Satz 1.33. **q.e.d.**

Übungsaufgabe 1.40. *Sei $F : X \to V$ ein lokal lipschitzstetiges Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge X eines Banachraumes und $f : X \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion.*

(i) *Zeige, dass für $C < f < C^{-1}$ mit $0 < C < 1$ alle maximalen Integralkurven von fF die Verkettung von den entsprechenden Integralkurven von F mit bijektiven Abbildungen von den entsprechenden maximalen Intervallen aufeinander sind.*

(ii) *Zeige dass fF lokal lipschitzstetig ist, wenn f lokal lipschitzstetig ist.*

(iii) *Sei $f > C > 0$ lokal lipschitzstetig und F und fF vollständig. Zeige, dass dann die beiden entsprechenden dynamischen Systeme die gleichen Trajektorien (als Mengen) haben, aber als dynamische Systeme im Allgemeinen verschieden sind.*

(iv) *Zeige, dass im Fall $X = V$ das Vektorfeld $\frac{F}{1+\|F\|}$ vollständig ist, und die Mengen der Integralkurven mit denen von F übereinstimmen.*

Hinweis zu (i): Nimm an, dass sich die Integralkurven von fF schreiben lassen als die Verkettung einer reellen Funktion mit den Integralkurven von F und leite eine Differentialgleichung für diese reelle Funktion her. Diese Differentialgleichung läßt sich dann einfach lösen.

1.6 Elementare Lösungsverfahren

In diesem Abschnitt wollen wir uns auf gewöhnliche Differentialgleichungen beschränken, in denen die gesuchte Funktion eine reelle Funktion ist. Die Differentialgleichungen erster Ordnung haben also die Form

$$\dot{q}(t) = f(t, q(t)).$$

Wenn es uns gelingt, die Funktion f als einen Quotienten zu schreiben

$$f(t, q) = \frac{g(t)}{h(q)}$$

dann können wir die Differentialgleichung umformen zu

$$\dot{q}(t)h(q(t)) = g(t).$$

Wenn H eine Stammfunktion von h ist und G eine Stammfunktion von G, dann gilt

$$\frac{d}{dt}H(q(t)) = \frac{d}{dt}G(t).$$

Also folgt dann für die Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{q}(t) = \frac{g(t)}{h(q(t))} \text{ mit } q(t_0) = q_0$$

$$H(q(t)) - H(q_0) = G(t) - G(t_0).$$

Wenn wir jetzt noch annehmen, dass H eine Umkehrfunktion besitzt, was natürlich auf allen Intervallen gilt, auf denen h positiv bzw. negativ ist, dann erhalten wir also als Lösung des Anfangswertproblems

$$q(t) = H^{-1}(G(t) - G(t_0) + H(q_0)).$$

Satz 1.41. *(Trennung der Variablen) Seien g und h stetige Funktionen auf einem offenen Intervall I und h sei entweder positiv oder negativ. Dann sind sowohl g als auch h auf allen kompakten Teilintervallen von I Riemann-integrabel. Seien G und H Stammfunktionen von g bzw. h. Dann ist H entweder streng monoton wachsend oder streng monoton fallend, besitzt also eine Umkehrabbildung $H^{-1} : I' \to I$ von einem offenen Intervall I' auf I. Dann ist die eindeutige Lösung der Anfangswertprobleme*

$$\dot{q}(t) = \frac{g(t)}{h(q(t))} \textit{ mit } q(t_0) = q_0$$

gegeben durch $$q(t) = H^{-1}(G(t) - G(t_0) + H(q_0)).$$

Sie ist auf dem Intervall definiert, auf dem $G(t) - G(t_0) + H(q_0)$ in I' liegt. **q.e.d.**

Wenn es uns gelingt eine Funktion $F(t,q)$ zu finden, so dass gilt

$$f(t,q) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial t}(t,q)}{\frac{\partial F}{\partial q}(t,q)},$$

dann können wir die Differentialgleichung umformen zu

$$\frac{d}{dt}F(t,q(t)) = \frac{\partial F(t,q(t))}{\partial t} + \frac{dq(t)}{dt}\frac{\partial F(t,q(t))}{\partial q} = 0.$$

Also gilt dann für die Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{q}(t)\frac{\partial F(t,q(t))}{\partial q} + \frac{\partial F(t,q(t))}{\partial t} = 0 \quad \text{mit} \quad q(t_0) = q_0$$

$$F(t,q(t)) = F(t_0,q_0).$$

Diese Gleichung beschreibt implizit die Lösung des Anfangswertproblems.

Satz 1.42. *(Exakte Differentialgleichungen) Sei $(t,q) \mapsto F(t,q)$ differenzierbar. Dann sind alle Lösungen des Anfangswertproblems*

$$\dot{q}(t)\frac{\partial F(t,q(t))}{\partial q} + \frac{\partial F(t,q(t))}{\partial t} = 0 \quad \textit{mit} \quad q(t_0) = q_0$$

implizit gegeben durch $F(t,q(t)) = F(t_0,q_0)$. **q.e.d.**

Für zwei Funktionen $g(t,q)$ und $h(t,q)$ mit $f(t,q) = -\frac{g(t,q)}{h(t,q)}$, gibt es nicht immer eine Funktion $F(t,q)$ mit $\frac{\partial F(t,q)}{\partial t} = g(t,q)$ und $\frac{\partial F(t,q)}{\partial q} = h(t,q)$.

Lemma 1.43. *(Stammfunktion) Seien g und h zwei stetig differenzierbare Funktionen auf einem konvexen offenen Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Dann gibt es auf Ω genau dann eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $F(t,q)$ mit*

$$\frac{\partial F(t,q)}{\partial t} = g(t,q) \ \textit{und}\ \frac{\partial F(t,q)}{\partial q} = h(t,q), \ \textit{wenn gilt}\ \frac{\partial g(t,q)}{\partial q} = \frac{\partial h(t,q)}{\partial t}.$$

Beweis: Sei $(t_0,q_0) \in \Omega$ beliebig. Dann definieren wir die Funktion

$$F(t,q) = (t-t_0)\int_0^1 g(t_s,q_s)ds + (q-q_0)\int_0^1 h(t_s,q_s)ds,$$

mit $t_s = t_0+s(t-t_0)$ und $q_s = q_0+s(q-q_0)$. Weil die Funktionen g und h differenzierbar sind, sind sie stetig und damit auch integrierbar. Die Ableitungen von F sind dann

$$\begin{aligned}\frac{\partial F(t,q)}{\partial t} &= \int_0^1 g(t_s,q_s)ds + (t-t_0)\int_0^1 \frac{\partial g(t_s,q_s)}{\partial t} sds + (q-q_0)\int_0^1 \frac{\partial h(t_s,q_s)}{\partial t} sds \\ &= \int_0^1 g(t_s,q_s)ds + \int_0^1 \frac{dg(t_s,q_s)}{ds} sds = g(t,q) \\ \frac{\partial F(t,q)}{\partial q} &= \int_0^1 h(t_s,q_s)ds + (q-q_0)\int_0^1 \frac{\partial h(t_s,q_s)}{\partial q} sds + (t-t_0)\int_0^1 \frac{\partial g(t_s,q_s)}{\partial q} sds \\ &= \int_0^1 h(t_s,q_s)ds + \int_0^1 \frac{dh(t_s,q_s)}{ds} sds = h(t,q)\end{aligned}$$

Wenn umgekehrt $\frac{\partial F(t,q)}{\partial t} = g(t,q)$ und $\frac{\partial F(t,q)}{\partial q} = h(t,q)$ gilt, dann folgt aus dem Satz von Schwarz

$$\frac{\partial g(t,q)}{\partial q} = \frac{\partial^2 F(t,q)}{\partial q \partial t} = \frac{\partial^2 F(t,q)}{\partial t \partial q} = \frac{\partial h(t,q)}{\partial t}.$$ **q.e.d.**

Wir können diese Aussage auf Vereinigungen von konvexen Gebieten verallgemeinern, solange nur die Vorschrift, gemäß der wir F fortsetzen, eindeutig ist. Das gilt für alle einfach zusammenhängenden Gebiete Ω, d.h. solche Gebiete, die für jede stetige Abbildung $p : S^1 \to \Omega$ eine Homotopie zu einer konstanten Abbildung besitzen, d.h. also, es gibt zu jedem solchen p eine stetige Abbildung $[0,1]\times S^1 \to \Omega$, die auf $\{0\}\times S^1$ gerade gleich p und die auf $\{1\}\times S^1$ konstant ist. Anschaulich bedeutet das, dass jeder geschlossene Weg in Ω zu einem Punkt zusammengezogen werden kann.

Es gibt auch Fälle, in denen die Differentialgleichung

$$\dot{q}(t)h(t,q(t)) + g(t,q(t)) = 0$$

erst mit einer Funktion erweitert werden muss, bevor sie exakt ist.

Beispiel 1.44. *Die Differentialgleichung* $$2t\dot{q} + q(t) = 0$$

ist nicht exakt, weil gilt $$\frac{\partial q}{\partial q} = 1 \neq 2 = \frac{\partial 2t}{\partial t}.$$

die Differentialgleichung $$2tq(t)\dot{q}(t) + q^2(t) = 0$$

ist aber exakt, weil gilt $$\frac{\partial q^2}{\partial q} = 2q = \frac{\partial}{\partial t}2qt.$$

Korollar 1.45. *(Eulersche Multiplikator) Wenn eine Differentialgleichung durch Multiplikation mit einer Funktion auf die Form gebracht werden kann*

$$\dot{q}(t)h(t,q(t)) + g(t,q(t)) = 0 \quad \text{mit} \quad \frac{\partial h(t,q)}{\partial t} = \frac{\partial g(t,q)}{\partial q},$$

dann existiert auf einfach zusammenhängenden Gebieten $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ eine Funktion F, so dass die Differentialgleichung exakt ist

$$\frac{d}{dt}F(t,q(t)) = \dot{q}(t)\frac{\partial F(t,q(t))}{\partial q} + \frac{\partial F(t,q(t))}{\partial t} = 0.$$

Dann gilt für die Lösungen des entsprechenden Anfangswertproblems mit $q(t_0) = q_0$

$$F(t,q(t)) = F(t_0,q_0).$$ **q.e.d.**

Um für eine Differentialgleichung von der Form

$$\dot{q}(t)h(t,q(t)) + g(t,q(t)) = 0$$

einen Eulerschen Multiplikator $M(t,q(t))$ zu finden, müssen wir die Gleichung

$$\frac{\partial M(t,q)}{\partial t}h(t,q) + M(t,q)\frac{\partial h(t,q)}{\partial t} = \frac{\partial M(t,q)}{\partial q}g(t,q) + M(t,q)\frac{\partial g(t,q)}{\partial q}$$

lösen. Das ist eine partielle Differentialgleichung, die im Allgemeinen nicht leichter zu lösen ist als die ursprüngliche Differentialgleichung. In einigen Fällen können wir Lösungen erraten oder einfache Lösungen berechnen, die nur von t bzw. q abhängen.

Zuletzt bemerken wir, dass einige Differentialgleichungen durch eine Substitution in eine der Differentialgleichungen verwandelt werden können, die wir lösen können.

Beispiel 1.46. (i)

$$\dot{q}(t) = f(at + bq(t) + c) \text{ mit } a,b,c \in \mathbb{R}.$$

Für $b = 0$ können wir die Differentialgleichung direkt integrieren. Für $b \neq 0$ führt die Substitution $p(t) = at + bq(t) + c$ auf die Differentialgleichung $\dot{p}(t) = a + bf(p(t))$ oder auch $\frac{\dot{p}(t)}{a+bf(p(t))} = 1$. Diese Differentialgleichung können wir mit der Methode der Trennung der Variablen lösen: Sei F eine Stammfunktion von $x \mapsto \frac{1}{a+bf(x)}$. Dann erfüllen die Lösungen des Anfangswertproblems

$$\dot{q}(t) = f(at + bq(t) + c) \quad \text{mit} \quad q(t_0) = q_0$$

die Gleichung $F(at + bq(t) + c) - F(at_0 + bq_0 + c) = t - t_0$.

(ii) $\dot{q} = f\left(\frac{q}{t}\right)$ *homogene Differentialgleichung. Die Substitution* $p(t) = \frac{q(t)}{t}$ *führt zu*

$$\dot{p}(t) = \frac{f(p(t)) - p(t)}{t}.$$

Diese Differentialgleichung können wir durch Trennung der Variablen lösen:

$$\frac{\dot{p}(t)}{f(p(t)) - p(t)} = \frac{1}{t}.$$

(iii)

$$\dot{q} = f\left(\frac{at + bq(t) + c}{\alpha t + \beta q(t) + \gamma}\right) \quad \text{mit } a, b, c, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Wenn die Determinante $\begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = 0$ *ist, dann ist entweder* $\alpha t + \beta q(t)$ *ein Vielfaches von* $at + bq(t)$ *oder umgekehrt. Deshalb haben wir dann ein Beispiel der Art in (i). Wenn diese Determinante* $\neq 0$ *ist, dann hat das lineare Gleichungssystem*

$$at + bq + c = 0 \qquad\qquad \alpha t + \beta q + \gamma = 0$$

genau eine Lösung (t_1, q_1)*. Für die Funktion* $p(t) = q(t + t_1) - q_1$ *erhalten wir*

$$\begin{aligned}
\dot{p}(t) &= f\left(\frac{a(t + t_1) + bq(t + t_1) + c - (at_1 + bq_1 + c)}{\alpha(t + t_1) + \beta q(t + t_1) + \gamma - (\alpha t_1 + \beta q_1 + \gamma)}\right)\\
&= f\left(\frac{a + b\frac{q(t+t_1)-q_1}{t}}{\alpha + \beta\frac{q(t+t_1)-q_1}{t}}\right) = f\left(\frac{a + b\frac{p(t)}{t}}{\alpha + \beta\frac{p(t)}{t}}\right)
\end{aligned}$$

mit $p(t_0 - t_1) = q(t_0) - q_1 = q_0 - q_1$*. Das ist ein Beispiel von der Form (ii).*

(iv) *Bernoullische Differentialgleichung:*

$$\dot{q}(t) + g(t)q(t) + h(t)q^{\alpha}(t) = 0 \quad \alpha \neq 1.$$

Die Substitution $p(t) = q^{1-\alpha}(t)$ *führt zu der Differentialgleichung*

$$\dot{p}(t) = (1 - \alpha)\dot{q}(t)q^{-\alpha}(t) = (\alpha - 1)g(t)p(t) + (\alpha - 1)h(t).$$

Dies ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung, die wir im Abschnitt 1.7 betrachten werden.

1.7 Lineare Differentialgleichungen

Definition 1.47. *Eine Differentialgleichung von der Form*

$$\dot{u}(t) = A(t)u(t) + b(t)$$

heißt lineare gewöhnliche Differentialgleichung auf einem (offenen) Intervall $I \subset \mathbb{R}$. Hierbei ist u eine gesuchte Funktion von I mit Werten in einem Vektorraum V (z.B. $\mathbb{K}^n$) und A eine Abbildung von I in die linearen Abbildungen von V auf V (oder im Falle eines normierten Vektorraumes $\mathcal{L}(V)$, die linearen stetigen Abbildungen von V nach V). Im Fall von $V = \mathbb{K}^n$ können wir $\mathcal{L}(V)$ mit den $n \times n$ Matrizen $\mathbb{K}^{n\times n}$ identifizieren und V mit den Spaltenvektoren in $\mathbb{K}^n$. Dann ist $A(t)u(t)$ das Matrix-Produkt der $n\times n$-Matrix $A(t)$ mit dem Spaltenvektor $u(t)$, also ein Spaltenvektor in $\mathbb{K}^n$. Schließlich ist b eine Abbildung von I nach V. Wenn $b(t) = 0$ ist, dann heißt die Differentialgleichung homogen, andernfalls inhomogen. Wenn A nicht von t abhängt, also als Abbildung konstant ist, heißt die Differentialgleichung autonom, andernfalls nicht autonom.

Satz 1.48. *Die Menge aller Lösungen einer linearen homogenen Differentialgleichung bildet einen Vektorraum über $\mathbb{K}$. Wenn also u und $\tilde{u}$ Lösungen sind, dann sind auch $u+\tilde{u}$ und λu für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ Lösungen der linearen homogenen Differentialgleichung. Die Menge aller Lösungen einer inhomogenen linearen Differentialgleichung bildet einen affinen Raum. Eine allgemeine Lösung ist die Summe einer speziellen Lösung und einer allgemeinen Lösung der entsprechenden homogenen linearen Differentialgleichung.*

Beweis: Seien u und $\tilde{u}$ zwei Lösungen der Differentialgleichung $\dot{u}(t) = A(t)u(t) + b(t)$ bzw. $\dot{\tilde{u}}(t) = A(t)\tilde{u}(t) + b(t)$, dann erfüllt $u - \tilde{u}$ die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}(u(t) - \tilde{u}(t)) = A(t)(u(t)) - \tilde{u}(t)),$$

also die entsprechende homogene Differentialgleichung. Genauso gilt auch für alle $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\frac{d}{dt}\lambda(u(t) - \tilde{u}(t)) = A(t)\lambda(u(t)) - \tilde{u}(t)).$$

Deshalb ist der Raum aller Lösungen eines homogenen gewöhnlichen Differentialgleichungssystems ein Vektorraum und die allgemeine Lösung eines inhomogenen gewöhnlichen Differentialgleichungssystems ist die Summe einer speziellen Lösung und der allgemeinen Lösung des entsprechenden homogenen Systems. **q.e.d.**

Satz 1.49. *(Existenz und Eindeutigkeit des linearen Anfangswertproblems). Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes (nicht notwendig beschränktes) Intervall, $A : I \to \mathcal{L}(V)$ eine stetige Abbildung von I in die beschränkten stetigen linearen Abbildungen des Banachraums V und $b : I \to V$ stetig. Dann besitzt für jedes $t_0 \in I$ und $u_0 \in V$ das Anfangswertproblem $\dot{u}(t) = A(t) \cdot u(t) + b(t)$ mit $u(t_0) = u_0$ genau eine differenzierbare Lösung $u : I \to V$.*

Bemerkung 1.50. *Jede Lösung der Differentialgleichung muss differenzierbar sein und damit auch stetig. Dann muss sie sogar stetig differenzierbar sein.*

Beweis: Wir passen den Beweis des Satzes von Picard-Lindelöff an die augenblickliche Situation an. Wir zeigen die Aussage zunächst auf einem kompaktem Teilintervall $J \subset I$. Sei $\|A\|_\infty$ das Maxmimum der stetigen Funktionen $t \mapsto \|A(t)\|$ auf J. Die Abbildung

$$F : C(J', V) \to C(J', V), \quad u \mapsto F(u) \quad \text{mit} \quad F(u)(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} (A(s)u(s) + b(s))ds$$

ist für jedes kompakte Teilintervall $J' \ni t_0$ von J lipschitzstetig:

$$\|F(u)(t) - F(\tilde{u})(t)\| \leq \int_{t_0}^{y} \|A(s)(u(s) - \tilde{u}(s))\|ds \leq \sup |t - t_0| \|A\|_\infty \|u - \tilde{u}\|_\infty,$$

mit dem Produkt der Intervallänge $|J'|$ von J' mit $\|A\|_\infty$ als Lipschitzkonstante. Also können wir jedes kompakte Intervall J durch endlich viele $J = J_1 \cup \ldots \cup J_L$ überdecken, auf denen F mit geeigneten Anfangswerten $(t_l, u_l) \in J_l \times V$ jeweils die Vorraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt. Wegen der Eindeutigkeit der Lösungen der entsprechenden Anfangswertprobleme können wir jedes Anfangswertproblem mit $(t_0, u_0) \in J \times V$ eindeutig auf ganz J lösen. Wegen dieser Eindeutigkeit können wir alle diese Lösungen zu eine globalen Lösung auf I zusammensetzen. **q.e.d.**

Aus den beiden vorangehenden Sätzen folgt sofort:

Korollar 1.51. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, V ein Banachraum, und $A : I \to \mathcal{L}(V)$ und $b : I \to V$ stetige Abbildungen. Dann induziert für jedes $t_0 \in I$ die Abbildung $C(I, V) \to V, u \mapsto u(t_0)$ einen linearen Isomorphismus von der Menge aller Lösungen der Differentialgleichung $\dot{u}(t) = A(t)u(t)$ auf V. Für jede Lösung $\tilde{u}$ der inhomogenen Differentialgleichung $\dot{u}(t) = A(t)u(t) + b(t)$ induziert die Abbildung $C(I, V) \to V, \quad u \mapsto u(t_0) - \tilde{u}(t_0)$ einen affinen Isomorphismus von der Menge aller Lösungen der inhomogenen Differentialgleichung nach V.* **q.e.d.**

Insbesondere haben die Lösungsräume der gewöhnlichen linearen Differentialgleichungssysteme erster Ordnung dieselbe Dimension wie der Vektorraum, in dem die Werte der gesuchten Funktion liegen. Für reelle gewöhnliche lineare Differentialgleichungen n–ter Ordnung stimmt die Dimension des Lösungsraumes mit der Ordnung überein, wie wir das erwartet haben. Wir wollen uns jetzt der Frage zuwenden, wie wir diese Lösungen ausrechnen können.

Beispiel 1.52. *Wir stellen uns eine Insel vor, die von Störchen, Fröschen und Fliegen bewohnt wird. Dabei stellen wir uns die Nahrungskette so vor, dass die Störche $S(t)$ sich sowohl von den Fröschen als auch von den Fliegen ernähren, die Frösche $F(t)$ nur von den Fliegen und die Fliegen $f(t)$ von dem Aas der Frösche und Störche. Wir nehmen an, dass das Tierwachstum nur von der vorhandenen Nahrungsmenge gesteuert wird:*

$$\begin{aligned}
\dot{S}(t) &= F(t) + f(t) && -2S(t) \\
\dot{F}(t) &= -S(t) + f(t) && \\
\dot{f}(t) &= S(t) + F(t) && -2f(t)
\end{aligned}$$

Beispiel 1.53. *Seien $A : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$, $b : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ stetig. Dann hat das Anfangswertproblem*

$$\dot{u}(t) = A(t)u(t) + b(t), \quad u(t_0) = u_0$$

eine eindeutige Lösung, die wir jetzt bestimmen wollen. Dazu betrachten wir zunächst das entsprechende homogene Anfangswertproblem mit $b = 0$. Wenn u eine Nullstelle bei einem $t_1 \in \mathbb{R}$ hat, dann stimmt u mit der eindeutigen Lösung $u = 0$ des entsprechenden homogenen Anfangswertproblems mit $u(t_1) = 0$ überein. Andernfalls hat u keine Nullstelle und die Differentialgleichung wird mit der Trennung der Variablen gelöst:

$$\begin{aligned}
\frac{\dot{u}(t)}{u(t)} &= \frac{d}{dt}\ln(u(t)) = A(t) && \textit{mit} && u(t_0) = u_0, \\
\ln(u(t)) &= \int_{t_0}^{t} A(s)ds + \ln(u_0) && \textit{bzw.} && u(t) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} A(s)ds\right) u_0.
\end{aligned}$$

Die Lösung der inhomogenen Gleichung setzen wir mit einer variablen Konstante an:

$$u(t) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} A(s)ds\right) C(t) \quad \textit{mit} \quad \dot{u}(t) = A(t)u(t) + \exp\left(\int_{t_0}^{t} A(s)ds\right) \dot{C}(t).$$

Mit dieser Variation der Konstanten erhalten wir folgende spezielle Lösung:

$$u(t) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} A(s)ds\right) \int_{t_0}^{t} \dot{C}(s)ds = \exp\left(\int_{t_0}^{t} A(s)ds\right) \int_{t_0}^{t} \exp\left(-\int_{t_0}^{s} A(r)dr\right) b(s)ds.$$

Diese Lösung interpretieren wir als das Integrals $\int_{t_0}^{t} u_s(t)ds$ über die Lösungen folgender *homogener Anfangswertrpobleme:*

$$\dot{u}_s(t) = A(t)u_s(t) \quad \textit{mit} \quad u_s(s) = b(s) \quad \textit{für alle} \quad s \in \mathbb{R}$$
$$u_s(t) = \exp\left(\int_s^t A(r)dr\right) b(s) = \exp\left(\int_{t_0}^t A(r)dr\right) \exp\left(-\int_{t_0}^s A(r)dr\right) b(s).$$

Dann folgt $\displaystyle \frac{d}{dt}\int_{t_0}^t u_s(t)ds = u_t(t) + \int_{t_0}^t A(t)u_s(t)ds = b(t) + A(t)\int_{t_0}^t u_s(t)ds.$

Also löst $\int_{t_0}^t u_s(t)ds$ *das Anfangswertproblem* $\dot{u}(t) = A(t)u(t) + b(t)$ *mit* $u(t_0) = 0$.

Wir erhalten also die Lösung des inhomogenen Anfangswertproblems als die Summe

$$u(t) = \exp\left(\int_{t_0}^t A(s)ds\right) u_0 + \int_{t_0}^t \exp\left(\int_s^t A(r)dr\right) b(s)ds.$$

des homogenen Anfangswertproblems und dem Integral über alle Anfangswertprobleme des homogenen Problems, wobei wir als Anfangswerte jeweils den inhomogenen Term einsetzen. Dieses Verfahren wollen wir jetzt verallgemeinern.

Satz 1.54. *Sei* $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ *ein kompaktes Intervall und* V *ein Banachraum. Dann ist folgende Abbildung auf die eindeutige Lösung* u *folgenden Anfangswertproblems stetig:*

$$C([\alpha, \beta], \mathcal{L}(V)) \times C([\alpha, \beta], V) \times [\alpha, \beta] \times V \to C([\alpha, \beta], V) \qquad (A, b, t_0, u_0) \mapsto u$$

$$\dot{u}(t) = A(t)u(t) + b(t) \quad \textit{mit} \quad u(t_0) = u_0$$

Die Einschränkung dieser Abbildung auf ein festes t_0 *hängt analytisch von* A*,* b *und* u_0 *ab. Für jedes* $(A, b, t_0) \in C([\alpha, \beta], \mathcal{L}(V)) \times C([\alpha, \beta], V) \times [\alpha, \beta]$ *ist dann die entsprechende Einschränkung der Abbildung ein affiner Isomorphismus von* $u_0 \in V$ *auf die Menge der Lösungen der Differentialgleichung* $\dot{u}(t) = A(t)u(t) + b(t)$.

Bevor wir diesen Satz beweisen, berechnen wir mit ihm die Lösung eines inhomogenen Anfangswertproblems aus der Lösung des homogenen Anfangswertproblems.

Korollar 1.55. *Sei* $A : I \to \mathcal{L}(V)$ *eine stetige Abbildung auf einem offenen nicht notwendigerweise beschränkten Intervall und* $b : I \to V$ *auch. Dann setzen sich wegen dem Satz 1.54 die eindeutigen Lösungen* $u_s(t)$ *der Anfangswertprobleme*

$$\dot{u}_s(t) = A(t)u_s(t) \qquad \textit{mit} \qquad u_s(s) = b(s) \qquad \textit{für alle} \qquad s \in I$$

zu einer stetigen Abbildung $I \mapsto C(I,V) \quad s \mapsto u_s$ *zusammen. Die eindeutige Lösung des inhomogenen Anfagnswertproplems*

$$\dot{u}(t) = A(t)u(t) + b(t) \qquad \textit{mit} \qquad u(t_0) = u_0$$

ist die Summe der Lösung des entsprechenden homogenen Anfangswertproblems und

$$\int_{t_0}^{t} u_s(t)ds.$$

Beweis: Wegen des vorangehenden Satzes ist die Abbildung $s \mapsto u_s(t)$ auf allen Teilintervallen $[\alpha,\beta] \subset I$ stetig von $[\alpha,\beta]$ nach $C([\alpha,\beta],V)$. Dann gilt für alle $t_0, x, y \in [\alpha,\beta]$

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{x} u_s(y)ds = \int_{t_0}^{x}\int_{s}^{y} A(t)u_s(t)dtds \qquad &= \int_{t_0}^{x}\left(\int_{t_0}^{y} A(t)u_s(t)dt - \int_{t_0}^{s} A(t)u_s(t)dt\right)ds \\
= \int_{t_0}^{y} A(t)\int_{t_0}^{x} u_s(t)dsdt \qquad &\qquad - \int_{t_0}^{x}\int_{t_0}^{s} A(t)u_s(t)dtds.
\end{aligned}$$

Wir berechnen mit dem Hauptsatz Differential- und Integralrechnung die partielle Ableitung $\frac{\partial}{\partial x}$ und mit der zweiten Zeile die partielle Ableitung $\frac{\partial}{\partial y}$:

$$\frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t} u_s(t)ds = u_t(t) + \int_{t_0}^{t} A(t)u_s(t)ds = b(t) + A(t)\int_{t_0}^{t} u_s(t)ds \quad \text{und} \quad \int_{t_0}^{t_0} u_s(t)ds = 0.$$

Diese Funktion löst das inhomogene Anfangswertproblem mit $u_0 = 0$. Wegen Satz 1.48 ist die eindeutige Lösung des allgemeinen Anfangswertproblems die Summe dieser Funktion und der Lösung des entsprechenden homogenen Anfangswertproblems.**q.e.d.**
Beweis von Satz 1.54: Offenbar ist die Abbildung

$$\begin{aligned}
C([\alpha,\beta],\mathcal{L}(V)) \times C([\alpha,\beta],V) \times [\alpha,\beta] \times V \times C([\alpha,\beta],V) \quad &\to \quad C([\alpha,\beta],V) \\
(A,b,t_0,u_0,u) \mapsto f_{A,b,t_0,u_0}(u) \text{ mit } f_{A,b,t_0,u_0}(u)(t) = u_0 + &\int_{t_0}^{t}(A(s)u(s)+b(s))ds
\end{aligned}$$

stetig differenzierbar und hängt für festes t_0 analytisch von A, b, u_0 und u ab. Weil das Integral linear ist, ist sie sogar eine Summe von linearen Abbildungen und einer bilinearen Abbildung. Damit ist f sogar ein Polynom in A, b, u_0, und u. Die

Lipschitzkonstante $\tilde{L}$ der Abbildung $\tilde{f} = f_{\tilde{A},\tilde{b},\tilde{t}_0\tilde{u}_0}$, mit einem Element $(\tilde{A}, \tilde{b}, \tilde{t}_0, \tilde{u}_0) \in C([\alpha, \beta], \mathcal{L}(V)) \times C([\alpha, \beta], V) \times [\alpha, \beta] \times V$ können wir abschätzen durch

$$\begin{aligned}\left\|\tilde{f}(u) - \tilde{f}(\tilde{u})\right\|_\infty &= \left\| \int_{\tilde{t}_0}^{t} A(s)(u(s) - \tilde{u}(s))ds + \int_{\tilde{t}_0}^{t} (\tilde{A}(s) - A(s))(u(s) - \tilde{u}(s))ds \right\|_\infty \\ &\leq |\beta - \alpha| \|u - \tilde{u}\|_\infty \left(\|A\|_\infty + \|\tilde{A} - A\|_\infty \right).\end{aligned}$$

Wir wählen das Intervall $[\alpha, \beta]$ und $\epsilon > 0$ so klein, dass die den Elementen $(\tilde{A}, \tilde{b}, \tilde{t}_0, \tilde{u}_0)$ in dem ϵ–Ball von (A, b, t_0, u_0) entsprechenden $\tilde{f}$ lipschitzstetig sind mit Lipschitzkonstante $\tilde{L} \leq |\beta - \alpha|(\|A\|_\infty + \epsilon) \leq L_0 < 1$. Für $n > m \geq N \in \mathbb{N}$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\left\|\tilde{f}^n(u) - \tilde{f}^m(u)\right\|_\infty \leq \left\|\tilde{f}^m(\tilde{f}^{n-m}(u) - \tilde{f}^0(u))\right\|_\infty &\leq \tilde{L}^m \left\| \sum_{l=1}^{n-m} (\tilde{f}^l(u) - \tilde{f}^{l-1}(u)) \right\|_\infty \\ \leq \tilde{L}^N \left(\sum_{l=0}^{n-m-1} \tilde{L}^l \|\tilde{f}(u) - u\|_\infty \right) &\leq \frac{\tilde{L}^N}{1 - \tilde{L}} \|\tilde{f}(u) - u\|_\infty.\end{aligned}$$

Wir wählen die Startfunktion $u = 0$. Dann ist $\|\tilde{f}(0) - 0\|$ beschränkt durch

$$\|\tilde{f}(0) - 0\|_\infty \leq \|u_0\| + \|\tilde{u}_0 - u_0\| + |\beta - \alpha| \left(\|b\|_\infty + \|\tilde{b} - b\|_\infty \right).$$

Weil auf dem ϵ–Ball um (A, b, t_0, u_0) die Lipschitzkonstante uniform durch $L_0 < 1$ beschränkt ist, konvergiert dann die Folge $(\tilde{f}^n(0))_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen die Lösung des Anfangswertproblems. Der Grenzwert ist als gleichmäßiger Grenzwert von stetigen Abbildungen eine stetige Funktion von (A, b, t_0, u_0), die für festes t_0 analytisch von (A, b, u_0) abhängt (also eine konvergente Potenzreihe besitzt).

Wenn die Lipschitzkonstante größer als 1 ist, überdecken wir das Intervall durch hinreichend kleine Teilintervalle und setzen die entsprechenden Lösungen fort. **q.e.d.**

Damit haben wir die Berechnung der Lösung auf das Lösen des homogenen Anfangswertproblems zurückgeführt.

Satz 1.56. *(Exponentialfunktion) Die Potenzreihe* $\exp(A) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$ *konvergiert für alle* $A \in \mathcal{L}(V)$*, wenn* V *ein Banachraum ist. Außerdem gilt*

$$\frac{d}{dt} \exp((t - t_0)A) = A \exp((t - t_0)A) = \exp((t - t_0)A)A.$$

Beweis: Wegen $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ folgt $\|A^n\| \leq \|A\|^n$. Dann folgt die Behauptung aus den entsprechenden Aussagen für die Exponentialfunktion auf $\mathbb{R}$. **q.e.d.**

Korollar 1.57. *(Lösung des Anfangswertproblems mit autonomer homogener Differentialgleichung) Das inhomogene Anfangswertproblem*

$$\dot{u}(t) = Au(t) + b(t) \text{ mit } u(t_0) = u_0$$

mit $A \in \mathcal{L}(V)$ und stetigem $b : I \to V$ besitzt die eindeutige Lösung

$$u(t) = \exp((t - t_0)A)u_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \exp((t - s)A)b(s)ds.$$

Beweis: Es genügt wegen der Variation der Konstanten zu zeigen, dass das homogene Anfangswertproblem ($b = 0$) durch $u(t) = \exp((t - t_0)A)u_0$ gelöst wird. Das folgt aus den Eigenschaften der Exponentialfunktion. **q.e.d.**

Damit bleibt noch das Problem der Berechnung der Exponentialfunktion. Dazu benutzen wir die Diagonalisierung bzw. Jordannormalform von Matrizen.

Übungsaufgabe 1.58. (i) *Aus der Analysis wissen wir, dass das Anfangswertproblem der Differentialgleichung*

$$u^{(n)}(t) = 0 \text{ mit } u(0) = u_0, \dot{u}(0) = u_1, \ldots, u^{(n-1)}(0) = u_{n-1}$$

die Lösung

$$u(t) = \sum_{l=0}^{n-1} \frac{u_l t^l}{l!}$$

besitzt. Dieses Anfangswertproblem ist äquivalent zu dem Anfangswertproblem

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u \\ \dot{u} \\ \vdots \\ u^{(n-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \dot{u} \\ \vdots \\ u^{(n-1)} \end{pmatrix} \text{ mit } \begin{pmatrix} u(t_0) \\ \dot{u}(t_0) \\ \vdots \\ u^{(n-1)}(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Deshalb gilt

$$\exp\left(t \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \mathbb{1} + \sum_{l=1}^{n-1} \frac{t^l}{l!} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}^l$$

Zeige direkt diese Identität.

(ii) *Zeige, dass für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) gilt*

$$\exp\left(t\begin{pmatrix}\lambda & 1 & \dots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \dots & \lambda & 1\\ 0 & \dots & 0 & \lambda\end{pmatrix}\right) = \exp(t\lambda)\cdot\exp\left(t\cdot\begin{pmatrix}0 & 1 & \dots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \dots & 0 & 1\\ 0 & \dots & 0 & 0\end{pmatrix}\right).$$

(iii) *Die Matrix A lasse sich durch die invertierbare Matrix B diagonalisieren bzw. in Jordannormnalform bringen:*

$$A = B\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}B^{-1} \text{ bzw. } B\begin{pmatrix}J_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & J_n\end{pmatrix}B^{-1}$$

Zeige, dass dann gilt

$$\exp(tA) = B\begin{pmatrix}\exp(t\lambda_1) & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \exp(t\lambda_n)\end{pmatrix}B^{-1} \text{ bzw. } B\begin{pmatrix}\exp(tJ_1) & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \exp(tJ_n)\end{pmatrix}B^{-1}.$$

Beispiel 1.59. *Die Matrix*

$$\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}$$

lässt sich diagonalisieren auf

$$\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3}\\ 1 & -1 & 0\\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

Also ist die Lösung des Beispiels der Störche, Frösche und Fliegen gegeben durch

$$\begin{pmatrix}S(t)\\ F(t)\\ f(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & e^{-t} & 0\\ 0 & 0 & e^{-3t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3}\\ 1 & -1 & 0\\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}S(0)\\ F(0)\\ f(0)\end{pmatrix}.$$

Lemma 1.60 (Gronwall)**.** *Seien $\alpha < \beta \in \mathbb{R}$, $a \in L^1([\alpha,\beta])$ eine nichtnegative Lebesgue integrable Funktion und $b, u \in L^\infty([\alpha,\beta])$ beschränkte messbare reelle Funktionen. Gilt die erste der folgenden Ungleichungen für fast alle $t \in [\alpha,\beta]$, dann auch die zweite:*

$$u(t) \le b(t) + \int_\alpha^t a(s)u(s)ds \quad\Longrightarrow\quad u(t) \le b(t) + \int_\alpha^t \exp\left(\int_s^t a(s')ds'\right)a(s)b(s)ds.$$

Beweis: Wir setzen die erste Ungleichung n mal in sich selber ein und erhalten

$$u(t) \leq b(t) + \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\alpha}^{t} a(t_1) \int_{\alpha}^{t_1} a(t_2) \cdots \int_{\alpha}^{t_{k-1}} a(t_k) b(t_k) dt_k \cdots dt_1 +$$
$$+ \int_{\alpha}^{t} a(t_1) \int_{\alpha}^{t_1} a(t_2) \cdots \int_{\alpha}^{t_{n-1}} a(t_n) u(t_n) dt_n \cdots dt_1.$$

Weil a nicht negativ ist, folgen diese Ungleichungen induktiv aus der ersten Ungleichung. Durch vertauschen der Indizes und der Integrationen erghalten wir

$$\int_{\alpha}^{t} a(t_n) \int_{\alpha}^{t_n} a(t_{n-1}) \cdots \int_{\alpha}^{t_2} a(t_1) u(t_1) dt_1 \cdots dt_n = \int_{\alpha<t_1<\cdots<t_n<t} a(t_n) \cdots a(t_1) u(t_1) dt_n \cdots dt_1$$
$$= \int_{\alpha}^{t} \int_{t_1<t_2<\cdots<t_n<t} a(t_n) \cdots a(t_2) a(t_1) u(t_1) dt_n \cdots dt_1.$$

Alle Permutationen von $t_2, \ldots, t_n$ bilden die offenen Teilmengen

$$\{(t_2, \ldots, t_n) \in [t_1, t]^{n-1} \mid t_1 < t_2 < \ldots < t_n < t\}$$

auf disjunkte Mengen ab, die zusammen das gleiche Volumen wie $[t_1, t]^{n-1}$ haben. Weil $a(t_2) \cdots a(t_n)$ sich durch die Permutationen nicht ändert erhalten wir

$$u(t) \leq b(t) + \int_{\alpha}^{t} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\left(\int_s^t a(s')ds'\right)^{k-1}}{(k-1)!} a(s) b(s) ds + \int_{\alpha}^{t} \frac{\left(\int_s^t a(s')ds'\right)^{n-1}}{(n-1)!} a(s) u(s) ds.$$

Wegen $\int_s^t a(s)ds \leq \|a\|_{L^1([\alpha,\beta])}$ konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\int_s^t a(s')ds'\right)^k}{k!}$ gleichmäßig für $s \in [\alpha, t]$. Im Grenzwert $n \to \infty$ erhalten wir die zweite Ungleichung. **q.e.d.**

Lemma 1.61. *(Fundamentallösung) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, V ein Banachraum und $A : I \to \mathcal{L}(V)$ stetig. Für $t_0 \in I$ konvergiert die Reihe $F : I \to \mathcal{L}(V)$*

$$F(t) = \mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{t_0}^{t} A(t_n) \int_{t_0}^{t_n} A(t_{n-1}) \ldots \int_{t_0}^{t_2} A(t_1) dt_1 \ldots dt_n$$

gegen die Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{F}(t) = A(t)F(t) \quad \mathit{mit} \quad F(t_0) = \mathbb{1}.$$

Beweis: Im Beweis des Gronwallschen Lemmas für $b = 1$ und $a(t) = \|A(t)\|$ wird die Konvergenz der Reihe für $\|F(t)\|$ gezeigt. Deshalb ist die Norm $\|F(t)\|$ durch die Reihe von $\exp\left(\int_{t_0}^t \|A(s)\|ds\right)$ beschränkt. Wegen der Konvergenz der Reihe im Beweis des Gronwallschen Lemmas konvergiert die Reihe für $F(t)$ auf kompakten Teilmengen von I gleichmäßig. Aus dem Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung folgt

$$\dot{F}(t) = A(t) + \sum_{n=1}^{\infty} A(t) \int_{t_0}^{t} A(t_{n-1}) \int_{t_0}^{t_{n-1}} A(t_{n-2}) \ldots \int_{t_0}^{t_2} A(t_1)dt_1 \ldots dt_{n-1} = A(t)F(t).\mathbf{q.e.d.}$$

Diese Lösung $F(t)$ heißt Fundamentallösung des Anfangswertproblems

$$\dot{u}(t) = A(t)u(t) \text{ mit } \qquad u(t_0) = u_0.$$

Die lineare Abbildung $F(t)$ bildet jedes u_0 auf den Wert der entsprechenden Lösung an der Stelle t ab. Wegen der Eindeutigkeit der Lösungen der Anfangswertprobleme

$$\dot{u}(t) = A(t)u(t) + b(t) \text{ mit } u(t_0) = u_0 \text{ und } \quad \dot{u}(t) = A(t)u(t) + b(t) \text{ mit } u(t_1) = u_1$$

ist die Fundamentallösung des ersten Anfangswertproblems an der Stelle t_1 als lineare Abbildung invers zu der Fundamentallösung des zweiten Anfangswertproblems an der Stelle t_0. Deshalb ist die Fundamentallösung eine einmal stetig differenzierbare Abbildung von I in die invertierbaren Elemente von $\mathcal{L}(V)$.

Die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{u}(t) = A(t)u(t) \quad \text{mit} \qquad u(s) = b(s)$$

ist dann gegeben durch

$$u_s(t) = F(t)F^{-1}(s)b(s).$$

Die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{u}(t) = A(t)u(t) + b(t) \quad \text{mit} \qquad u(t_0) = u_0$$

ist wegen der Variation der Konstanten dgegeben durch

$$u(t) = F(t)\left(u_0 + \int_{t_0}^{t} F^{-1}(s)b(s)ds\right).$$

Deshalb genügt es zum Lösen einer gewöhnlichen, linearen Differentialgleichung, die Fundamentallösung zu bestimmen. Wenn alle $A(t)$ miteinander kommutieren:

$$A(t)A(t') = A(t')A(t) \text{ für alle } t, t' \in I,$$

wie das im Fall $V = \mathbb{R}$ gilt, dann ist $F(t) = \exp\left(\int\limits_{t_0}^{t} A(s)ds\right)$, im Allgemeinen aber nicht. Im endlichdimensionalen Fall, wenn wir A durch $n \times n$ Matrizen darstellen können, ist allerdings folgende Beziehung sehr nützlich.

Satz 1.62. *(Spur und Determinante) Sei $A : I \to \mathbb{K}^{n\times n}$ eine stetige Abbildung des offenen Intervalls I in die $\mathbb{K}$–wertigen $n \times n$ Matrizen. Dann gilt für die Fundamentallösung*

$$F : I \to \mathbb{K}^{n\times n} \quad \textit{mit} \quad \dot{F}(t) = A(t)F(t) \ \textit{und} \quad F(t_0) = \mathbb{1},$$

$$\frac{d}{dt}\det(F(t)) = \operatorname{Spur}(A(t))\det(F(t)) \ \textit{mit} \quad \det(F(t_0)) = 1.$$

Also hat $\det(F(t))$ *auf I keine Nullstellen und $F(t)$ ist für alle $t \in I$ invertierbar.*

Beweis: Weil die Determinante $\det : \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{K}$ ein Polynom in den Einträgen der entsprechenden Matrix ist, ist sie eine analytische Funktion. Wir berechnen zunächst die Ableitung dieser Funktion bei der Matrix B in Richtung der Matrix AB

$$\frac{d}{dt}\det(B + tAB)\mid_{t=0} = \operatorname{Spur}(A)\det(B).$$

Es gilt nämlich

$$\det(B + tAB) = \det((\mathbb{1} + tA)B) = \det(\mathbb{1} + tA)\det(B).$$

Offenbar ist $\det(\mathbb{1} + tA)$ ein Polynom in t vom Grad n, und die Koeffizienten sind Polynome in den Koeffizienten von A. Weil die Unterdeterminanten von $\mathbb{1}$ genau dann nicht verschwinden, wenn die genausovielte Spalte wie Zeile gestrichen wird und dann die Unterdeterminanten gleich Eins sind, gilt

$$\det(\mathbb{1} + tA) = 1 + t\operatorname{Spur}(A) + \text{Terme höherer Ordnung}.$$

Damit folgt

$$\frac{d}{dt}\det(B + tAB)\bigg|_{t=0} = \operatorname{Spur}(A)\det(B) = \operatorname{Spur}(ABB^{-1}\det(B)).$$

Die adjunkte Matrix $B^{-1}\det(B)$ ist als Matrix der Unterdeterminanten von B auch für nicht invertierbare Matrizen wohldefiniert. Mit der Kettenregel erhalten wir für $F(t)$

$$\frac{d}{dt}\det(F(t)) = \operatorname{Spur}(\dot{F}(t)F^{-1}(t)\det(F(t))) \quad = \operatorname{Spur}(A(t))\det(F(t)). \qquad \textbf{q.e.d.}$$

Aus Beispiel 1.53 folgt $$\det(F(t)) = \exp\left(\int\limits_{t_0}^{t} \operatorname{Spur}(A(s))ds\right).$$

1.8 Floquettheorie

In diesem Abschnitt betrachten wir gewöhnliche homogene lineare Differentialgleichungssyteme in dem Banachraum V mit periodischen Koeffizienten:

$$\dot{u}(t) = A(t)u(t) \quad \text{mit} \quad A(t+\omega) = A(t) \quad \text{für ein} \quad \omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \text{und alle} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Hierbei ist $A : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(V)$ stetig. Für jede Lösung $t \mapsto u(t)$ ist auch $t \mapsto u(t+\omega)$ eine Lösung. Deshalb folgt aus Korollar 1.51, dass es ein invertierbares Element $M \in \mathcal{L}(V)$ gibt, das mit der entsprechende Fundamentallösung F folgendes erfüllt:

$$F(t+\omega) = F(t)M \qquad \text{für alle} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Dieser Isomorphismus wird Monodromie genannt und ist wegen $F(t_0) = \mathbb{1}$ gleich $M = F(t_0 + \omega)$. Wenn G eine stetig differenzierbare Abbildung von $\mathbb{R}$ in die invertierbaren Elemente von $\mathcal{L}(V)$ ist, wird jede Lösung u obiger Differentialgleichung durch $u \mapsto \tilde{u}$ mit $\tilde{u}(t) = G(t)u(t)$ auf eine Lösung folgender Differentialgleichung abgebildet:

$$\begin{aligned} &\dot{\tilde{u}}(t) = \frac{d}{dt}G(t)u(t) = \dot{G}(t)G^{-1}(t)\tilde{u}(t) + G(t)A(t)G^{-1}(t)\tilde{u}(t) = \tilde{A}(t)\tilde{u}(t) \quad \text{mit} \\ &\tilde{A}(t) = \dot{G}(t)G^{-1}(t) + G(t)A(t)G^{-1}(t). \end{aligned}$$

Die Floquettheorie beantwortet die Frage, wann zwei homogene lineare Differentialgleichungssyteme, deren Koeffizienten periodisch sind bezüglich der Periode $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ durch ein periodisches invertierbares $G \in C^1(\mathbb{R}, \mathcal{L}(V))$ aufeinander abgebildet werden.

Satz 1.63. *Seien V ein Banachraum, $A : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(V)$ und $\tilde{A} : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(V)$ stetig und periodisch mit der Periode $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dann gibt es genau dann eine stetig differenzierbare Abbildung $G : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(V)$ in die invertierbaren Elemente von $\mathcal{L}(V)$, die*

$$G(t+\omega) = G(t) \qquad \text{und} \qquad \tilde{A}(t) = \dot{G}(t)G^{-1}(t) + G(t)A(t)G^{-1}(t) \qquad \text{für alle } t \in \mathbb{R}$$

erfüllt, wenn es ein invertierbares $G \in \mathcal{L}(V)$ gibt, so dass für die beiden entsprechenden Monodromien $\tilde{M} = GMG^{-1}$ gilt.

Beweis: Wenn ein differenzierbares und invertierbares $G : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(V)$ die Koeffizienten $A : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(V)$ auf $\tilde{A}(t) = \dot{G}(t)G^{-1}(t) + G(t)A(t)G^{-1}(t)$ abbildet, dann erfüllen die entsprechenden Fundamentallösungen F und $\tilde{F}$ offenbar

$$\tilde{F}(t) = G(t)F(t)G^{-1}(t_0) \qquad \text{für alle} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Dann ist die Monodromie $\tilde{M}$ des transformierten Systems gleich

$$\tilde{M} = \tilde{F}(t_0{+}\omega) = G(t_0{+}\omega)F(t_0{+}\omega)G^{-1}(t_0) = GMG^{-1} \quad \text{mit} \quad G = G(t_0) = G(t_0{+}\omega).$$

Wenn es umgekehrt ein invertierbares $G \in \mathcal{L}(V)$ gibt mit $\tilde{M} = GMG^{-1}$, dann transformiert die stetig differenzierbare Abbildung invertierbare $G : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(V)$ mit $G(t) = \tilde{F}(t)GF^{-1}(t)$ die Lösungen der Differentialgleichung $\dot{u}(t) = A(t)u(t)$ auf die Lösungen der Differentialgleichungen $\dot{u}(t) = \tilde{A}(t)u(t)$ und erfüllt für alle $t \in \mathbb{R}$

$$G(t+\omega) = \tilde{F}(t+\omega)GF^{-1}(t+\omega) = \tilde{F}(t)\tilde{M}GM^{-1}F^{-1}(t) = \tilde{F}(t)GF^{-1}(t) = G(t).$$ **q.e.d.**

Lemma 1.64. *Eine Matrix $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ ist genau dann von der Form $A = \exp(B)$ mit $B \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$, wenn A invertierbar ist. Die Eigenwerte von B sind die Logarithmen der Eigenwerte von A und bis auf Addition von ganzzahligen Vielfachen von $2\pi i$ eindeutig.*

Beweis: Wenn es eine Matrix B gibt mit $\exp(B) = A$, dann besitzt B eine Jordansche Normalform. Dann werden durch $z \mapsto \exp(z)$ die Eigenwerte von B auf die Eigenwerte von A abgebildet. Also hat dann A keinen Eigenwert Null und ist invertierbar.

Wenn umgekehrt A invertierbar ist, dann genügt es offenbar für jeden Jordanblock von A eine Matrix B zu finden, so dass $\exp(B)$ gleich dem Jordanblock ist. Aus der Taylorreihe von $\ln(1 + z)$ bei $z = 0$ folgt folgende Identität formaler Potenzreihen:

$$1 + z = \exp(\ln(1 + z)) = \exp\left(-\sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l z^l}{l}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(-\sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l z^l}{l}\right)^n.$$

Weil echte obere Dreiecksmatrizen nilpotent sind, ist folgende Reihe endlich und definiert eine Umkehrfunktion von exp auf Jordanblöcken mit $\lambda \neq 0$:

$$\ln\begin{pmatrix} \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \ln(\lambda)\mathbb{1} - \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l\lambda^l} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}^l.$$ **q.e.d.**

Korollar 1.65. *Sei $A : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ stetig und periodisch mit der Periode $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dann gibt es eine stetig differenzierbare periodische Abbildung $G : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ in die invertierbaren $n \times n$-Matrizen mit Periode ω, das das Differentialgleichungssystem $\dot{u}(t) = A(t)u(t)$ in ein autonomes System $\dot{u}(t) = \tilde{A}u(t)$ transformiert.*

Beweis: Sei M die Monodromie des periodischen Differentialgleichungssystems $\dot{u}(t) = A(t)u(t)$. Wegen dem vorangehenden Lemma gibt es dann eine Matrix $B \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ mit $\exp(B) = M$. Das autonome Differentialgleichungssystem $\dot{u}(t) = \tilde{A}u(t)$ mit $\tilde{A} = B/\omega$ hat die Fundamentallösung $F(t) = \exp((t-t_0)\tilde{A})$ und die Monodromie $\tilde{M} = F(t_0+\omega) = \exp(B) = M$. Dann folgt die Aussage aus Satz 1.63. **q.e.d.**