Kapitel 2

Stabilität von dynamischen Systemen

Es ist das Hauptziel dieses Kapitels, ein möglichst gutes Verständnis des qualitativen Verhaltens des von einer gewöhnlichen Differentialgleichung erzeugten Flusses in der Nähe eines kritischen Punktes zu gewinnen. Diese Fragestellung steht in engem Zusammenhang mit dem Langzeitverhalten, der sog. Stabilitätstheorie.

Zuerst führen wir die wichtigsten Stabilitätsbegriffe ein und betrachten als den einfachsten Fall zweidimensionale lineare Flüsse. Danach beweisen wir das "Prinzip der linearisierten Stabilität", welches es erlaubt, aus dem Spektrum des in einem kritischen Punkt linearisierten Vektorfeldes Aufschluß über die Ljapunovstabilität dieses kritischen Punktes zu bekommen. Im letzten Paragraphen dieses Kapitels betrachten wir, in Analogie zur Klassifizierung linearer Flüsse, hyperbolische kritische Punkte eines differenzierbaren Vektorfeldes. Wir beweisen den Linearisierungssatz von Grobman und Hartmann sowie den Satz über die lokalen stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten.

Definition 2.1. *Sei $\Phi : W \to X$ ein lokaler Fluss auf einem metrischen Raum X und x_0 ein Fixpunkt von Φ. Dann heißt x_0*

stabil, *wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass $\Phi(t, x) \in B(x_0, \epsilon)$ für alle $(t, x) \in [0, \infty) \times B(x_0, \delta) \cap W$ gilt.*

instabil, *wenn x_0 nicht stabil ist.*

attraktiv, *wenn es ein $\delta > 0$ gibt, so dass $[0, \infty) \times B(x_0, \delta)$ in W enthalten ist und es für alle $\epsilon > 0$ ein $t_0 > 0$ gibt, so dass $\Phi(x, t) \in B(x_0, \epsilon)$ für alle $(t, x) \in (t_0, \infty) \times B(x_0, \delta)$ gilt.*

asymptotisch stabil, *wenn x_0 stabil und attraktiv ist.*

Beispiel 2.2. **(i)** *$G = \mathbb{Z}$, $X = \mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\Phi(t, x)) = \lambda^t \cdot x$.*

Für $|\lambda| \leq 1$ ist $0 \in X$ stabil.

Für $|\lambda| < 1$ ist $0 \in X$ asymptotisch stabil.

(ii) *$G = \mathbb{R}$, $X = \mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\Phi(t, x)) = \exp(t\lambda) \cdot x$.*

Für $\mathrm{Re}(\lambda) \leq 0$ ist $0 \in X$ stabil.

Für $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$ ist $0 \in X$ asymptotisch stabil.

Lemma 2.3. *Sei x_0 ein stabiler kritischer Punkt des lokalen Flusses $\Phi : W \to X$. Dann ist $[0, \infty) \times B(x_0, \epsilon)$ für ein $\epsilon > 0$ in W enthalten.*

Beweis: Weil W offen ist und $(0, x_0)$ enthält, liegt $(-\epsilon, \epsilon) \times B(x_0, \epsilon)$ für ein $\epsilon > 0$ in W. Weil x_0 stabil ist, gibt es ein $\delta > 0$, so dass $\Phi(t, x)$ für alle $(t, x) \in [0, \infty) \times B(x_0, \delta) \cap W$ in $B(x_0, \epsilon)$ liegt. Für $x \in B(x_0, \min\{\epsilon, \delta\})$ liegt dann $[0, \epsilon) \times \{\Phi(t, x) \mid (t, x) \in [0, \infty) \times \{x\} \cap W\}$ in W. Wegen der Bedingung (ii) in Definition 1.31 ist dann $[0, n\epsilon) \times \{x\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ in W enthalten. Also liegt $[0, \infty) \times B(x_0, \min\{\epsilon, \delta\})$ in W. **q.e.d.**

2.1 Die Klassifikation linearer ebener Flüsse

In diesem Abschnitt untersuchen wir zunächst die Stabilität von dynamischen Systemen, die dem Fluss linearer Vektorfelder auf einem endlichdimensionalen Vektorraum V entsprechen. Solche dynamischen Systeme haben immer die Null als Fixpunkt. Wir werden später sehen, dass in einer Umgebung von Fixpunkten, das Verhalten von allgemeineren dynamischen Systemen durch solche Systeme beschrieben werden kann. Deshalb ist es sinnvoll sich zunächst auf solche Systeme einzuschränken. Die entsprechenden dynamischen Systeme sind dann durch einen linearen Fluss gegeben:

$$\Phi(t, x) = e^{tA} x \quad \text{mit} \quad A \in \mathcal{L}(V).$$

Wir betrachten zuerst zweidimensionale reelle Systeme

$$\dot{x} = Ax \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R}^2 \quad \text{und} \quad A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2).$$

Aus dem ersten Kapitel wissen wir, daß die Lösungen durch das Spektrum $\sigma(A)$ und die algebraischen Vielfachheiten der Eigenwerte charakterisiert sind und daß wir sinnvollerweise A diagonalisieren bzw. auf Jordansche Normalform bringen:

$$\dot{y} = Jy \quad \text{mit} \quad y = Bx \quad \text{und} \quad J = B^{-1}AB$$

mit einem invertierbaren $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$. Wir unterscheiden zwischen folgenden Fällen:
1. Fall: A hat reelle nichtverschwindende Eigenwerte verschiedenen Vorzeichens. In diesem Fall ist A diagonalisierbar und es existiert ein invertierbares $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ mit

$$J = B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad \lambda < 0 < \mu.$$

In den Koordinaten $y = Bx$ erzeugt J den Fluss $t \to (e^{\lambda t}y_1, e^{\mu t}y_2)$. In diesem Fall heißt der Nullpunkt Sattel.
2.Fall: Alle Eigenwerte haben negative Realteile. Dann benutzen wir das folgende Stabilitätskriterium. In diesem Fall heißt der Nullpunkt Senke oder asymptotisch stabil.

Satz 2.4 (Stabilitätskriterium)**.** *Für $A \in \mathcal{L}(V)$ auf einem endlichdimensionalen Banachraum V konvergiert $\exp(tA)$ in $\mathcal{L}(V)$ im Grenzwert $t \to \infty$ genau dann gegen Null, wenn alle komplexen Nullstellen des charakteristischen Polynoms von A negativen Realteil haben.*

Beweis: Wir betrachten die Komplxzifizierung $A_{\mathbb{C}}$ von A auf $V_{\mathbb{C}} = V + iV$, mit $A_{\mathbb{C}}(v + iw) = Av + iAw$ und bringen A auf Jordansche Normalform. Weil alle Normen eines endlichdimensionalen Vektorraumes äquivalent sind, genügt es die Aussage für die Jordansche Normalform von A zu beweisen. Offenbar sind $\lim_{t\to\infty} \exp(tA_{\mathbb{C}}) = 0$, und $\lim_{t\to\infty} \exp(tA) =)$ äquivalent. Wegen Übungsaufgabe1.58 sind dann alle Lösungen von $\dot{x} = A_{\mathbb{C}}x$ Linearkombinationen von $x(t) = t^n \exp(t\lambda)x$, wobei λ ein Eigenwert von A ist. Weil $|\exp(t\lambda)| = \exp(t\,\mathrm{Re}(\lambda))$ gilt, konvergieren diese Lösungen für $t \to \infty$ genau dann gegen Null, wenn die Realteile von allen Eigenwerten negativ sind. **q.e.d.**

Wir betrachten nun verschiedene Unterfälle:
(a) Die Eigenwerte sind reell: $\lambda \leq \mu < 0$. Wenn A diagonalisierbar ist, dann folgt

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

für ein relles invertierbares $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$. Dann erhält man $y(t) = (e^{\lambda t}y_1, e^{\mu t}y_2)$. Ist A nicht diagonalisierbar, dann muß $\lambda = \mu$ sein. Und A hat die Jordansche Normalform

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \lambda < 0$$

für ein relles invertierbares $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$. Die transformierte Gleichung $\dot{y} = Jy$ hat die Lösung $y(t) = (y_1(t), y_2(t))$ mit

$$y_1(t) = \alpha e^{\lambda t} + \beta t e^{\lambda t}, \qquad y_2(t) = \beta e^{\lambda t}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Für $\beta \neq 0$ haben $y_2 \neq 0$ und β das gleiche Vorzeichen und y_1 ist ein Funktion von y_2:

$$y_1 = \frac{\alpha y_2}{\beta} + \frac{y_2}{\lambda} \ln\left(\frac{y_2}{\beta}\right) \quad \text{mit} \quad \lambda < 0.$$

In beiden Fällen heißt 0 ein stabiler Knoten, wobei man im zweiten Fall von einem falschen Knoten spricht.
(b) Die Eigenwerte sind komplex: also konjugiert komplex. Ist $A_{\mathbb{C}} \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$ die Komplexifizierung von $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, so folgt aus $A_{\mathbb{C}} u = \lambda u$ durch Konjugation $A_{\mathbb{C}} \bar{u} = \bar{\lambda}\bar{u}$, d.h. $A_{\mathbb{C}} v = \lambda u \Leftrightarrow A_{\mathbb{C}} \bar{u} - \bar{\lambda}\bar{u}$. Mit diesem Eigenvektor u von $A_{\mathbb{C}}$ zum Eigenwert λ bilden dann u und $\bar{u}$ eine Basis von $\mathbb{C}^2$, und der Realteil v und der Imaginärteil w von u eine Basis von $\mathbb{R}^2$. Seien α und ω Realteil und Imginärteil von λ. Dann gilt:

$$Av + iAw = A_{\mathbb{C}}(v + iw) = (\alpha + i\omega)(v + iw) = \alpha v - \omega w + i(\alpha w + \omega v),$$

$$Av = \alpha v - \omega w \qquad\qquad Aw = \omega v + \alpha w.$$

Wir sehen: hat $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ einen nichtreellen Eigenwert $\lambda = \alpha + i\omega$, mit $\omega \neq 0$, so ist auch $\bar{\lambda} = \alpha - i\omega$ ein Eigenwert und es existiert ein invertierbares $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ mit

$$J = B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \alpha & -\omega \\ \omega & \alpha \end{pmatrix}, \quad \omega > 0.$$

Um e^{tJ} zu berechnen, identifizieren wir $\mathbb{R}^2$ mit $\mathbb{C}$ durch $(x, y) \leftrightarrow x + iy$. Wegen

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\omega \\ \omega & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x - \omega y \\ \omega x + \alpha y \end{pmatrix} \leftrightarrow (\alpha + i\omega)(x + iy),$$

entspricht bei dieser Identifikation J der Multiplikation mit $\lambda = \alpha + i\omega$. Wenn wir $\mathcal{L}(\mathbb{C})$ mit $\mathbb{C}$ wie üblich durch $M \in \mathcal{L}(\mathbb{C}) \leftrightarrow m = M1 \in \mathbb{C}$ identifizieren, erhalten wir einen $\mathbb{R}$-Algebraisomorphismus $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2) \leftrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$. Folglich entspricht J^n für alle $n \in \mathbb{N}$ der Matrix zu λ^n und somit e^{tJ} der Matrix zu $e^{\lambda t} = e^{\alpha t}(\cos(\omega t) + i \sin(\omega t))$, also

$$e^{tJ} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix}.$$

Geometrisch bewirkt also e^{tJ} eine Streckung mit dem Faktor $e^{\lambda t}$ und eine Drehung im mathematisch positiven Sinn um den Winkel ω. In diesem Fall heißt 0 stabile Spirale.
3.Fall: Alle Eigenwerte haben positive Realteile. Durch die Zeitumkehr können wir diesen Fall in den zweiten transformieren. Es folgt für jede nichttriviale Lösung

$$\lim_{t\to\infty} |u(t)| = \infty \text{ und } \lim_{t\to-\infty} u(t) = 0$$

Der Ursprung heißt Quelle. Wegen $e^{tA} = e^{-t(-A)}$ erhält man die Phasenporträts von Fall 2 durch Umkehren der Pfeile. Man spricht dann von instabilen Knoten und Spiralen.
4.Fall: Die Eigenwerte sind rein imaginär. In diesem Fall kann A auf die Form

$$J = B^{-1}AB = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}, \quad \omega > 0,$$

transformiert werden. Folglich gilt

$$e^{tJ} = \begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t \\ \sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix},$$

und alle Lösungen sind periodisch mit der Periode $2\pi/\omega$. In den y-Koordinaten sind die Bahnen Kreise um 0, in den x-Koordinaten Ellipsen. In diesem Fall heißt 0 Zentrum.

Die Eigenwerte von $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\det(A - \lambda) = \lambda^2 - \mathrm{Spur}(A)\lambda + \det(A).$$

Mit der Diskriminante $\mathrm{Dis} = \mathrm{Spur}^2(A) - 4\det(A)$ sind die Eigenwerte gegeben durch $\frac{1}{2}(\mathrm{Spur}(A) \pm \sqrt{\mathrm{Dis}})$. Folglich sind die Eigenwerte reell, wenn $\mathrm{Dis} \geq 0$ gilt, und sie sind komplex mit negativem Realteil für $\mathrm{Spur}(A) < 0$ und $\mathrm{Dis} < 0$, usw.. Also kann man die geometrische Information über die Phasenporträts von $\dot{x} = Ax$, die vom charakteristischen Polynom abgeleitet werden kann, zusammenfassen:

Sattel: $\det(A) < 0$.

Senken: $\det(A) > 0$ und $\mathrm{Spur}(A) < 0$.

> **Knoten:** $\mathrm{Spur}^2(A) \geq 4\det(A)$.
>
> **Spirale:** $\mathrm{Spur}^2(A) < 4\det(A)$.

Zentren: $\det(A) > 0$ und $\mathrm{Spur}(A) = 0$.

Quellen: $\det(A) > 0$ und $\mathrm{Spur}(A) > 0$.

> **Knoten:** $\mathrm{Spur}^2(A) \geq 4\det(A)$.
>
> **Spirale:** $\mathrm{Spur}^2(A) < 4\det(A)$.

2.2 Hyperbolische lineare Flüsse

Im Folgenden wollen wir die sogenannten hyperbolischen linearen Flüsse einführen. Sie sind im wesentlichen dadurch charakterisiert, dass sie keine Grenzfälle enthalten die durch sehr kleine Störungen ihr Verhalten dramatisch verändern können. Wir betrachten dafür den allgemeinen Fall eines beliebigen $\mathbb{K}$- Vektorraums V der Dimension $m < \infty$ mit Norm $\|\cdot\|_V$. Die entsprechende Norm auf $\mathcal{L}(V)$ bezeichnen wir auch mit $\|\cdot\|_V$. Für $A \in \mathcal{L}(V)$ bezeichnen wir mit e^{tA} den von A erzeugten linearen Fluß auf V

$$\Phi : \mathbb{R} \times V \to V, \quad (t, x) \mapsto e^{tA}x.$$

Der Nullpunkt von e^{tA} ist ein Fixpunkt und heißt eine Senke (bzw. Quelle), wenn

$$\lim_{t\to\infty} e^{tA}x = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad \lim_{t\to-\infty} e^{tA}x = 0 \qquad \text{für alle } x \in V \text{ gilt.}$$

Wegen dem Stabilitätskriterium ist 0 genau dann eine Senke (bzw. Quelle), wenn gilt

$$\mathrm{Re}(\lambda) < 0 \quad \text{bzw.} \quad \mathrm{Re}(\lambda) > 0 \quad \text{für alle} \quad \lambda \in \sigma(A).$$

Ist 0 eine Senke (bzw. Quelle), so sagt man auch, der lineare Fluß e^{tA} sei eine Kontraktion (bzw. Expansion). Wir wollen nun zeigen, daß bei einer Kontraktion (bzw. Expansion) jede Bahn $t \mapsto e^{tA}x$ mit $x \neq 0$ für $t \to \infty$ exponentiell gegen 0 (bzw. “gegen ∞”) konvergiert. Dazu benötigen wir das folgende wichtige Lemma.

Ist $M \subset \mathbb{C}$ nicht leer und ist $\beta \in \mathbb{R}$, so schreiben wir im folgenden

$$\mathrm{Re}(M) < \beta,$$

wenn $\mathrm{Re}(m) < \beta$ für alle $m \in M$ gilt. Analog sind verwandte Ungleichungen zu interpretieren. Ferner verstehen wir unter einer Hilbertnorm $\|\cdot\|$ eine aus einem Skalarprodukt abgeleitete Norm, d.h. für ein geeignetes Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ auf V gilt $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle$.

Lemma 2.5. *Für $A \in \mathcal{L}(V)$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gelte $\mathrm{Re}(\sigma(A)) < \alpha$. Dann existiert eine Hilbertnorm $\|\cdot\|_A$ auf V mit $\|e^{tA}\|_A \le e^{\alpha t}$ für alle $t \ge 0$.*

Beweis: Für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ wissen wir, daß A bzgl. einer geeigneten Basis die Form

$$A = D + N \quad \text{mit} \quad D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_2, \ldots, \lambda_k, \ldots, \lambda_k) = \mathrm{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_m)$$

und $N^m = 0$ sowie $DN = ND$. Außerdem können wir die Basis $\{e_1, \ldots, e_m\}$ von V so wählen, daß gilt: $Ne_j = e_{j-1}$ oder 0. Ersetzen wir e_j durch $a_j = \delta^j e_j$ mit $\delta > 0$, so bleibt D unverändert, und für N gilt: $Na_j = \delta a_{j-1}$ oder 0. Also hat die Matrix von N bezüglich der Basis $\{a_1, \ldots, a_m\}$ höchstens in der oberen Nebendiagonalen von Null verschiedene Elemente, und zwar die Zahlen δ. Wenn wir nun die zu dieser Basis gehörige euklidische Norm verwenden, erhalten wir zu jedem $\epsilon > 0$ eine Hilbertnorm $\|\cdot\|_A$ auf V mit $\|N\|_A \leq \epsilon$. Für $D = \operatorname{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_m)$ und e^{tD} gilt offensichtlich

$$\|D\|_A = \max_{1\leq j\leq m} |\mu_j|, \qquad \|e^{tD}\|_A = \max_{1\leq j\leq m} |e^{t\mu_j}| = \max_{1\leq j\leq m} e^{t\operatorname{Re}(\mu_j)} \leq e^{t(\alpha-\epsilon)},$$

wenn wir $\epsilon > 0$ so wählen, daß $\operatorname{Re}(\lambda) \leq \alpha - \epsilon$ für alle $\lambda \in \sigma(A)$ ist. Also gilt für $t \geq 0$

$$\|e^{tA}\|_A = \|e^{tD+tN}\|_A = \|e^{tD}e^{tN}\|_A \leq \|e^{tD}\|_A \cdot \|e^{tN}\|_A \leq e^{t(\alpha-\epsilon)}e^{t\|N\|_A} \leq e^{t(\alpha-\epsilon)}e^{t\epsilon} = e^{\alpha t}$$

Da der Realteil eines komplexen Skalarproduktes ein reelles Skalarprodukt ist, induziert eine Hilbertnorm $\|\cdot\|_{A_\mathbb{C}}$, die auf der Komplexifizierung $V_\mathbb{C} = V \oplus iV$ eines reellen Vektorraumes V definiert ist, auf dem reellen Untervektorraum V eine Hilbertnorm $\|\cdot\|_A$. Da $\|Ax\|_A = \|A_\mathbb{C}x\|_{A_\mathbb{C}}$ für $A \in \mathcal{L}(V)$ und $x \in V$ gilt, folgt $\|A\|_A = \|A\|_{A_\mathbb{C}}$. Also folgt die Behauptung im reellen Fall durch Anwenden der obigen Resultate auf die Komplexifizierung. **q.e.d.**

Korollar 2.6. **(i)** *Gilt* $\operatorname{Re}(\sigma(A)) < \alpha$, *so existiert eine Konstante* $\beta \geq 0$ *mit*

$$\|e^{tA}\|_V \leq \beta e^{\alpha t} \quad \textit{für alle} \quad t \geq 0.$$

(ii) *Gilt* $\operatorname{Re}(\sigma(A)) > \alpha$, *so existiert eine Konstante* $\gamma > 0$ *mit*

$$\|e^{tA}x\|_V \geq \gamma e^{\alpha t}\|x\|_V \quad \textit{für} \quad x \in V \textit{ und } t \geq 0.$$

Beweis: (i) folgt aus der Äquivalenz aller Normen auf dem endlichdimensionalen Raum $\mathcal{L}(V)$ und dem vorangehenden Lemma. In (ii) folgt aus dem vorangehenden Lemma wegen $\sigma(-A) = -\sigma(A)$ für eine geeignete Hilbertnorm $\|\cdot\|_{-A}$

$$\|e^{-tA}\|_{-A} = \|e^{t(-A)}\|_A \leq e^{-\alpha t} \quad \text{für} \quad t \geq 0.$$

$$\|x\|_{-A} = \|e^{-tA}e^{tA}x\|_{-A} \leq \|e^{-tA}\|_{-A}\|e^{tA}x\|_{-A} \leq e^{-\alpha t}\|e^{tA}x\|_{-A} \quad \text{für} \quad x \in V \text{ und } t \geq 0.$$

Daraus folgt (ii) wieder wegen der Äquivalenz der Normen. **q.e.d.**

Nach diesen Vorbereitungen erhalten wir das folgende Theorem über das exponentielle Abklingen bzw. Anwachsen der Flußlinien im Falle einer Senke bzw. Quelle.

Satz 2.7. *Es Sei* $A \in \mathcal{L}(V)$. *Dann sind äquivalent:*

(i) *Der Nullpunkt ist eine Senke.*

(ii) *Es existieren* $\alpha > 0$ *und* $\beta \geq 0$ *mit* $\|e^{tA}x\|_V \leq \beta e^{-\alpha t}\|x\|_V$ *für alle* $t \geq 0$ *und* $x \in V$.

(iii) *Es existieren eine Hilbertnorm* $\|\cdot\|_A$ *und* $\alpha > 0$ *mit* $\|e^{tA}\|_A \leq e^{-\alpha t}$ *für* $t \geq 0$.

Ebenso sind äquivalent:

(i') *Der Nullpunkt ist eine Quelle.*

(ii') *Es existieren* $\alpha > 0$ *und* $\beta \geq 0$ *mit* $\|e^{tA}x\|_V \geq \beta e^{\alpha t}\|x\|_V$ *für alle* $t \geq 0$ *und* $x \in V$.

(iii') *Es existieren eine Hilbertnorm* $\|\cdot\|_{-A}$ *und* $\alpha > 0$ *mit* $\|e^{tA}x\|_{-A} \geq e^{\alpha t}\|x\|_{-A}$ *für* $t \geq 0$.

Beweis: Die Behauptung folgt unmittelbar aus dem vorangehenden Korollar. **q.e.d.**

Im Folgenden bezeichnen wir mit $m(\lambda)$ die algebraische Vielfachheit des Eigenwertes λ von $A \in \mathcal{L}(V)$. Außerdem zerlegen wir das Spektrum $\sigma(A)$ disjunkt,

$$\sigma(A) = \sigma_s(A) \cup \sigma_n(A) \cup \sigma_u(A),$$

in das "stabile Spektrum":	$\sigma_s(A) = \{\lambda \in \sigma(A) \mid \mathrm{Re}(\lambda) < 0\}$,
das "neutrale Spektrum":	$\sigma_n(A) = \{\lambda \in \sigma(A) \mid \mathrm{Re}(\lambda) = 0\}$,
und das "instabile Spektrum":	$\sigma_u(A) = \{\lambda \in \sigma(A) \mid \mathrm{Re}(\lambda) > 0\}$.

Definition 2.8. *Der von* A *erzeugte Fluß* e^{tA} *heißt hyperbolisch, wenn* $\sigma_n(A) = \emptyset$, *also*

$$\sigma(A) = \sigma_s(A) \cup \sigma_u(A).$$

Der folgende Satz verallgemeinert den zweidimensionalen Sattel:

Satz 2.9. *Sei* e^{tA} *ein hyperbolischer linearer Fluß. Dann gibt es eine Zerlegung*

$$V = V_s \oplus V_u \qquad \textit{mit} \quad A = A_s \oplus A_u \qquad \textit{und} \quad e^{tA} = e^{tA_s} \oplus e^{tA_u},$$

derart, daß e^{tA_s} *eine Kontraktion und* e^{tA_u} *eine Expansion sind. Sie ist eindeutig mit*

$$\mathit{dim}(V_s) = \sum_{\lambda \in \sigma_s(A)} m(\lambda) \qquad \mathit{dim}(V_u) = \sum_{\lambda \in \sigma_u(A)} m(\lambda).$$

Beweis: Wir betrachten zuerst den komplexen Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Wir setzen

$$V_s = \bigoplus_{\lambda \in \sigma_s(A)} V_\lambda \quad V_u = \bigoplus_{\lambda \in \sigma_u(A)} V_\lambda \quad \text{mit} \quad V_\lambda = \{x \in V \mid (A - \lambda \mathbb{1}_V)^{m(\lambda)} x = 0\}.$$

Hierebei bezeichnet $m(\lambda)$ die Ordnung der Nullstelle λ des charakteristischen Polynoms von A. Wir zerlegen also jeden Vektor von V bezüglich der Basis, in der A Jordansche Normalform hat. Dann wird V_λ von den Basisvektoren aufgespannt, die zu einem

Jordanblock mit Eigenwert λ gehören. Entsprechend werden V_s und V_u von den Basisvektoren aufgespannt, die zu einem Jordanblock mit einem Eigenwert in $\sigma_s(A)$ bzw. in $\sigma_u(A)$ gehören.v Aufgrund der Jordanschen Normalform sind die Unterräumen V_λ und damit auch die Unterräume V_s und V_u invariant unter A. Dann ist $V = V_s \oplus V_u$, und diese Zerlegung zerlegt $A = A_s \oplus A_u$. Offenbar gilt

$$\sigma(A_s) = \sigma_s(A), \qquad \sigma(A_u) = \sigma_u(A).$$

Aus dem Stabilitätskriterium folgt, daß e^{tA_s} eine Kontraktion bzw. e^{tA_u} eine Expansion ist. Offenbar gelten die Formeln für die Dimensionen. Es bleibt noch, die Eindeutigkeit zu zeigen. Sie folgt aus folgender Charakterisierung der Unterräume V_s und V_u:

$$V_s = \{x \in V \mid \lim_{t\to\infty} e^{tA}x = 0\}, \qquad V_u = \{x \in V \mid \lim_{t\to-\infty} e^{tA}x = 0\}.$$

Im reellen Fall komplxifizieren wir zuerst den Vektorraum V und die lineare Abbildung A: Wir definieren den komplexen Vektorraum $V_{\mathbb{C}} = V \oplus iV$ mit der natürlichen Skalarmultiplikation von komplexen Zahlen und $A_{\mathbb{C}}(u \oplus iv) = Au \oplus iAv$. Dann ist $A_{\mathbb{C}}$ eine komplexlineare Abbildung in $\mathcal{L}(V_{\mathbb{C}})$. Die Anwendung obiger Zerlegung auf $A_{\mathbb{C}}$ ergibt:

$$V_{\mathbb{C}} = (V_{\mathbb{C}})_s \oplus (V_{\mathbb{C}})_u, \qquad A_{\mathbb{C}} = (A_{\mathbb{C}})_s \oplus (A_{\mathbb{C}})_u,$$

derart, daß $e^{t(A_{\mathbb{C}})_s}$ eine Kontraktion und $e_u^{t(A_{\mathbb{C}})}$ eine Expansion sind. Die Abbildung

$$V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}, \qquad u \oplus iv \mapsto u \oplus -iv$$

heisst komplexe Konjugation von $V_{\mathbb{C}}$. Ihre Fixpunktmenge besteht aus den rein reellen Vektoren, die wir mit V identifizieren. Aus dem selben Grund, aus dem die komplexe Konjugation von $\mathbb{C}$ ein Algebrahomomorphismus ist, ist der komplex kunjugierte Vektor von $\lambda \cdot (u \oplus iv)$ gleich $\bar{\lambda} \cdot (u \oplus -iv)$. Deshalb bildet die komplexe Konjugation V_λ auf $V_{\bar{\lambda}}$ ab. Weil die komplexe Konjugation $\sigma_s(A)$ und $\sigma_u(A)$ invariant lassen, lässt die komplexe Konjugation von $V_{\mathbb{C}}$ die Unterräume $(V_{\mathbb{C}})_s$ und $(V_{\mathbb{C}})_u$ invariant. Deshalb können wir die Fixpunkte der komplexen Konjugation V zerlegen in $V = V_s \oplus V_u$ mit

$$V_s = (V_{\mathbb{C}})_s \cap V, \qquad V_u = (V_{\mathbb{C}})_u \cap V.$$

Diese Unterräume sind invariant unter A, und A zerfällt in $A = A_s \oplus A_u$. Dann folgt die Behauptung aus der entsprechenden Aussage im komplexen Fall. **q.e.d.**

Die invarianten Untervektorräume V_s bzw. V_u des hyperbolischen linearen Flusses e^{tA} heißen stabile bzw. instabile Untervektorräume des Flusses. Ein hyperbolischer linearer Fluß kann eine Kontraktion ($\sigma_u = \emptyset$) oder eine Expansion ($\sigma_s = \emptyset$) sein.

Es erhebt sich die Frage, was an den Phasenporträts dieses Abschnitts charakteristisch ist. Ist es möglich, durch Einführen geeigneter nichtlinearer Koordinaten einen

Sattel in einen Knoten oder einen stabilen Knoten in eine instabile Spirale zu verwandeln? Wir werden zeigen, daß dies nicht der Fall ist, daß es aber wohl möglich ist, einen stabilen Knoten in einen stabilen Strudel zu transformieren. Dazu müssen wir zuerst den Begriff äquivalenter Flüsse präzisieren.

Definition 2.10. *Seinen Φ und $\tilde{\Phi}$ zwei lokale Flüsse auf den metrischen Räumen X und $\tilde{X}$, mit den Definitionsbereichen $W \subset \mathbb{R} \times X$ und $\tilde{W} \subset \mathbb{R} \times \tilde{X}$. Die Lokalen Flüsse Φ und $\tilde{\Phi}$ heißen flußäquivalent, wenn $\mathbb{1}_{\mathbb{R}} \times \Psi$ für einen Homöomorphismus Ψ von X auf $\tilde{X}$ ein Hoöomorphismus von W auf $\tilde{W}$ ist, und $\Psi \circ \Phi = \tilde{\Phi} \circ (\mathbb{1}_{\mathbb{R}} \times \Psi)$ auf W gilt.*

Jedes Ψ mit diesen Eigenschaften heißt eine (topologische) Flußäquivalenz. Folglich ist Ψ genau dann eine topologische Flußäquivalenz, wenn das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} W \subset \mathbb{R} \times X & \xrightarrow{\Phi} & X \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mathbb{1}_{\mathbb{R}} \times \Psi} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \Psi} \\ \tilde{W} \subset \mathbb{R} \times \tilde{X} & \xrightarrow{\tilde{\Phi}} & \tilde{X}. \end{array}$$

Hierbei ist $\mathbb{1}_{\mathbb{R}} \times \Psi : W \to \mathbb{R} \times X$ definiert als $(\mathbb{1}_{\mathbb{R}} \times \Psi)(t, x) = (t, \Psi(x))$.

Sind X und $\tilde{X}$ offene Teilmengen eines Banchraumes, und Ψ stetig differenzierbar mit stetig differenzierbarer Umkehrabbildung, so heißen Φ und $\tilde{\Phi}$ stetig differenzierbar äquivalent und Ψ ist eine C^1-Flußäquivalenz. Sind X und $\tilde{X}$ Banachräume und Ψ linear, so heißen Φ und $\tilde{\Phi}$ linear äquivalent und Ψ ist eine lineare Flußäquivalenz. Offenbar sind (topologische) Flußäquivalenz bzw. C^1-Flußäquivalenz bzw. lineare Flußäquivalenz Äquivalenzrelationen. Außerdem bildet eine Flussäquivalenz Ψ die Orbits von Φ auf die Orbits von $\tilde{\Phi}$ ab, und zwar unter Erhaltung der Orientierung. Wir klassifizieren zuerst lineare Flüsse linear und bestimmen die Äquivalenzklassen der linearen Flußäquivalenz.

Satz 2.11. *Seien A und B lineare Abbildungen auf endlichdimensionalen Vektorräumen. Dann sind e^{tA} und e^{tB} genau dann linear flußäquivalent, wenn die beiden linearen Abbildungen A und B die gleiche Jordansche Normalform haben.*

Beweis: Ist Ψ eine lineare Flußäquivalenz zwischen e^{tA} und e^{tB}, so gilt

$$\Psi \circ e^{tA} = e^{tB} \circ \Psi \quad \Longleftrightarrow \quad e^{t\Psi \circ A \circ \Psi^{-1}} = e^{tB} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Bilden wir links und rechts die Ableitung nach t an der Stelle $t = 0$, so folgt $\Psi \circ A \circ \Psi^{-1} = B$. Also haben A und B die gleiche Jordansche Normalform. Umgekehrt folgt daraus, dass A und B die gleiche Jordansche Normalform haben, dass es ein invertierbares Ψ gibt mit $B = \Psi \circ A \circ \Psi^{-1}$. **q.e.d.**

Der nächste Satz zeigt, daß die differenzierbare Klassifizierung nichts neues ergibt.

Satz 2.12. *Für lineare Abbildungen A und B auf endlichdimensionalen Vektorräumen sind e^{tA} und e^{tB} genau dann C^1-flußäquivalent, wenn sie linear flußäquivalent sind.*

Beweis: Es sei Ψ eine C^1-Flußäquivalenz zwischen e^{tA} und e^{tB} und V der Vektorraum auf dem A wirkt. Dann führt der stetig differenzierbare Homöomorphismus $\Psi \in C^1$ dem kritischen Punkt $x = 0$ des Flusses e^{tA} in einen kritischen Punkt $y = \Psi(0)$ des Flusses e^{tB} über, d.h. $e^{tB}y = y$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Bezeichnen wir mit T die Translation $x \to x - y$, so ist $T \circ \Psi$ eine Flußäquivalenz zwischen e^{tA} und e^{tB}, wegen

$$\begin{aligned} T \circ \Psi \circ e^{tA}x &= \Psi \circ e^{tA}x - y = e^{tB}\Psi(x) - y \\ &= e^{tB}\Psi(x) - e^{tB}y = e^{tB}(T \circ \Psi)(x) \quad \text{für alle } x \in V \text{ und } t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Außerdem ist $T \circ \Psi(0) = 0$ und $(T \circ \Psi)'(0)$ eine invertierbare lineare Abbildung. Durch Differenzieren der Beziehung in $x = 0$ folgt

$$(T \circ \Psi)'(0) \circ e^{tA}x = e^{tB}(T \circ \Psi)'(0)(x) \quad \text{für alle} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Also ist $(T \circ \Psi)'(0)$ eine lineare Flußäquivalenz zwischen e^{tA} und e^{tB}. Die Umkehrung ist offensichtlich. **q.e.d.**

Für die topologische Klassifizierung linearer Flüsse benötigen wir das folgende

Lemma 2.13. *Die Realteile aller Eigenwerte von $A \in \mathcal{L}(V)$ auf einem endlichdimensionalen Vektorraum V seien negativ, und Φ sei der von A erzeugte lineare Fluß auf V, d.h. $\Phi(t, \cdot) = e^{tA}$ für $t \in \mathbb{R}$. Mit der Hilbertnorm $\|\cdot\|_A$ auf V aus Lemma 2.5 ist*

$$\hat{\Phi} : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^{d-1}_A \to V \setminus \{0\}, \quad (t, x) \mapsto \Phi(t, x)$$

auf $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{d-1}_A = \mathbb{R} \times \{x \in V \mid \|x\|_A = 1\}$ ein Homöomorphismus.

Beweis: Wähle $\alpha > 0$ so, dass die Realteile aller Eigenwerte von A kleiner als $-\alpha$ sind. Dann existiert nach Satz 2.7 eine Hilbertnorm $\|\cdot\|_A$ auf V mit

$$e^{-t\alpha}\|x\|_A \le \|e^{tA}x\|_A \quad \text{für } t \le 0 \quad \text{und} \quad \|e^{tA}x\|_A \le e^{-t\alpha}\|x\|_A \quad \text{für } t \ge 0.$$

Also ist $\hat{\Phi}$ stetig und für jedes $x \in \mathbb{S}^{d-1}_A$ und $t \neq 0$ liegt $e^{tA}x$ nicht in $\mathbb{S}^{d-1}_A$. Dann ist $\hat{\Phi}$ auch injektiv. Für $y \in V \setminus \{0\}$ gibt es wegen dem Zwischenwertsatz und wegen $\lim_{t\to-\infty} e^{-t\alpha}\|y\|_A = \infty$ und $\lim_{t\to\infty} e^{-t\alpha}\|y\|_A = 0$ ein $t \in \mathbb{R}$ mit $\|\Phi(-t, y)\|_A = 1$. Also ist Φ auch surjektiv und damit bijektiv. Für $x \in \mathbb{S}^{d-1}_A$ folgt $t \ge -\frac{1}{\alpha} \ln \|\hat{\Phi}(t, x)\|_A$ aus $t \le 0$ und $t \le -\frac{1}{\alpha} \ln \|\hat{\Phi}(t, x)\|_A$ aus $t \ge 0$. Deshalb gilt $|t| \le \frac{1}{\alpha}|\ln \|\hat{\Phi}(t, x)\|_A|$. Dann ist das Urbild einer kompakten Teilmenge von $V \setminus \{0\}$ unter $\hat{\Phi}$ beschränkt und kompakt. Weil jeder Punkt in $V \setminus \{0\}$ eine in $V \setminus \{0\}$ kompakte Umgebung besitzt, und das Bild von kompakten Mengen unter $\hat{\Phi}$ kompakt ist, ist die Umkehrabbildung stetig. **q.e.d.**

Das obige Lemma besagt geometrisch, daß jeder nichtkritische Orbit die Einheitssphäre $\mathbb{S}^{d-1}_A$ einer geeigneten Hilbertnorm transversal schneidet. Das folgende Lemma besagt anschaulich, daß die Orbits einer Kontraktion "geradegebogen" werden können.

Lemma 2.14. *Die Realteile aller Eigenwerte von $A \in \mathcal{L}(V)$ auf einem endlichdimensionalen Vektorraum V seien negativ. Dann ist e^{tA} flußäquivalent zu $e^{-t\mathbb{1}_V}$.*

Beweis: Wegen dem obigen Lemma existiert eine Hilbertnorm $\|\cdot\|_A$ auf V, so daß für die zugehörige Einheitssphäre $\mathbb{S}^{d-1}_A$ folgende Abbildung ein Homöomprphismus ist:

$$\hat{\Phi} : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^{d-1}_A \to V \setminus \{0\}, \quad (t, x) \mapsto e^{tA}x = \Phi(t, x).$$

Wir definieren eine Abbildung $\Psi : V \to V$ durch

$$\Psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } x = 0 \\ e^{-s}y & \text{wenn } x \neq 0 \text{ und } \hat{\Phi}(s, y) = x. \end{cases}$$

Wir zeigen dass Ψ eine topologische Flussäquivalenz von e^{tA} nach $e^{-t\mathbb{1}_V}$ ist. Dazu müssen wir zeigen, dass Ψ stetig und bijektiv ist, dass Ψ^{-1} stetig ist und dass $\Psi(e^{tA}x) = e^{-t}\Psi(x)$ für alle $x \in V$ und $t \in \mathbb{R}$ gilt. Wir zeigen zuerst die letzte Aussage. Sie gilt offenbar für $x = 0$. Sei also $x \neq 0$ und $\hat{\Phi}(s, y) = x$. Dann gilt $\hat{\Phi}(s + t, y) = e^{tA}x$. Also ist $\Psi(e^{tA}x) = e^{-t-s}y = e^{-t}\Psi(x)$. Damit ist die letzte Aussage gezeigt.

Wegen $\Psi(0) = 0$ genügt es die Bijektivität der Einschränkung von Ψ auf $V \setminus \{0\}$ zu zeigen. Diese Einschränkung ist die Verkettung der Umkehrabbildung von $\hat{\Phi}$ mit

$$\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{d-1}_A \to V \setminus \{0\}, \quad (s, y) \mapsto e^{-s}y.$$

Diese Abbildung hat wegen $\|e^{-s}y\|_A = e^{-s}\|y\|_A = e^{-s}$ die Umkehrabbildung

$$V \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \times \mathbb{S}^{d-1}_A, \quad x \mapsto (-\ln \|x\|_A, x/\|x\|_A).$$

Also ist die Einschränkung von Ψ auf $V \setminus \{0\}$ ein Homöomorphismus dieser Menge auf sich selber. Also müssen wir nur noch zeigen, dass Ψ und Ψ^{-1} bei 0 stetig sind. Weil alle Normen auf V äquivalent sind, genügt es die Stetigkeit bezüglich $\|\cdot\|_A$ zu zeigen. Für $\|x\|_A < \epsilon < 1$ gilt $s > 0$ weil sonst $1 = \|y\|_A = \|e^{-sA}x\|_A \leq e^{\alpha s}\|x\|_A < \epsilon < 1$ wegen Satz 2.7 (iii) gilt. Dann folgt die Stetigkeit von Ψ bei 0 aus

$$1 = \|y\|_A = \|e^{-sA}x\|_A \leq e^{s\|A\|_A}\epsilon \implies s \geq -\ln(\epsilon)/\|A\|_A \implies \|\Psi(x)\|_A \leq \epsilon^{1/\|A\|_A}.$$

Für $\|e^{-s}y\|_A < \epsilon < 1$ gilt $s = -\ln \|e^{-s}y\|_A > 0$ und mit Satz 2.7 (iii)

$$\|\Psi^{-1}(e^{-s}y)\|_A = \|e^{sA}y\|_A \leq e^{-\alpha s}\|y\|_A = \|e^{-s}y\|^{\alpha}_A < \epsilon^{\alpha}.$$

Das zeigt die Stetigkeit von Ψ^{-1} bei 0. **q.e.d.**

Nach diesen Vorbereitungen können wir den zentralen Klassifikationssatz für hyperbolische Flüsse beweisen. Dabei definieren wir für eine lineare Abbildung $A \in \mathcal{L}(V)$

$$m_-(A) = \sum_{\lambda \in \sigma_s(A)} m(\lambda) \qquad\qquad m_+(A) = \sum_{\lambda \in \sigma_u(A)} m(\lambda).$$

Satz 2.15. *Zwei hyperbolische lineare Flüsse e^{tA} und e^{tB} sind genau dann flußäquivalent, wenn $m_\pm(A) = m_\pm(B)$ gilt. Die Dimensionen der stabilen und instabilen Unterräume sind die einzigen Invarianten der Flußäquivalenz solcher Flüsse.*

Beweis: $\Leftarrow$: Wegen Satz 2.9 existiert eine direkte Summenzerlegung

$$V = V_s \oplus V_u, \quad e^{tA} = e^{tA_s} \oplus e^{tA_u}$$

mit $\dim(V_s) = m_-(A)$, derart, daß e^{tA_s} eine Kontraktion und e^{tA_u} eine Expansion sind. Aufgrund des Stabilitätskriteriums und dem vorangehenden Lemma existiert eine Flußäquivalenz Ψ_s zwischen e^{tA_s} und $e^{-t\mathbb{1}_{V_s}}$. Analog erhalten wir wegen $e^{tA_u} = e^{-t(-A_u)}$ eine Flußäquivalenz Ψ_u zwischen e^{tA_u} und $e^{t\mathbb{1}_{V_u}}$. Dann ist

$$\Psi_s \oplus \Psi_u : V_s \oplus V_u \to V_s \oplus V_u, \quad x \oplus y \mapsto \Psi_s(x) \oplus \Psi_u(y)$$

eine Flußäquivalenz zwischen $e^{tA} = e^{tA_s} \oplus e^{tA_u}$ und $e^{-t\mathbb{1}_{V_s}} \oplus e^{t\mathbb{1}_{V_u}}$.

Analog existieren eine direkte Summenzerlegung

$$F = F_s \oplus F_u, \quad e^{tB_s} \oplus e^{tB_u}$$

und eine Flußäquivalenz $\tilde{\Psi}_s \oplus \tilde{\Psi}_u$ zwischen $e^{-t\mathbb{1}_{F_s}} \oplus e^{t\mathbb{1}_{F_u}}$. Wegen $\dim V_s = \dim F_s$ und $\dim V_u = \dim F_u$ existieren ein Isomorphismen $T_s : V_s \to F_s$ und $T_u : V_u \to F_u$. Dann ist $T_s \oplus T_u$ eine Flußäquivalenz zwischen den Flüssen $e^{-t\mathbb{1}_{V_s}} \oplus e^{t\mathbb{1}_{V_u}}$ und $e^{-t\mathbb{1}_{F_s}} \oplus e^{t\mathbb{1}_{F_u}}$. Also folgt die Flußäquivalenz von e^{tA} und e^{tB} aus der Transitivität.

$\Rightarrow$: Ist Ψ eine Flußäquivalenz zwischen e^{tA} und e^{tB}, so folgt $\Psi[V_s] \subset F_s$ und $\Psi[V_u] \subset F_u$ aus

$$\Psi(e^{tA}x) = e^{tB}\Psi(x) \quad \text{für alle} \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times V,$$

weil der Homöomorphismus Ψ dann die Konvergenz für $t \to \infty$ und $t \to -\infty$ erhält. Aus Symmetriegründen gilt dann auch $\Psi^{-1}[F_s] \subset V_s$ und $\Psi^{-1}[F_u] \subset V_u$. Also bildet Ψ den Vektorraum V_s homöomorph auf den Vektorraum F_s ab. Nun folgt aus dem Gebietsvarianzsatz der Topologie (z.B. Dugundji), daß $\dim(F_s) = \dim(V_s)$ ist. Also erhalten wir $m_\pm(A) = m_\pm(B)$ aus der Eindeutigkeit der Zerlegung in Satz 2.9. **q.e.d.**

Bemerkung 2.16. (i) *Die topologische Klassifizierung linearer Flüsse e^{tA} mit $\sigma(A) \subset i\mathbb{R}$, d.h. mit $\sigma(A) = \sigma_n(A)$ ist ein ungelöstes Problem.*

(ii) *Man kann zeigen, daß die Menge der $A \in \mathcal{L}(V)$ mit $\sigma_n(A) = \emptyset$ offen und dicht in $\mathcal{L}(V)$ ist, d.h. die Eigenschaft, einen hyperbolischen Fluß zu erzeugen, ist eine generische Eigenschaft, sie kommt fast allen $A \in \mathcal{L}(V)$ zu. Folglich können wir mit dem vorangehenden Satz fast alle linearen Flüsse klassifizieren.*

Übungsaufgabe 2.17. (i) *Beschreiben Sie die Phasenporträts eines ebenen linearen Flusses in den im Text nicht behandelten Fällen (mindestens ein Eigenwert* 0*).*

(ii) *Beschreiben Sie die Phasenporträts des linearen Flusses* e^{tA} *mit* $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$*, d.h. des dreidimensionalen linearen Flusses, unter den verschiedenen möglichen Verteilungen der Eigenwerte von* A *in .*

(iii) *Veranschaulichen Sie sich das Phasenporträt des linearen Flusses* e^{tA} *mit* $A = \mathrm{diag}(\omega_1, -\omega_1, \omega_2, -\omega_2) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$.

(iv) *Beweisen Sie, daß* $\{A \in \mathcal{L}(V) | \sigma_n(A) = \emptyset\}$ *offen und dicht in* $\mathcal{L}(V)$ *ist.*

2.3 Prinzip der linearisierten Stabilität

Wir studieren zuerst die Stabilität autonomer linearer Differentialgleichungen.

Satz 2.18. *Es sei* $A \in \mathcal{L}(V)$*. Dann ist die Nulllösung der linearen Differentialgleichung* $\dot{x} = Ax$ *genau dann stabil, wenn* $\sigma_u(A) = \emptyset$ *und für* $\lambda \in \sigma_n(A)$ *die Einschränkung von* A *auf den Eigenraum* $V_\lambda = \{x \in V \mid (A - \lambda 1\!\!1_V)^{m(\lambda)} x = 0\}$ *diagonalisierbar ist.*

Die Nulllösung ist genau dann asymptotisch stabil, wenn $\mathrm{Re}\,\sigma(A) < 0$ *gilt.*

Beweis: Es sei $\alpha = \sup\{\|e^{tA}\| \mid t > 0\} < \infty$. Dann folgt für $\epsilon > 0$

$$\|e^{tA}x\| \le \|e^{tA}\| \cdot \|x\| < \epsilon \quad \text{für alle } (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times B(0, \tfrac{\epsilon}{\alpha}),$$

d.h. die Stabilität der Nulllösung. Weil alle Normen auf dem endlichdimensionalen Vektorraum V äquivalent sind, ist diese Beschränktheit von e^{tA} für $t > 0$ äquivalent zu der Beschränktheit von $\|e^{tA}x_i\|$ für $t > 0$ und eine Basis $x_1, \ldots, x_m$ von V. Wenn diese Norm für einen Basisvektor nicht beschränkt ist, dann ist umgekehrt 0 auch nicht stabil. Also ist 0 genau dann stabil, wenn alle Bahnkurven beschränkt sind.

Die Bahnkurven von $x \in V_\lambda$ mit $\lambda \in \sigma_s(A)$ konvergieren für $t \to \infty$ gegen 0, und sind für $x \in V_\lambda \setminus \{0\}$ mit $\lambda \in \sigma_u(A)$ unbeschränkt. Für $x \in V_\lambda \setminus \{0\}$ mit $\lambda \in \sigma_n(A)$ sind sie genau dann beschränkt, wenn sie keine Potenzen von t enthalten, also x echte Eigenvektoren von A sind. Daraus folgt die Charakterisierung der stabilen Flüsse. Die linearen asymptotisch stabilen Flüsse sind offenbar genau die Kontraktionen. **q.e.d.**

Als nächstes betrachten wir gestörte Systeme der Gestalt

$$\dot{x} = Ax + g(t, x),$$

wobei g eine in einem geeigneten Sinne kleine Störung ist. Genauer soll im Folgenden gezeigt werden, daß unter der Voraussetzung, dass es für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt mit

$$\|g(t, x)\| \le \epsilon \|x\| \quad \text{für alle} \quad x \in B(0, \delta)$$

gleichmäßig bzgl. t, das gestörte System nahezu dasselbe asymptotische Stabilitätsverhalten wie die ungestörte Linearisierung $\dot{x} = Ax$ besitzt.

Ist $g : \mathbb{R} \times V \to V$ eine stetige und in der zweiten Variablen lokal lipschitzstetig Funktion und $t \mapsto u(t)$ eine Lösung des gestörten Systems, dann ist u für $t_0 \in \mathbb{R}$ auch die eindeutig bestimmte Lösung des inhomogenen Anfaganswertproblems

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + g(t, u(t)) \qquad \text{mit } x(t_0) = u_0 = u(t_0).$$

Wegen Korollar 1.57 genügt u auch der nichtlinearen Integralgleichung

$$u(t) = e^{(t-t_0)A}u_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}g(s, u(s))ds.$$

Diese Integralgleichung ist die Grundlage für den folgenden – im wesentlichen auf Ljapunov zurückgehenden – Stabilitätssatz (sowie für zahlreiche Existenzbeweise im analogen Fall unendlichdimensionaler Evolutionsgleichungen, z.B. parabolische Systeme).

Satz 2.19 (Asymptotische Stabilität)**.** *Für* $A \in \mathcal{L}(V)$ *sei* $\operatorname{Re}\sigma(A) < 0$, $g \in C(\mathbb{R}\times V, V)$ *sei in der zweiten Variablen lokal lipschitzstetig und für alle* $\epsilon > 0$ *gibt es ein* $\delta > 0$ *mit*

$$\|g(t,x)\| \le \epsilon\|x\| \quad \textit{für alle } x \in B(0,\delta) \textit{ und alle } t \in \mathbb{R}.$$

Dann ist die Nulllösung von $\dot{x} = Ax + g(t,x)$ *asymptotisch stabil.*

Beweis: Es existieren positive Konstanten α und β mit $\|e^{tA}\| \le \beta e^{-\alpha t}$ für alle $t \ge 0$, wobei wir $\beta > 1$ annehmen dürfen. Also folgt die Abschätzung

$$\|u(t)\| \le \beta e^{-\alpha(t-t_0)}\|u_0\| + \beta \int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-s)}\|g(s,u(s))\|ds.$$

Es sei nun $\epsilon \in (0,\alpha)$ beliebig. Es existiert ein $\delta \in (0,\epsilon)$ mit

$$\|g(t,x)\| \le \frac{\epsilon}{\beta}\|x\| \quad \text{für } \|x\| \le \delta \text{ und } t \in \mathbb{R}.$$

Für $\|u_0\| < \frac{\delta}{\beta}$ und $t \ge t_0$ gilt dann entweder $\|u(t)\| < \delta < \epsilon$ und die Nulllösung ist asymptotisch stabil. Andernfalls gibt es $u_0 \in B(0, \frac{\delta}{\beta})$ und $\bar{t} \in (t_0, \infty)$ mit

$$\bar{t} = \inf\{t \in [t_0,\infty) \mid \|u(t)\| = \delta\}.$$

Dann folgt für $t_0 \le t \le \bar{t}$

$$\|u(t)\| \le \delta e^{-\alpha(t-t_0)} + \epsilon \int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-s)} \|u(s)\| ds \iff e^{\alpha(t-t_0)} \|u(t)\| \le \delta + \epsilon \int_{t_0}^{t} e^{\alpha(s-t_0)} \|u(s)\| ds.$$

Mithilfe von Lemma 1.60 erhalten wir die Abschätzung

$$e^{\alpha(t-t_0)} \|u(t)\| \le \delta + \epsilon\delta \int_{t_0}^{t} e^{\epsilon(t-s)} ds = \delta e^{\epsilon(t-t_0)} \qquad \text{für} \qquad t_0 \le t \le \bar{t}.$$

Daraus folgt $\delta = \|u(\bar{t})\| \le \delta e^{-(\alpha-\epsilon)(\bar{t}-t_0)} < \delta$, was unmöglich ist. Also ist die Nulllösung asymptotisch stabil. **q.e.d.**

Zum Beweis des entsprechenden Instabilitätssatzes benötigen wir das folgende

Lemma 2.20. *Für $A \in \mathcal{L}(V)$ gelte $\alpha < \operatorname{Re} \sigma(A) < \beta$. Dann existiert eine Hilbertnorm $\| \cdot \|$ auf V, so daß für das zugehörige bilineare innere Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$*

$$\alpha \|x\|^2 \le \operatorname{Re}\langle Ax, x\rangle \le \beta \|x\|^2 \quad \textit{für alle } x \in V \textit{ gilt.}$$

Beweis: Wir betrachten zuerst den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Wie in dem Beweis von Lemma 2.5 gezeigt, hat A die Form $A = D + N$ mit $D = \operatorname{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_m)$, wobei $\mu_1, \ldots, \mu_m$ die mit Vielfachheit gezählten Eigenwerte von A sind. Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es außerdem eine Hilbertnorm $\| \cdot \|$ auf V mit $\|N\| \le \epsilon$. Wir wählen $\epsilon > 0$ und $\| \cdot \|$ mit

$$\epsilon \le \min\{\beta - \max(\operatorname{Re} \sigma(A)), \min(\operatorname{Re} \sigma(A)) - \alpha\}.$$

Wegen $\langle Dx, x\rangle = \sum \mu_j |x_j|^2$, wobei $x_1, \ldots, x_m$ die Koordinaten von x bzgl. der (zur Konstruktion der Norm) verwendeten Orthonormalbasis sind, gilt

$$\min[\operatorname{Re} \sigma(A)] \|x\|^2 \le \operatorname{Re}\langle Dx, x\rangle \le \max[\operatorname{Re} \sigma(A)] \|x\|^2.$$

Da ferner $\operatorname{Re}\langle Ax, x\rangle = \operatorname{Re}\langle Dx, x\rangle + \operatorname{Re}\langle Nx, x\rangle$ und $|\operatorname{Re}\langle Nx, x\rangle| \le \|N\| \cdot \|x\|^2 \le \epsilon \|x\|^2$ ist, folgt die Behauptung aus der Wahl von ϵ und aus

$$\operatorname{Re}\langle Dx, x\rangle - \epsilon \|x\|^2 \le \operatorname{Re}\langle Ax, x\rangle \le \operatorname{Re}\langle Dx, x\rangle + \epsilon \|x\|^2.$$

Es sei nun $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Dann können wir das eben Bewiesene auf die Komplexifizierung $A_{\mathbb{C}}$ in $V_{\mathbb{C}}$ anwenden. Die Hilbertnorm $\| \cdot \|_{\mathbb{C}}$ auf $V_{\mathbb{C}}$ induziert (durch Restriktion auf $V \subset V_{\mathbb{C}}$)

eine Hilbertnorm $\|\cdot\|$ auf V (vgl. den Beweis von Lemma 2.5). Für die zugehörigen Skalarprodukte erhalten wir

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}\langle \xi, \eta\rangle_{\mathbb{C}} &= \frac{\|\xi+\eta\|_{\mathbb{C}}^2 - \|\xi-\eta\|_{\mathbb{C}}^2}{4} \quad \text{für alle } \xi,\eta \in V_{\mathbb{C}} \quad \text{bzw.} \\
\langle x, y\rangle &= \frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4} \quad \text{für alle } x, y \in V. \quad \text{Hieraus folgt} \\
\alpha\|x\|^2 = \alpha\|x\|_{\mathbb{C}}^2 &\le \operatorname{Re}\langle A_{\mathbb{C}}x, x\rangle_{\mathbb{C}} = \langle Ax, x\rangle \le \beta\|x\|_{\mathbb{C}}^2 = \beta\|x\|^2 \quad \text{für alle } x \in V.\mathbf{q.e.d.}
\end{aligned}$$

Satz 2.21 (Instabilität). *Der Operator $A \in \mathcal{L}(V)$ besitze mindestens einen Eigenwert mit positivem Realteil, $g \in C(\mathbb{R}\times V, V)$ sei in der zweiten Variablen lokal lipschitzstetig und für alle $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit*

$$\|g(t,x)\| \le \epsilon\|x\| \quad \textit{für alle } x \in B(0,\delta) \textit{ und alle } t \in \mathbb{R}.$$

Dann ist die Nulllösung der gestörten Gleichung $\dot{x} = Ax + g(t,x)$ instabil.

Beweis: Nach Voraussetzung ist das instabile Spektrum $\sigma_u(A)$ nicht leer. Folglich existiert ein α mit $0 < \alpha < \operatorname{Re}\sigma_u(A)$. Wegen $\sigma(A - \alpha\mathbb{1}_V) = \sigma(A) - \alpha$ ist das neutrale Spektrum $\sigma_n(A_\alpha)$ von $A_\alpha = A - \alpha\mathbb{1}_V$ leer und A_α erzeugt einen hyperbolischen linearen Fluß e^{tA_α}. Wegen Satz 2.9 gibt es eine direkte Summenzerlegung $V = V_- \oplus V_+$, welche A_α in $A_\alpha = (A_\alpha)_- \otimes (A_\alpha)_+$ zerlegt, so daß $\sigma_s(A_\alpha) = \sigma((A_\alpha)_-)$ und $\sigma_u(A_\alpha) = \sigma((A_\alpha)_+)$ gelten. Offensichtlich zerlegt diese Zerlegung auch den Operator A, $A = A_- \oplus A_+$, und $\sigma(A_+) = \sigma_u(A)$ sowie $\sigma(A_-) = \sigma_s(A) \cup \sigma_n(A)$. Es gilt also $\operatorname{Re}\sigma(A_-) \le 0$ und $\operatorname{Re}\sigma(A_+) > \alpha > 0$ für das obige $\alpha > 0$. Wir wählen nun $\beta \in (0,\alpha)$ fest. Dann existieren nach Lemma 2.5 Hilbertnormen $\|\cdot\|_+$ auf V_+ und $\|\cdot\|_-$ auf V_- so daß

$$\operatorname{Re}\langle A_-x_-, x_-\rangle_- \le \beta\|x_-\|_-^2 \quad \text{für } x_- \in V_-, \quad \operatorname{Re}\langle A_+x_+, x_+\rangle_+ \ge \alpha\|x_+\|_+^2 \quad \text{für } x_+ \in V_+$$

gilt. Offensichtlich wird durch

$$\langle x_- + x_+, y_- + y_+\rangle = \langle x_-, y_-\rangle_- + \langle x_+, y_+\rangle_+$$

ein inneres Produkt auf $V = V_- \oplus V_+$ definiert und somit eine Norm $\|\cdot\|$ mit

$$\|x\|^2 = \|x_- + x_+\|^2 = \|x_-\|_-^2 + \|x_+\|_+^2 \quad \text{für alle } x = x_- + x_+ \in V.$$

Schließlich setzen wir

$$\Psi(x) = \frac{\|x_+\|^2 - \|x_-\|^2}{2} = \frac{\|Px\|^2 - \|Qx\|^2}{2} \quad \text{für alle } x \in V,$$

wobei $P : V \to V_+$ und $Q : V \to V_-$ die natürlichen Projektionen sind, und $\gamma = \frac{\alpha-\beta}{4}$. Dann existiert ein $\delta > 0$ mit

$$\|g(t,x)\| \leq \gamma\|x\| \quad \text{für} \quad \|x\| \leq \delta.$$

Es sei u eine Lösung mit $\|u(0)\| < \delta$ und $\Psi(u(0)) > 0$. Dann erfüllt $\varphi(t) = \Psi(u(t))$

$$\begin{aligned}
\dot{\varphi}(t) &= \operatorname{Re}\langle Pu(t), P\dot{u}(t)\rangle - \operatorname{Re}\langle Qu(t), Q\dot{u}(t)\rangle \\
&= \operatorname{Re}\langle u_+(t), A_+u_+(t)\rangle - \operatorname{Re}\langle u_-(t), A_-u_-(t)\rangle \\
&\qquad\qquad + \operatorname{Re}\langle Pu(t), Pg(t,u(t))\rangle - \operatorname{Re}\langle Qu(t), Qg(t,u(t))\rangle \\
&\geq \alpha\|Pu(t)\|^2 - \beta\|Qu(t)\|^2 - \gamma\|P\|\cdot\|Pu(t)\|\cdot\|u(t)\| - \gamma\|Q\|\cdot\|Qu(t)\|\cdot\|u(t)\|
\end{aligned}$$

für $t \geq 0$ mit $\|u(t)\| \leq \delta$. Dann gilt für alle $x \in V$

$$\|Px\| \leq \|x\|, \qquad \|P\| \leq 1, \qquad \|Qx\| \leq \|x\|, \qquad \|Q\| \leq 1,$$

$$\dot{\varphi}(t) \geq \alpha\|Pu(t)\|^2 - \beta\|Qu(t)\|^2 - \gamma(\|Pu(t)\| + \|Qu(t)\|)\|u(t)\|.$$

Für kleine $t \geq 0$ folgt $\varphi(t) = \Psi(u(t)) \geq 0$ aus $\varphi(0) > 0$ und damit auch

$$\|Qu(t)\| \leq \|Pu(t)\| \qquad\qquad \|u(t)\| \leq 2\|Pu(t)\|.$$

Also erhalten wir

$$\dot{\varphi}(t) \geq (\alpha - 4\gamma)\|Pu(t)\|^2 - \beta\|Qu(t)\|^2 = 2\beta\varphi(t)$$

für alle $t \geq 0$ mit $\|u(t)\| \leq \delta$ und $\varphi(t) \geq 0$. Durch Integration folgt

$$\varphi(t) \geq \varphi(0)e^{2\beta t}$$

für die obigen Werte von t. Hieraus liest man insbesondere ab, daß $\varphi(t) > 0$ für alle $t \geq 0$ mit $\|u(t)\| \leq \delta$ gilt. Mit anderen Worten: keine Lösung mit Anfangswert in $B(0,\delta) \cap \Psi^{-1}[0,\infty)$ verläßt den "Doppelkegel" $\Psi^{-1}[0,\infty)$, bevor sie den Ball $\overline{B(0,\delta)}$ verläßt. Also erreicht jede Lösung mit von Null verschiedenem Anfangswert in $B(0,\delta) \cap \Psi^{-1}[0,\infty)$ den Rand von $B(0,\delta)$, was die Instabilität der Nulllösung beweist. **q.e.d.**

Als Korollar der beiden vorangehenden Sätze erhalten wir das folgende Prinzip der linearisierten Stabilität für kritische Punkte autonomer Differentialgleichungen. Dieses fundamentale Prinzip ist eines der bekanntesten Stabilitäts- bzw. Instabilitätskriterien, das besonders in den angewandten Naturwissenschaften unzählige Anwendungen hat.

Korollar 2.22. *Es sei $f \in C^1(X,V)$ mit $f(x_0) = 0$. Gilt dann $\operatorname{Re}\sigma(f'(x_0)) < 0$, so ist der kritische Punkt x_0 der autonomen Differentialgleichung $\dot{x} = f(x)$ asymptotisch stabil. Hat $f'(x_0)$ einen Eigenwert λ mit $\operatorname{Re}\lambda > 0$, so ist x_0 instabil.*

Beweis: Mit $A = f'(x_0) \in \mathcal{L}(V)$ und $g(y) = f(y + x_0) - f'(x_0)y$ gibt es für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass $\|g(y)\| \leq \epsilon\|y\|$ für $y \in B(0, \delta)$ gilt und $\dot{y} = f(y + x_0) = Ay + g(y)$. Also folgt die Behauptung unmittelbar aus den beiden vorangehenden Sätzen. **q.e.d.**

Bemerkung 2.23. **(i)** *Der Satz macht keine Aussagen über das Stabilitätsverhalten im Fall $\sigma_n(f'(x_0)) \neq \emptyset$. In diesem Fall hängt das Stabiltätsverhalten von den Termen höherer Ordnung ab. Um dies zu sehen, betrachten wir das System*

$$\dot{x} = -y + x^3$$
$$\dot{y} = x + y^3$$

mit $(0, 0)$ als einzigen kritischen Punkt, der ein Zentrum für die Linearisierung ist. Für $r^2 = x^2 + y^2$ folgt $r\dot{r} = x\dot{x} + y\dot{y} = -xy + x^4 + xy + y^4 = x^4 + y^4$, also

$$\dot{r} = \frac{x^4 + y^4}{r} \geq \frac{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}{2r} = \frac{r^3}{2} \text{ für } r > 0.$$

Folglich ist $\frac{d}{dt}\frac{1}{r^2} < -1$ und die Orbits laufen von $(0, 0)$ weg, d.h. $(0, 0)$ ist instabil.

Das System

$$\dot{x} = -y - x^3$$
$$\dot{y} = x - y^3$$

hat dieselbe Linearisierung im kritischen Punkt $(0, 0)$. Nun folgt $\dot{r} = -\frac{x^4+y^4}{r} < 0 \leq -\frac{r^3}{2}$ und $\frac{d}{dt}\frac{1}{r^2} > 1$ für $r > 0$. Folglich “laufen die Orbits nach $(0, 0)$ hinein”, d.h. $(0, 0)$ ist sogar asymptotsich stabil. Es ist leicht zu sehen, daß das Phasenporträt bei allgemeineren Störungen höherer Ordnung wesentlich komplizierter aussehen kann.

(ii) *Das zentrale Stabilitätsresultat in dem Satz ist eine lokale Aussage. Es enthält keine Angaben über den Einzugsbereich eines asymptotisch stabilen kritischen Punktes. Einige Aussagen in dieser Richtung werden wir in den folgenden Abschnitten kennenlernen.*

(iii) *Der Beweis gilt auch für lokal lipschitzstetiges in x_0 differenzierbares $f \in C(X, V)$.*

(iv) *Unter geeigneten Voraussetzungen an den Evolutionsoperator A der nichtautonomen linearen Gleichung $\dot{x} = A(t)x$ lassen sich verwandte Resultate auch für gestörte nichtautonome Gleichungen*

$$\dot{x} = A(t) + g(t, x)$$

beweisen. Da solche Voraussetzungen in praktischen Fällen jedoch kaum zu verifizieren sind, werden wir uns im Folgenden in erster Linie mit dem besonders wichtigen Fall autonomer Gleichungen befassen.

(v) *Um die obigen Stabilitätssätze praktisch anwenden zu können, benötigt man Kriterien, welche es erlauben festzustellen, ob $\mathrm{Re}\,\sigma(A) < 0$ gilt. Da die Eigenwerte die Nullstellen des charakteristischen Polynoms*

$$det(\lambda - A) = \lambda^m + a_1\lambda^{m-1} + a_2\lambda^{m-2} + \ldots + a_{m-1}\lambda + a_m$$

sind ($dim(V) = m$)), möchte man möglichst aus den Koeffizienten eines Polynoms ablesen, ob alle Wurzeln in der negativen Halbebene liegen. Es gibt eine Reihe von Kriterien dieser Art. Das bekannteste ist das folgende Routh-Hurwitz-Kriterium:

Satz 2.24 (Routh-Hurwitz Kriterium). *Sämtliche Nullstellen eines reellen Polynoms $p(z) = z^m + a_1 z^{m-1} + \ldots + a_{m-1} z + a_m$ vom Grand m besitzen genau dann negativen Relateil, wenn die Matrizen $H_1, \ldots, H_m$ positive Determinante haben. Dabei ist*

$$H_k = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \ldots & \ldots & a_{2k-1} \\ 1 & a_2 & a_4 & \ldots & \ldots & a_{2k-2} \\ 0 & a_1 & a_3 & \ldots & \ldots & a_{2k-3} \\ & 1 & a_2 & a_4 & \ldots & a_{2k-4} \\ & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & & & & \vdots & \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad a_j = 0 \text{ für } j > m.$$

Siehe Abschnitt 16.6 in "Matrizentheorie" von F.R. Gantmacher.

2.4 Die direkte Methode von Ljapunov

In diesem Abschnitt führen wir eine Methode ein um die lokale und globale asymptotische Stabilität zu zeigen. Diese Methode benutzt sogenannte Ljapunovfunktionen.

Definition 2.25 (Ljapunovfunktionen). *Sei $\Phi : W \to X$ ein lokaler Fluss auf einem metrischen Raum X. Dann heit $L : X \to \mathbb{R}$ Ljapunovfunktion, wenn $L(\Phi(t,x)) \leq L(x)$ für alle $(t,x) \in W$ mit $t > 0$ gilt. Wenn sogar $L(\Phi(t,x)) < L(x)$ für alle $(t,x) \in W$ mit $t > 0$ und $\Phi(t,x) \neq x$ gilt, dann heißt L strikte Ljapunovfunktion.*

Wegen der Bedingung (ii) eines lokalen Flusses ist L genau dann eine Ljapunovfunction, wenn $t \mapsto L(\Phi(t,x))$ für alle $x \in X$ monoton fallend ist. Für ein lokal lipschitzstetiges Vektorfeld $F : X \to V$ auf einer offene Teilmenge X eines Banachraumes V heißt L dann Ljapunovfunktion, wenn es eine Ljapunovfunktion für den ensprechenden lokalen Fluss Φ_F ist. Weil jede Integralkurve $t \mapsto \Phi_F(t,x)$ von F stetig differenzierbar ist, ist $t \mapsto L(\Phi_F(t,x))$ differenzierbar, wenn L differenzierbar ist. Deshalb ist eine differenzierbare Funktion L genau dann eine Ljapunovfunktion zu F, wenn

$$\nabla L(x) \cdot F(x) \leq 0 \qquad \text{für alle } x \in U$$

gilt. Wenn für nicht konstante Integralkurven keine Gleichheit gilt, dann ist L solgar eine strikte Ljapunovfunktion. Allerdings ist das nur eine hinreichende und keine notwendige Bedingung für eine differenzierbare Funktion $L : X \to \mathbb{R}$, damit L eine strikte Ljapunovfunktion ist. Wir können Ljapunovfunktionen auch durch die positive Invarianz aller Mengen $L^{-1}[(-\infty, y)]$ mit $y \in \mathbb{R}$ charakterisieren:

Definition 2.26. *Für einen lokalen Fluss $\Phi : W \to X$ auf dem metrischen Raum X heißt eine Teilmenge $A \subset X$ positiv bzw. negativ invariant, wenn $\Phi(t, x) \in A$ für alle $(t, x) \in W \cap ((0, \infty) \times A)$ bzw. $W \cap ((-\infty, 0) \times A)$ gilt. Sie heißt invariant, wenn sie positiv und negativ invariant ist, also $\Phi(t, x) \in A$ für alle $(t, x) \in W \cap (\mathbb{R} \times A)$ gilt.*

Im Folgenden werden wir Grenzwerte von Folgen $(\Phi(t_n, x))_{n\in\mathbb{N}}$ mit $t_n \to \infty$ betrachtet. Die Menge solcher Grenzwerte wird als Limesmenge bezeichnet:

Definition 2.27 (Limesmengen)**.** *Für einen lokalen Fluss $\Phi : W \to X$ und $x \in X$ heißen die Mengen $\omega^{\pm}(x)$ aller Grenzwerte von Folgen $(\Phi(t_n, x))_{n\in\mathbb{N}}$ mit $t_n \to \pm\infty$ und $\{(t_n, x) \mid n \in \mathbb{N}\} \subset W$ Limesmengen von x*

Offenbar sind $\omega^{\pm}(x)$ leer, wenn W nicht $(0, \infty) \times \{x\}$ bzw. $(-\infty, 0) \times \{x\}$ enthält.

Lemma 2.28. *Die Limesmengen $\omega^{\pm}(x)$ eines stetigen lokalen Flusses sind abgeschlossene invariante Mengen.*

Beweis: Sei y im Abschluss von $\omega^{\pm}(x)$. Dann gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $y_n \in \omega^{\pm}(x)$ mit $d_X(y_n, y) < \frac{1}{n}$ und ein $t_n > n$ bzw. $t_n < -n$ mit $d_X(\Phi(t_n, x), y_n) < \frac{1}{n}$. Dann konvergiert $(\Phi(t_n, x))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $y \in \omega^{\pm}(x)$. Also ist $\omega^{\pm}(x)$ abgeschlossen.

Wegen der Stetigkeit von Φ konvergiert $\Phi(t + t_n, x) = \Phi(t, \Phi(t_n, x)$ gegen $\Phi(t, y)$, wenn $(\Phi(t_n, x))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen y konvergiert. Deshalb ist $\omega^{\pm}(x)$ invariant. **q.e.d.**

Lemma 2.29. *Wenn $\{\Phi(t, x) \mid t \in [0, \infty)\}$ bzw. $\{\Phi(t, x) \mid t \in (-\infty, 0]\}$ in einer kompakten Menge K enthalten ist, dann ist $\omega^{+}(x)$ bzw. $\omega^{-}(x)$ nichtleer, kompakt und zusammenhängend. Der Grenzwert $\lim_{t\to\pm\infty} \inf_{y\in\omega^{\pm}(x)} d_X(\Phi(t, x), y)$ ist dann Null.*

Beweis: Unter den Bedingungen des Lemmas enthält W genau wie im Beweis von Satz 1.37 zunächst $(-\epsilon, \epsilon)\times K$ und dann $[0, \infty)\times\{x\}$ bzw. $(-\infty, 0]\times\{x\}$. Für jede Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $t \to \pm\infty$ besitzt die Folge $(\Phi(t_n, x))_{n\in\mathbb{N}}$ dann eine konvergente Teilfolge. Also ist $\omega^{\pm}(x)$ nicht leer. Als abgschlossene Teilmenge von K ist $\omega^{\pm}(x)$ auch kompakt.

Wenn $\omega^{\pm}(x)$ nicht zusammenhängend ist, dann zerfällt es in eine disjunkte Vereinigung von zwei abgschlossenen Mengen $\omega^{\pm}(x) = A \cup B$. Der Abstand $d_X(a, b)$ hat auf der kompakten Menge $(a, b) \in A \times B$ einen Minimalabstand $\delta > 0$. Seien

$$O = \bigcup_{a\in A} B(a, \tfrac{\delta}{2}), \qquad\qquad U = \bigcup_{b\in B} B(b, \tfrac{\delta}{2}).$$

disjunkte offenen Umgebungen von A und B. Wir wählen eine streng monotone Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ positiver bzw. negativer Zeitpunkte mit $t_n \to \pm\infty$, so das $\Phi(t_n, x)$ abwechselnd in O und in U liegt. Dann gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein s_n zwischen t_n und t_{n+1}, so dass $\Phi(s_n, x)$ weder in U noch in O liegt. Die Folge $(\Phi(s_n, x))_{n\in\mathbb{N}}$ in K hat dann auch eine konvergente Teilfolge, dessen Grenzwert in $K \setminus (O \cup U)$ liegt, im Widerspruch zu der Annahme, dass $\omega^{\pm}(x)$ nicht zusammenhängend ist.

Wenn $\inf_{y \in \omega^{\pm}(x)} d_X(\Phi(t_n, x), y)$ für eine Folge $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $t \to \pm\infty$ durch eine positive Zahl nach unten beschränkt ist, dann kovergiert eine Teilfolge von $(\Phi(t_n, x))_{n \in \mathbb{N}}$ gegen ein $y \in \omega^{\pm}(x)$. Das widerspricht der Annahme, dass $\inf_{y \in \omega^{\pm}(x)} d_X(\Phi(t_n, x), y)$ durch eine positive Zahl nach unten beschränkt ist. Also sind alle Häufungspunkte von $\inf_{y \in \omega^{\pm}(x)} d_X(\Phi(t_n, x), y)$ Null, und alle solchen Folgen konvergieren gegen Null. **q.e.d.**

Satz 2.30. *Sei $\Phi : W \to X$ ein stetiger lokaler Fluss und $L : X \to \mathbb{R}$ eine stetige Ljapunovfunktion. Dann ist L auf $\omega^+(x)$ konstant.*

Beweis: Seien $y, z \in \omega^+(x)$. Dann gibt es zwei streng monoton wachsende Folgen $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $t_n \to \infty$, $s_n \to \infty$ und $t_n < s_n < t_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so dass $(\Phi(t_n, x))_{n \in \mathbb{N}}$ gegen y und $(\Phi(s_n, x))_{n \in \mathbb{N}}$ gegen z konvergiert. Weil L stetig ist, konvergieren die Folgen $(L(\Phi(t_n, x)))_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $L(y)$ und $(L(\Phi(s_n, x)))_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $L(z)$. Aus der Monotonie von $t \mapsto L(\Phi(t, x))$, folgt $L(y) \geq L(z) \geq L(y)$. **q.e.d.**

In bestimmten Fällen kann man mit Ljapunovfunktionen die Stabilität oder asymptotische Stabilität eines Fixpunktes eines lokalen Flusses zeigen. Im Folgenden sei $\Phi : W \to X$ ein lokaler stetiger Fluss auf einer offenen Teilmenge X eines endlichdimensionalen Banachraumes V und $x_0 \in X$ ein Fixpunkt von Φ. Außerdem sei $L : X \to \mathbb{R}$ eine stetige Ljapunovfunktion mit $L(x) > L(x_0)$ für alle $x \in X \setminus \{x_0\}$. Wir definieren S_ϵ als die Zusammenhangskomponente von $L^{-1}[(-\infty, L(x_0) + \epsilon)]$, die x_0 enthält.

Lemma 2.31. *Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit $S_\delta \subset B(x_0, \epsilon)$ und $B(x_0, \delta) \subset S_\epsilon$.*

Beweis: Sei die erste Behauptung für ein hinreichend kleines $\epsilon > 0$ falsch, so dass der in V abgeschlossene Ball $\overline{B(0, \epsilon)}$ in X enthalten ist. Dann dann gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in S_{1/n} \setminus B(x_0, \epsilon)$. Weil $S_{1/n}$ zusammenhängend sind und x_0 enthalten, sind auch $\{\|x - x_0\| \mid x \in S_{1/n}\}$ zusammenhängend und enthalten 0. Also können wir o.B.d.A. $\|x_n - x_0\| = \epsilon$ annehmen. Weil V endlichdimensional ist $\partial B(x_0, \epsilon)$ in V und damit auch in X kompakt, und eine Teilfolge von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen $y \in \partial B(x_0, \epsilon) \subset X$. Wegen der Stetigkeit von L konvergiert $L(x_n) \in [L(x_0), L(x_0) + \frac{1}{n}]$ im Grenzwert $n \to \infty$ gegen $L(y) = L(x_0)$, was $L(x) \neq L(x_0)$ für $x \in U \setminus \{x_0\}$ widerspricht.

Wenn die zweite Behauptung für ein $\epsilon > 0$ nicht gilt, dann konvergiert eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ im Komplement von S_ϵ gegen x_0. Die Menge $L^{-1}[(-\infty, L(x_0) + \epsilon)]$ ist in X und in V offen, und deshalb lokal zusammenhängend. Dann ist ihre Zusammenhangskomponente S_ϵ von x_0 offen, und in $X \setminus S_\epsilon$ konvergiert keine Folge gegen x_0. **q.e.d.**

Korollar 2.32. *In der Situation von dem Lemma 2.31 ist x_0 stabil.*

Beweis: Für $\epsilon > 0$ gibt es wegen dem Lemma ein $\delta > 0$ mit $S_\delta \subset B(x_0, \epsilon)$ und ein $\tilde{\delta} > 0$ mit $B(x_0, \tilde{\delta}) \subset S_\delta$. Für alle $x \in S_\delta$ ist $\{\Phi(t, x) \mid t \geq 0\}$ als zusammenhängende

Teilmenge von $L^{-1}[(-\infty, L(x_0+\delta]]$ in S_δ enthalten. Deshalb ist S_δ positiv invariant, und alle Orbits von Startpunkten in $B(x_0,\tilde{\delta})$ bleiben in S_δ und damit in $B(x_0,\epsilon)$.**q.e.d.**

Satz 2.33. *Sei $x_0 \in X$ ein Fixpunkt eine stetigens lokalen Flusses $\Phi : W \to X$ auf einer offenen Teilmenge X eines endlichdimensionalen Banachraumes und $L : X \to \mathbb{R}$ eine stetige Ljapunovfunktion mit $L(x) > L(x_0)$ für $x \in X \setminus \{x_0\}$. Dann ist x_0 stabil. Ist L außerdem auf keiner Bahnkurve in $X \setminus \{x_0\}$ konstant, so ist x_0 asymptotisch stabil. Sind außerdem die Mengen $L^{-1}[(-\infty, y]]$ für alle $y \geq L(x_0)$ kompakt, dann ist x_0 global asymptotisch stabil, d.h. $\lim_{t\to\infty} \Phi(t,x) = x_0$ für alle $x \in X$.*

Beweis: Wir haben schon gezeigt, dass x_0 stabil ist. Wegen Lemma 2.31 sind für kleine $\epsilon > 0$ die Mengen S_ϵ in einer kompakten Menge K enthalten und positiv invariant. Wie in dem Beweis von Lemma 2.29 enthält W dann $[0,\infty) \times S_\epsilon$. Sei $B(x_0,\delta) \subset S_\epsilon$. Für jedes $x \in B(x_0,\delta)$ und jede Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$ konvergiert dann eine Teilfolge von $(\Phi(t_n,x))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen ein $y \in S_\epsilon$. Wegen Lemma 2.28 liegt $\Phi(t,y)$ in $\omega^+(x)$ und L ist wegen Satz 2.30 auf der Bahnkurve durch y konstant. Weil L auf keiner Bahnkurve in $U \setminus \{x_0\}$ konstant ist, folgt $y = x_0$. Dann hat $(\Phi(t_n,x))_{n\in\mathbb{N}}$ für jede solche Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $t_n \to \infty$ nur den Häufungspunkt x_0 und $\Phi(t,x)$ konvergiert im Grenzwert $t \to \infty$ gegen x_0

Wenn die Mengen $L^{-1}[(-\infty, f(x)]]$ für alle $x \in X$ kompakt sind, gilt dieselbe Argumentation für jedes $x \in X$. **q.e.d.**

2.5 Linearisierungen

In diesem Abschnitt sind $(V, \|\cdot\|)$ ein endlichdimensionaler Banachraum, $X \subset V$ eine offene Teilmenge und $f \in C^1(X,V)$. Wir wollen den von f erzeugten Fluß Φ in der Nähe eines kritischen Punktes x_0 in Situationen studieren, in denen das Prinzip der linearisierten Stabilität Korollar 2.22 nur aussagt, dass der kritische Punkt nicht asymptotische stabil ist. Wir werden sehen, dass für jeden kritischen Punkt x_0, an dem die Linearisierung $f'(x_0)$ einen hyperbolischen Fluss erzeugt, diese Linearisierung das Langzeitverhalten des Flusses in einer Umgebung von x_0 beschreibt: d.h. in der Nähe von x_0, der Fluß Φ flußäquivalent zum linearen Fluß $e^{tf'(x_0)}$ ist, und die Sattelpunktstruktur qualitativ erhalten bleibt. Im folgenden Abschnitt werden wir dann präzise Aussagen über die “stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten” W_s und W_u herleiten.

Sind X und Y metrische Räume und $\Phi : W \to X$ sowie $\tilde{\Phi} : \tilde{W} \to Y$ Flüsse auf X bzw. Y, so sagen wir, Φ ist in $x_0 \in X$ zu $\tilde{\Phi}$ in $y_0 \in Y$ (lokal) C^k-flußäquivalent, oder kurz: $\Phi|x_0$ ist zu $\tilde{\Phi}|y_0$ C^k-flußäquivalent, $0 \leq k \leq \infty$, wenn es Umgebungen U von x_0 und V von y_0 gibt, derart, daß der von Φ auf U (durch Restriktion) induzierte lokale Fluß zu dem von $\tilde{\Phi}$ auf V induzierten lokalen Fluß C^k-flußäquivalent ist.

Im Folgenden sei $\Phi_f : W \to X$ stets der von f auf X erzeugte Fluß. Wir wollen den Fluß in der Nähe eines hyperbolischen kritischen Punktes x_0 studieren. Hierbei heißt der kritische Punkt x_0 des von f erzeugten Flusses hyperbolisch, wenn $\sigma_n(f'(x_0)) = \emptyset$ ist, d.h. wenn der lineare Fluß $e^{tf'(x_0)}$ hyperbolisch ist.

Es besteht ein enger Zusammenhang zwischen Flüssen und Homöomorphismen. Nach Lemma1.32 ist nämlich $\Phi(t, \cdot)$ für jedes $t \in \mathbb{R}$ ein lokaler Homöomorphismus. Insbesondere ist für den linearen Fluß e^{tA} für jedes $t \in \mathbb{R}$ ein Automorphismus von V. Aus diesen Gründen ist es sinnvoll (und für Anwendungen auf andere Probleme nützlich), zuerst den Fall von Homöomorphismen zu betrachten. Zur Motivierung der folgenden Definition beweisen wir zuerst den folgenden Spezialfall des Spektralabbildungssatzes.

Lemma 2.34. *Für $A \in \mathcal{L}(V)$ gilt $\sigma(e^A) = e^{\sigma(A)} = \{e^\lambda | \lambda \in \sigma(A)\}$.*

Beweis: Wegen $\sigma(A) = \sigma(A_\mathbb{C})$ können wir - durch Übergang zur Komplexifizierung - annehmen, daß V ein komplexer Banachraum ist. Sind dann $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ die paareweise verschiedenen Eigenwerte von A, so besitzt V die direkte Summenzerlegung $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_k$, die sowohl A als auch e^A reduziert. Es genügt also, $\sigma(e^{A_j}) = e^{\sigma(A_j)}$ mit $A_j = A|_{V_j}$ für $j = 1, \ldots, k$ zu beweisen. Wir können somit annehmen, daß $\sigma(A) = \{\lambda\}$ und $A = \lambda \mathbb{1}_V + N$ mit einem nilpotenten Operator $N \in \mathcal{L}(V)$ gilt. Es gibt folglich ein $x \in V \setminus \{0\}$ mit $Ax = \lambda x$, d.h. $Nx = 0$. Hieraus folgt

$$e^A x = e^\lambda e^N x = e^\lambda x,$$

d.h. $\sigma(e^A) \supset e^{\sigma(A)}$. Gilt umgekehrt $e^A y = \mu y$ für ein $\mu \in \mathbb{C}$ und $y \in V \setminus \{0\}$, so folgt

$$\mu y = e^\lambda e^N y = e^\lambda \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} N^k y.$$

Dann gibt es einen kleinsten Index l mit $0 \leq l \leq m$ und $N^{l+1} y = 0$. Durch Anwenden von N^l auf obige Gleichung erhalten wir

$$\mu N^l y = e^\lambda N^l y,$$

also $\mu = e^\lambda$ wegen $N^l y \neq 0$, was $\sigma(e^a) \subset e^{\sigma(A)}$ impliziert. **q.e.d.**

Es sei nun $A \in \mathcal{L}(V)$, und A erzeuge einen hyperbolischen linearen Fluß e^{tA}, d.h. $\sigma_n(A) = \sigma(A) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$. Dann folgt aus dem vorangehenden Lemma, daß $\sigma(e^A) \cap \mathbb{S}^1 = \emptyset$ gilt, wobei $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ die Einheitskreislinie der komplexen Ebene ist. Mit anderen Worten $e^A \in \mathcal{L}(V)$ besitzt keine Eigenwerte vom Betrag 1. Allgemein heißt ein $T \in \mathcal{L}(V)$ hyperbolisch, wenn T keine Eigenwerte vom Betrag 1 besitzt, d.h. wenn $\sigma(T) \cap \mathbb{S}^1 = \emptyset$ gilt. Ist $T \in \mathcal{L}(V)$ hyperbolisch, so gilt

$$\begin{aligned} \sigma(T) &= \sigma_0(T) \cup \sigma_\infty(T) && \text{mit} \\ \sigma_0(T) &= \{\lambda \in \sigma(T) \mid |\lambda| < 1\} && \sigma_\infty(T) = \{\lambda \in \sigma(T) \mid |\lambda| > 1\}. \end{aligned}$$

Bezeichnen wir wieder mit $m(\lambda)$ die algebraische Multiplizität des Eigenwertes $\lambda \in \sigma(T)$, dann sind für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

$$V_0 = \bigoplus_{\lambda \in \sigma_0(T)} \{x \in V \mid (\lambda - T)^{m(\lambda)} x = 0\} \quad V_\infty = \bigoplus_{\lambda \in \sigma_\infty(T)} \{x \in V \mid (\lambda - T)^{m(\lambda)} x = 0\}.$$

invariante Untervektorräume von V, die T reduzieren, d.h.

$$V = V_0 \oplus V_\infty \quad \text{ und } T = T_0 \oplus T_\infty \quad \text{ und } \sigma(T_0) = \sigma_0(T) \quad \text{ und } \sigma(T_\infty) = \sigma_\infty(T).$$

Ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, so wenden wir diese Zerlegung auf die Komplexifizierung an und restringieren anschließend auf die reellen Teilräume, d.h.

$$V_0 = (V_\mathbb{C})_0 \cap V \quad \text{ und } V_\infty = (V_\mathbb{C})_\infty \cap V \quad \text{ sowie } T_0 = (T_\mathbb{C})_0|_{V_0} \quad \text{ und } T_\infty = (T_\mathbb{C})_\infty|_{V_\infty}.$$

Dann verifiziert man leicht, daß die Relationen auch im reellen Fall gelten.

Das folgende Lemma stellt ein Analogon zu Lemma 2.5 dar. Zur einfacheren Formulierung verwenden wir die vereinfachende Schreibweise

$$|\sigma(A)| < \alpha \Leftrightarrow |\lambda| < \alpha \quad \text{ für alle } \lambda \in \sigma(A).$$

Andere Ungleichungen sind analog zu interpretieren.

Lemma 2.35. *Es sei $T \in \mathcal{L}(V)$ invertierbar und hyperbolisch, und für $\alpha \in (0,1)$ gelte*

$$|\sigma(T_0)| < \alpha \text{ und } |\sigma((T_\infty)^{-1})| < \alpha.$$

Dann gibt es eine Hilbertnorm $\|\cdot\|$ auf V so daß V_0 und V_∞ orthogonal sind und mit

$$\max\{\|T_0\|, \|(T_\infty)^{-1}\|\} \leq \alpha.$$

Beweis: Wegen $\|A_\mathbb{C}\| = \|A\|$ (vgl. den Beweis von Lemma 2.5 können wir o.B.A. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ annehmen. Nach dem Beweis von Lemma 2.5 wissen wir dann, daß $T_0 = D + N$ ist, mit einem nilpotenten Operator $N \in \mathcal{L}(V_0)$ und einem Diagonaloperator (bzgl. einer geeigneten Basis) $D = \operatorname{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_k)$, wobei $\mu_1, \ldots, \mu_k$ die gemäß ihrer Vielfachheit gezählten Eigenwerte von T_0 sind. Außerdem wissen wir, daß wir die Basis so wählen können, daß für die zugehörige euklidische Norm $\|\cdot\|_0$ auf V_0 gilt

$$\|N\|_0 \leq \alpha - \max\{|\mu_j| \mid j = 1, \ldots, k\}.$$

Hieraus folgt unmittelbar

$$\|T_0\|_0 \leq \|D\|_0 + \|N\|_0 \leq \max\{|\mu_j| \mid 1 \leq j \leq k\} + \|N\|_0 \leq \alpha.$$

Analog finden wir eine Hilbertnorm $\|\cdot\|_\infty$ auf V_∞, so daß für die zugehörige Operatornorm gilt: $\|T_\infty^{-1}\|_\infty \leq \alpha$. Dann wird durch

$$\|x\|^2 = \|x_0\|_0^2 + \|x_\infty\|_\infty^2 \quad \text{ für alle } x = x_0 + x_\infty \in V_0 \oplus V_\infty = V$$

die gewünschte Hilbertnorm auf V definiert. **q.e.d.**

Bemerkung 2.36. *Ist $T \in \mathcal{L}(V)$ invertierbar und hyperbolisch, so ist*

$$|\sigma_0(T)| < 1 < |\sigma_\infty(T)|.$$

Da für jedes invertierbare $B \in \mathcal{L}(V)$ trivialerweise

$$\sigma(B^{-1}) = \sigma^{-1}(B) = \{\lambda^{-1} \mid \lambda \in \sigma(B)\}$$

gilt, folgt $|\sigma(T_\infty^{-1})| < 1$. Also existieren ein $\alpha < 1$ und eine Norm $\|\cdot\|$ auf V mit

$$\|T_0\| \leq \alpha < 1 \text{ und } \|T_\infty^{-1}\| \leq \alpha < 1.$$

Für $x \in V_0$ folgt hieraus

$$T^k x = (T_0)^k x \to 0 \text{ für } k \to \infty,$$

und für $y \in V_\infty$ ergibt sich

$$T^{-k} y = (T_\infty)^{-k} y \to 0 \text{ für } k \to \infty.$$

In Analogie zu linearen Flüssen nennt man deshalb V_0 den stabilen und V_∞ den instabilen Unterverktorraum von T (oder genauer: des von T erzeugten diskreten Flusses).

Für einen metrischen Raum sei $C_b(X, V)$ der Banachraum der beschränkten stetigen Funktionen von X nach V mit der Supremumsnorm. Ist X kompakt, so ist natürlich $C_b(X, V) = C(X, V)$ und

$$\|u\|_\infty = \max_{x \in X} \|u(x)\|.$$

Außerdem ist es klar, daß wir eine äquivalente Norm auf $C_b(X, V)$ erhalten, wenn wir die Norm in V durch eine äquivalente Norm ersetzen. Es sei nun $V = V_1 \oplus V_2$ eine direkte Summenzerlegung von V, und für die zugehörigen Projektionen $P_i : V \to V_i$ gelte $\|P_i\| \leq 1$. Dann läßt sich jedes Element $u \in V$ als $u = P_1 u + P_2 u$ schreiben, mit $P_i u \in C_b(X, V_i)$. Außerdem gilt trivialerweise

$$\|P_i u\|_\infty = \sup_{x \in X} \|P_i u(x)\| \leq \|P_i\| \cdot \|u\|_\infty \leq \|u\|_\infty$$

für $i = 1, 2$. Folglich werden durch $(P_i u)(x) = P_i u(x)$ für alle $x \in X$ stetige Projektionen $P_i : C_b(X, V) \to C_b(X, V_i)$, mit $P_1 + P_2 = \mathbb{1}$ definiert, d.h. es gilt $C_b(X, V) = C_b(X, V_1) \oplus C_b(X, V_2)$, und $P_i : C_b(X, V) \to C_b(X, V_i)$ sind die zugehörigen Projektionen. Setzen wir

$$\|u\|_{C_b(X,V)} = \max\{\|P_i u\|_\infty, \|P_2 u\|_\infty\},$$

so folgt aus

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\|u\|_\infty &= \tfrac{1}{2}\|P_1u + P_2u\|_\infty \le \tfrac{1}{2}(\|P_1u\|_\infty + \|P_2u\|_\infty)\\ &= \tfrac{1}{2}(\|P_1u\|_{C_b(X,V_1)} + \|P_2u\|_{C_b(X,V_2)}) \le \|u\|_{C_b(X,V)} \le \|u\|_\infty,\end{aligned}$$

daß $\|\cdot\|_{C_b(X,V)}$ eine äquivalente Norm auf $C_b(X,V)$ ist.

Schließlich benötigen wir noch das Analogon zum Begriff der "Flußäquivalenz" für den Fall topologischer Abbildungen. Sind X und Y topologische Räume und $A : X \to X$ sowie $B : Y \to Y$ Homöomorphismen, so heißt ein Homöomorphismus $\Psi : X \to Y$ eine topologische Konjugation von A nach B, falls $\Psi \circ A = B \circ \Psi$ gilt. Sind X und Y offene Teilmengen von Banachräumen und sind A, B und Ψ C^k-Diffeomorphismen, $1 \le k \le \infty$, so heißt Ψ eine C^k-Konjugation. Schließlich heißen A und B topologisch (bzw. C^k-)konjugiert, falls eine topologische (bzw. C^k-)Konjugation von A nach B existiert. Hierdurch wird trivialerweise eine Äquivalenzrelation in der Klasse der Homöomorphismen (bzw. der C^k-Diffeomorphismen) definiert. Nach diesen Vorbereitungen können wir nun den globalen Hartmannschen Linearisierungssatz beweisen.

Satz 2.37. *Für ein invertierbares und hyperbolisches $T \in \mathcal{L}(V)$, und für jede Lipschitz stetige Funktion $g \in C_b(V,V)$ mit genügend kleiner Lipschitzkonstanten, sind die Abbildungen T und $T+g$ topologisch konjugiert.*

Beweis: Wegen dem vorangehenden Lemma und der Bemerkung danach gibt es eine Hilbertnorm $\|\cdot\|$ auf V mit

$$\max\{\|T_0\|, \|T_\infty^{-1}\|\} \le \alpha < 1.$$

Da beim Übergang zu einer äquivalenten Norm auf V die Lipschitzkonstante von g mit einem positiven Faktor multipliziert wird, können wir die Norm $\|\cdot\|$ auf V verwenden und annehmen, daß für ein $2\lambda < \min\{1-\alpha, \|T^{-1}\|^{-1}\}$ gilt:

$$\|g(x) - g(y)\| \le \lambda\|x-y\| \quad \text{für alle } x, y \in V.$$

(i) Wir zeigen zuerst, daß $T + g \in C(V,V)$ ein Homöomorphismus ist. Da, für jedes $z \in V$, die Gleichung $Tx + g(x) = z$ äquivalent zur Fixpunktgleichung

$$x = T^{-1}(z - g(x)) = f_z(x)$$

ist, ist $T+g$ bijektiv, falls $f_z : V \to V$ genau einen Fixpunkt $x(z)$ hat. Wegen

$$\begin{aligned}\|f_z(x) - f_z(y)\| &\le \|T^{-1}\| \cdot \|g(y) - g(x)\| \qquad &&\le \lambda\|T^{-1}\| \cdot \|x-y\|\\ &\le \tfrac{1}{2}\|x-y\| &&\text{für alle } x, y \in V\end{aligned}$$

folgt dies aus dem Banachschen Fixpunktsatz. Wir erhalten für $z, \tilde{z} \in V$

$$\begin{aligned}\|x(z) - x(\tilde{z})\| &= \|f_z(x(z)) - f_{\tilde{z}}(x(\tilde{z}))\| \\ &\leq \|f_z(x(z)) - f_z(x(\tilde{z}))\| + \|f_z(x(\tilde{z})) - f_{\tilde{z}}(x(\tilde{z}))\| \\ &\leq \tfrac{1}{2}\|x(z) - x(\tilde{z})\| + \|T^{-1}\| \cdot \|z - \tilde{z}\|,\end{aligned}$$

also $\|x(z)-x(\tilde{z})\| \leq 2\|T^{-1}\|\|z-\tilde{z}\|$. Also ist $x(\cdot) = (T+g)^{-1} : V \to V$ Lipschitz stetig.
(ii) Es sei nun $h \in C_b(V,V)$ eine zweite Lipschitz stetige Funktion mit der Lipschitzkonstanten λ. Ferner nehmen wir an, daß es zu jedem Paar (g,h) solcher Funktionen genau ein $H = H(g,h) \in C(V,V)$ gibt mit

$$H - \mathbb{1}_V \in C_b(V,V) \qquad \text{und } (T+g) \circ H = H \circ (T+h).$$

Dann gilt für $a = H(g,0)$

$$(T+g) \circ a = a \circ T,$$

und für $b = H(0,g)$

$$T \circ b = b \circ (T+g).$$

Es folgt

$$(T+g) \circ a \circ b = a \circ T \circ b = a \circ b \circ (T+g).$$

Wegen $a = \mathbb{1}_V + u$ und $b = \mathbb{1}_V + v$ mit $u, v \in C_b(V,V)$ folgt $a \circ b = \mathbb{1}_V + w$ mit $w = v + u \circ b \in C_b(V,V)$. Wegen der Eindeutigkeit von H ist $a \circ b = H(g,g) = \mathbb{1}_V$ ist. Analog folgt $b \circ a = \mathbb{1}_V$. Folglich ist a ein Homömorphismus von V auf sich, also eine topologische Konjugation von $T+g$ nach T.
(iii) Mit $H = \mathbb{1}_V + u$ bleibt zu zeigen, daß es genau ein $u \in C_b(V,V)$ gibt mit

$$(T+g) \circ (\mathbb{1}_V + u) = (\mathbb{1}_V + u) \circ (T+h).$$

Da nach (i) $T+h$ ein Homöomorphismus ist, ist das äquivalent zu

$$\begin{aligned}\mathbb{1}_V + u &= (T+g) \circ (\mathbb{1}_V + u) \circ (T+h)^{-1} \\ &= g \circ (\mathbb{1}_V + u) \circ (T+h)^{-1} + T \circ (T+h)^{-1} + T \circ u \circ (T+h)^{-1}.\end{aligned}$$

Wegen $T \circ (T+h)^{-1} = \mathbb{1}_V - h \circ (T+h)^{-1}$ ist die letzte Gleichung äquivalent zu

$$\begin{aligned}u = \tilde{F}(u) &= T \circ u \circ (T+h)^{-1} + G(u) \quad \text{mit} \\ G(u) &= g \circ (\mathbb{1}_V + u) \circ (T+h)^{-1} - h \circ (T+h)^{-1}.\end{aligned}$$

Offensichtlich bildet $\tilde{F}$ den Banachraum $C_b(V,V)$ in sich ab. Es bleibt zu zeigen, daß $\tilde{F}$ genau einen Fixpunkt in $C_b(V,V)$ hat.

Wegen $V = V_0 \oplus V_\infty$ und da V_0 und V_∞ orthogonal sind, folgt $\|P_0\|, \|P_\infty\| \leq 1$ für die zugehörigen Projektionen (vgl. den Beweis von Theorem). Die Fixpunktgleichung für $\tilde{F}$ ist somit äquivalent zu dem Paar von Gleichungen

$$\begin{aligned} P_0 \circ u &= F_0(u) = T_0 \circ P_0 \circ u \circ (T+h)^{-1} + P_0 \circ G(u) \\ P_\infty \circ u &= T_\infty \circ P_\infty \circ u \circ (T+h)^{-1} + P_\infty \circ G(u). \end{aligned}$$

Da die letzte Gleichung durch Multiplikation von links mit T_∞^{-1} und von rechts mit $T+h$ in die äquivalente Gleichung

$$P_\infty \circ u = F_\infty(u) = T_\infty^{-1} \circ P_\infty \circ u \circ (T+h) - T_\infty^{-1} \circ P_\infty \circ G(u) \circ (T+h)$$

übergeht, ist die Fixpunktgleichung für $\tilde{F}$ äquivalent zu der letzten und der vorvorletzten Gleichung. Nach den vorangehenden Betrachtungen induziert die Zerlegung $V = V_0 \oplus V_\infty$ die Zerlegung $C_b(V,V) = C_b(V,V_0) \oplus C_b(V,V_\infty)$ mit

$$\begin{aligned} \|u\|_{C_b(V,V)} &= \max\{\|P_0 u\|_\infty, \|P_\infty u\|_\infty\} \\ \tfrac{1}{2}\|u\|_\infty \leq \|u\|_{C_b(V,V)} &\leq \|u\|_\infty \quad \text{für alle } u \in B. \end{aligned}$$

Also wird durch $F = F_0 + F_\infty$ eine Abbildung von $C_b(V,V)$ in sich definiert, derart, daß die Fixpunktgleichung $u = F(u)$ zur Fixpunktgleichung $u = \tilde{F}(u)$ äquivalent ist. Für $u, v \in B$ und $x \in V$ erhalten wir mit $y = (T+h)^{-1}(x)$ und $z = (T+h)(x)$ und unter Verwendung von der Abschätzung an die Normen von T_0 und T_∞ die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \|F_0(u)(x) - F_0(v)(x)\| &\leq \alpha\|P_0 u(y) - P_0 v(y)\| + \|g(y+u(y)) - g(y+v(y))\| \\ &\leq \alpha\|P_0(u-v)\|_\infty + \lambda\|u-v\|_\infty \leq (\alpha+2\lambda)\|u-v\|_{C_b(V,V)}, \\ \|F_\infty(u)(x) - F_\infty(v)(x)\| &\leq \alpha\|P_\infty u(z) - P_\infty v(z)\| + \alpha\|g(x+u(x)) - g(x+v(x))\| \\ &\leq \alpha\|P_\infty(u-v)\|_\infty + \lambda\|u-v\|_\infty \leq (\alpha+2\lambda)\|u-v\|_{C_b(V,V)}, \end{aligned}$$

woraus wegen $F_0(C_b(V,V)) \subset C_b(V,V_0)$ und $F_\infty(C_b(V,V)) \subset C_b(V,V_\infty)$

$$\|F(u) - F(v)\|_{C_b(V,V)} \leq (\alpha+2\lambda)\|u-v\|_{C_b(V,V)} \qquad \text{für alle } u, v \in C_b(V,V)$$

folgt. Wegen $\alpha + 2\lambda < 1$ folgt die Existenz eines eindeutigen Fixpunktes von F aus dem Banachschen Fixpunktsatz. **q.e.d.**

Bemerkung 2.38. **(i)** *Der obige Beweis zeigt, daß es genau eine topologische Konjugation H von T nach $T+g$ gibt, welche $H - \mathbb{1}_V \in C_b(V,V)$ erfüllt (falls natürlich die Lipschitzkonstante von g hinreichend klein ist).*

(ii) *Wenn $g \in C^k(V,V), 1 \leq k \leq \infty$ gilt, so ist natürlich zu erwarten, daß die topologische Konjugation von $T+g$ nach g auch die entsprechenden Differenzierbarkeitseigenschaften hat, d.h. daß $T+g$ und T C^k-konjugiert sind. Dies ist jedoch im allgemeinen nicht richtig. Für weitere Untersuchungen in dieser Richtung sei auf Hartmann verwiesen.*

Zur Lokalisierung des obigen Linearisierungssatzes benötigen wir das folgende

Lemma 2.39. *Es sei F ein beliebiger normierter Vektorraum, und $r_\alpha : F \to \overline{B(0,\alpha)}$ sei die radiale Retraktion:*

$$r_\alpha(x) = \begin{cases} x & \textit{für } \|x\| \leq \alpha \\ \alpha\frac{x}{\|x\|} & \textit{für } \|x\| > \alpha \end{cases}.$$

Dann ist r_α gleichmäsig lipschitzstetig mit der Lipschitzkonstanten 2.

Beweis: Für $\|x\| > \alpha \geq \|y\|$ gilt

$$\begin{aligned} \|r_\alpha(x) - r_\alpha(y)\| &= \left\|\alpha\|x\|^{-1}x - y\right\| \leq \alpha\|x\|^{-1}\|x-y\| + \left\|\alpha\|x\|^{-1}y - y\right\| \\ &\leq \|x-y\| + \|x\|^{-1}\|y\|(\|x\|-\alpha) \\ &\leq \|x-y\| + (\|x\| - \|y\|) \leq 2\|x-y\|. \end{aligned}$$

Sind $\|x\| > \alpha$ und $\|y\| > \alpha$, erhalten wir

$$\begin{aligned} \|r_\alpha(x) - r_\alpha(y)\| &= \left\|\alpha\|x\|^{-1}x - \alpha\|y\|^{-1}y\right\| \\ &\leq \alpha\|x\|^{-1}\|x-y\| + \alpha\|y\| \cdot \left|\|x\|^{-1} - \|y\|^{-1}\right| \\ &\leq \|x-y\| + \alpha\|x\|^{-1}\left|\|y\| - \|x\|\right| \leq 2\|x-y\|. \end{aligned}$$

Hieraus folgt die Behauptung. **q.e.d.**

Nach diesen Vorbereitungen können wir nun das Hauptresultat dieses Abschnittes beweisen. Dazu erinnern wir daran, daß V ein endlichdimensionaler Banachraum ist, daß X offen ist in V und daß $f \in C^1(X,V)$ gilt.

Satz 2.40 (Grobman und Hartmann)**.** *Es sei x_0 ein hyperbolischer kritischer Punkt von Φ_f. Dann sind Φ_f und $e^{tf'(x_0)}$ auf einer Umgebung von x_0 flußäquivalent.*

Beweis: Der Beweis unterteilt sich in drei Schritte. Zuerst konstruieren wir einen globalen Fluss auf V, der in einer Umgebung mit Φ_f übereinstimmt. Danach zeigen wir die Aussage zuerst für die entsprechenden zeitdiskrteten Systeme, die wir erhalten wenn wir die Zeit auf $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ einschränken. Als letztes zeigen wir, dass die so konstruierte Flussäquiavlenz auch eine Flussäquivalenz für die zeitkontinuierlichen Systeme ist.

(i) Da die Translation offensichtlich eine Flußäquivalenz ist, können wir o.B.d.A. $x_0 = 0$ annehmen. Für alle $\lambda > 0$ existiert ein $\alpha > 0$ mit $\|f'(x) - f'(0)\| \leq \frac{\lambda}{2}$ für alle $x \in \overline{B(0,\alpha)}$. Aufgrund des Mittelwertsatzes ist die Funktion $x \mapsto f(x) - f'(0)x$ auf $\overline{B(0,\alpha)}$ Lipschitz stetig mit der Lipschitzkonstanten $\frac{\lambda}{2}$. Wir definieren $g \in C_b(V,V)$ mittels der radialen Retraktion $r_\alpha : V \to \overline{B(0,\alpha)}$ durch

$$g = (f - f'(0)) \circ r_\alpha.$$

Wegen dem vorangehenden Lemma ist g Lipschitz stetig ist mit der Lipschitzkonstanten λ. Mit $A = f'(0) \in \mathcal{L}(V)$ gilt

$$(A + g)|_{B(0,\alpha)} = f|_{B(0,\alpha)}.$$

Ist Φ_{A+g} der von $A + g$ auf V erzeugte Fluß, so stimmt Φ_{A+g} auf $B(0,\alpha)$ also mit Φ_f überein. Es genügt also zu zeigen, daß Φ_{A+g} und Φ_A flußäquivalent sind.
(ii) Mit g ist auch $A + g$ Lipschitz stetig ist. Also ist Φ_{A+g} nach Satz 1.38 (v) ein globaler Fluss. Wegen $\dot{x} = Ax + g(x)$ folgt aus der Variation der Konstanten

$$\Phi_{A+g}(t,x) = e^{tA}x + \int_0^t e^{(t-\tau)A} g(\Phi_{A+g}(\tau,x))d\tau \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Hieraus ergibt sich

$$\|\Phi_{A+g}(t,x) - \Phi_{A+g}(t,y)\| \leq e^{t\|A\|}\|x - y\| + \int_0^t e^{(t-\tau)\|A\|}\lambda \|\Phi_{A+g}(\tau,x) - \Phi_{A+g}(\tau,y)\| \, d\tau$$

für $t \geq 0$ und $x, y \in V$. Wir multiplizieren jetzt diese Ungleichung mit $e^{-t\|A\|}$

$$\begin{aligned}\|\Phi_{A+g}(t,x)e^{-t\|A\|} - \Phi_{A+g}(t,y)e^{-t\|A\|}\| &\leq \\ &\leq \|x - y\| + \lambda \int_0^t \|\Phi_{A+g}(\tau,x)e^{-\tau\|A\|} - \Phi_{A+g}(\tau,y)e^{-\tau\|A\|}\| d\tau\end{aligned}$$

und wenden Lemma 1.60 auf diese Ungleichung an:

$$\|\Phi_{A+g}(t,x)e^{-t\|A\|} - \Phi_{A+g}(t,y)e^{-t\|A\|}\| \leq \|x - y\| \left(1 + \lambda \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} d\tau\right) = \|x - y\| e^{\lambda t}.$$

Daraus folgt die Ungleichung

$$\|\Phi_{A+g}(t,x) - \Phi_{A+g}(t,y)\| \leq \|x-y\| e^{(\lambda + \|A\|)t} \quad \text{für alle } x, y \in V \text{ und } t \geq 0.$$

Wegen $g \in C_b(V,V)$ erhalten wir aus der obigen Formel diesmal für $t \in \mathbb{R}$ und $x \in V$:

$$\|\Phi_{A+g}(t,x) - e^{tA}x\| \leq \|g\|_\infty \left| \int_0^t e^{(t-\tau)\|A\|} d\tau \right|,$$

und deshalb auch

$$\Phi_{A+g}(t,\cdot) - e^{tA} \in C_b(V,V) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Schließlich folgt aus obiger Ungleichung und der Lipschitzstetigkeit von g

$$\|(\Phi_{A+g}(t,x) - e^{tA}x - (\Phi_{A+g}(t,y) - e^{tA}y)\| \leq \int_0^t e^{(t-\tau)\|A\|} \lambda \|\Phi_{A+g}(\tau,x) - \Phi_{A+g}(\tau,y)\| d\tau$$

$$\leq \lambda \|x-y\| e^{t\|A\|} \int_0^t e^{\lambda\tau} d\tau = \|x-y\| e^{t\|A\|}(e^{\lambda t} - 1) \quad \text{für } t \geq 0 \text{ und } x, y \in V.$$

(iii) Da 0 nach Voraussetzung ein hyperbolischer kritischer Punkt ist, ist $\sigma_n(A) = \emptyset$. Also folgt aus Lemma 2.34, daß $T = e^A$ ein hyperbolischer Automorphismus von V ist. Wenn wir λ hinreichend klein wählen, wird die Lipschitzkonstante von $\tilde{g} = \Phi_{A+g}(1,\cdot) - T$ beliebig klein. Mit $\tilde{g} \in C_b(V,V)$ folgt aus dem Hartmannschen Linearisierungssatz, daß T und $\Phi_{A+g}(1,\cdot) = T + \tilde{g}$ topologisch konjugiert sind. Wir wissen außerdem, daß es genau eine Flussäquivalenz Ψ von T nach $\Phi_{A+g}(1,\cdot)$ gibt mit $\Psi - \mathbb{1}_V \in C_b(V,V)$.

Aus $\Psi \circ T = \Phi_{A+g}(1,\cdot) \circ \Psi$ folgt für jedes $t \in \mathbb{R}$ (mit $T^t = e^{tA}$)

$$\begin{aligned}
\Phi_{A+g}(1,\cdot) \circ (\Phi_{A+g}(t,\cdot) \circ \Psi \circ T^{-t}) &= \Phi_{A+g}(t,\cdot) \circ \Phi_{A+g}(1,\cdot) \circ \Psi \circ T^{-t} \\
&= \Phi_{A+g}(t,\cdot) \circ \Psi \circ T \circ T^{-t} \\
&= (\Phi_{A+g}(t,\cdot) \circ \Psi \circ T^{-t}) \circ T.
\end{aligned}$$

Also ist $\Phi_{A+g}(t,\cdot) \circ \Psi \circ T^{-t}$ eine Flussäquivalenz von T nach $\Phi_{A+g}(1,\cdot)$. Wegen

$$\Phi_{A+g}(1,\cdot) \circ \Psi \circ T^{-t} - \mathbb{1}_V = (\Phi_{A+g}(t,\cdot) - T^t) \circ \Psi \circ T^{-t} + T^t \circ (\Psi - \mathbb{1}_V) \circ T^{-t}$$

folgt wegen $\Phi_{A+g}(t,\cdot) - e^{tA} \in C_b(V,V)$, daß $\Phi_{A+g}(t,\cdot) \circ \Psi \circ T^{-t} - \mathbb{1}_V \in C_b(V,V)$ gilt. Also ist $\Phi_{A+g}(t,\cdot) \circ \Psi \circ T^{-t} = \Psi$ und somit $\Phi_{A+g}(t,\cdot) \circ \Psi = \Psi \circ e^{tA}$ für jedes $t \in \mathbb{R}$, d.h. Φ_{A+g} und e^{tA} sind isochron flußäquivalent. **q.e.d.**

2.6 Stabile Mannigfaltigkeiten

Der obige Satz besagt, daß in der Nähe eines hyperbolischen kritischen Punktes x_0 das Phasenporträt des Flusses Φ_f die gleiche topologische Struktur wie das Phasenporträt der Linearisierung in der Nähe von 0 hat. In Analogie zum stabilen Untervektorraum V_s bzw. instabilen Untervektorraum V_u eines linearen Flusses definiert man die stabile Mannigfaltigkeit $W_s(x_0)$ bzw. die instabile Mannigfaltigkeit $W_u(x_0)$ von Φ_f in x_0 als

$$W_s(x_0) = \{x \in V \mid t \mapsto \Phi_f(t,x) \text{ existiert für } t \in [0,\infty) \text{ und } \lim_{t\to\infty} \Phi_f(t,x) = x_0\}$$
$$W_u(x_0) = \{x \in V \mid t \mapsto \Phi_f(t,x) \text{ existiert für } t \in (-\infty,0] \text{ und } \lim_{t\to-\infty} \Phi_f(t,x) = x_0\}.$$

Offensichtlich gilt $x_0 \in W_s(x_0) \cap W_u(x_0)$. Wir wollen nun zeigen, daß, in der Nähe von x_0, die Mengen $W_s(x_0)$ und $W_u(x_0)$ tatsächlich differenzierbare Untermannigfaltigkeiten von V sind, die sich in x_0 transversal schneiden, und daß die Tangentialräume an $W_s(x_0)$ bzw. $W_u(x_0)$ parallel zu V_s bzw. V_u sind:

$$T_{x_0}W_s(x_0) = x_0 + V_s \qquad\qquad T_{x_0}W_u(x_0) = x_0 + V_u.$$

Zum Beweis dieses Sachverhaltes betrachten wir wieder Homöomorphismen von V auf sich. Ist $h : V \to V$ ein Homöomorphismus mit $h(0) = 0$, so nennen wir die Menge

$$W_0 := \{x \in V \mid h^n(x) \to 0 \text{ für } n \to \infty\}$$

die stabile Menge von h in 0, wobei h^n die n-fache Iterierte von h bezeichnet. Analog definiert man die instabile Menge von h in 0 durch

$$W_\infty := \{x \in V \mid h^{-n}(x) \to 0 \text{ für } n \to \infty\},$$

wobei $h^{-n} := (h^{-1})^n$ gesetzt ist. Offensichtlich gehen W_0 und W_∞ ineinander über, wenn wir h durch h^{-1} ersetzen. Folglich genügt es, W_0 zu betrachten.

Sei $T \in \mathcal{L}(V)$ invertierbar und hyperbolisch, und $V = V_0 \oplus V_\infty, T = T_0 \oplus T_\infty$ sei die oben eingeführte Zerlegung in den stabilen und den instabilen Untervektorraum.

Satz 2.41. *Sei $g : V \to V$ Lipschitz stetig mit $g(0) = 0$. Besitzt g eine genügend kleine Lipschitzkonstante, so existiert eine eindeutig bestimmte gleichmäßig Lipschitz stetige Funktion $h : V_0 \to V_\infty$, so daß der Graph von h die stabile Menge W_0 von $T+g$ in 0 ist. Gehört g in einer Umgebung von 0 zur Klasse $C^k, 1 \leq k \leq \infty$, so auch die Funktion h. In diesem Fall gibt es eine Umgebung V von 0 in V_0, derart, daß*

$$W_0^V = \{(x, h(x)) \mid x \in V\}$$

eine C^k-Mannigfaltigkeit ist. Gilt außerdem $g'(0) = 0$, so ist $T_0 W_0^v = V_0$.

Beweis: Es sei
$$B_0 = \{u : \mathbb{N}_0 \to V \mid u(k) \to 0 \text{ für } k \to \infty\}.$$
Offenbar ist B_0 ein abgeschlossener Untervektorraum des Banachraums $B(\mathbb{N}_0, V)$ aller beschränkten Folgen in V mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$. Also ist B_0 selbst ein Banachraum mit der Supremumsnorm. Es sei

$$\mathbb{W}_0 = \{u \in B_0 \mid u(k) = (T+g)^k x \text{ für ein } x \in V \text{ und alle } k \in \mathbb{N}\}.$$

Dann gilt offensichtlich $W_0 = \{u(0) \mid u \in \mathbb{W}_0\}$. Ferner ist

$$u \in \mathbb{W}_0 \Leftrightarrow u(k+1) = (T+g)(u(k)) \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Mit den Projektionen $P_0 : V \to V_0$ und $P_\infty : V \to V_\infty$ ist das äquivalent zu

$$P_0 u(k+1) = T_0 P_0 u(k) + P_0 g(u(k)) \quad P_\infty u(k+1) = T_\infty P_\infty u(k) + P_\infty g(u(k)), \text{ und}$$

$$P_0 u(k+1) = T_0 P_0 u(k) + P_0 g(u(k)) \quad P_\infty u(k) = T_\infty^{-1} P_\infty u(k+1) - T_\infty^{-1} P_\infty g(u(k))$$

für $k \in \mathbb{N}$. Setzen wir für $x \in V_0$ und $u \in B_0$:

$$F(x,u)(k) = \begin{cases} T_0 P_0 u(k-1) + T_\infty^{-1} P_\infty u(k+1) + P_0 g(u(k-1)) - T_\infty^{-1} P_\infty g(u(k)) \\ P_0 x + T_\infty^{-1}(P_\infty u(1) - P_\infty g(u(0))) \text{ für } k = 0, \end{cases}$$

so sehen wir, daß es genau dann ein Element $u(0) \in W_0$ mit $P_0 u(0) = x$ gibt, wenn u ein Fixpunkt von $F(x, \cdot)$ in B_0 ist. Wie im Beweis des Hartmannschen Linearisierungssatzes sei für ein $2\lambda < 1 - \alpha$

$$\max\{\|T_0\|, \|T_\infty^{-1}\|\} \le \alpha < 1 \quad \max\{\|P_0\|, \|P_\infty\|\} \le 1 \quad \|g(x) - g(y)\| \le \lambda \|x - y\|$$

für alle $x, y \in V$. Außerdem benutzen wir in B_0 die äquivalente Norm

$$\|u\|_B = \max\{\|P_0 u\|_\infty, \|P_\infty u\|_\infty\} \qquad \text{mit } \tfrac{1}{2}\|u\|_\infty \le \|u\|_B \le \|u\|_\infty$$

für alle $u \in B_0$. Für $x \in V$ und $u, v \in B_0$ erhalten wir die Abschätzungen

$$\begin{aligned} &\|F(x,u) - F(x,v)\|_B \le \alpha \|u - v\|_B + \lambda \|u - v\|_\infty \le (\alpha + 2\lambda)\|u - v\|_B, \\ &\qquad \|F(x,u)(k)\| \le (\alpha + \lambda)\|u(k-1)\| + \alpha\lambda \|u(k)\| + \alpha \|u(k+1)\| \quad \text{für } k \ge 1. \end{aligned}$$

Es folgt, daß $F(x, \cdot)$ den Banachraum B_0 in sich abbildet, und $F(x, \cdot) : B_0 \to B_0$ eine Kontraktion mit der von $x \in V$ unabhängigen Kontraktionskonstanten $\alpha + 2\lambda < 1$

ist. Der Banachsche Fixpunktsatz impliziert die Existenz eines eindeutig bestimmten Fixpunktes $U(x)$ von $F(x,\cdot)$ in B_0. Aus der Abschätzung

$$\begin{aligned}
\|U(x)-U(y)\|_B &= \|F(x,U(x))-F(y,U(y))\|_B \\
&\le \|F(x,U(x))-F(x,U(y))\|_B + F(x,U(y))-F(y,U(y))\|_B \\
&\le (\alpha+2\lambda)\|U(x)-U(y)\|_B + \|P_0x-P_0y\| \quad \text{folgt} \\
\|U(x)-U(y)\|_B &\le \frac{\|P_0x-P_0y\|}{1-\alpha-2\lambda} \quad \text{für alle } x,y\in V \quad \text{Wir setzen nun} \\
h(x) &= P_\infty U(x)(0) \quad \text{für alle } x\in V_0.
\end{aligned}$$

Dann bildet h den Raum V_0 Lipschitz stetig in V_∞ ab, und

$$W_0 = \{x,h(x)) \mid x\in V_0\} = \mathrm{Graph}(h).$$

Wir bezeichnen mit $S_1, S_{-1} : B_0 \to B_0$ die Verschiebungsoperatoren

$$(S_{-1}u)(k) = u(k+1) \text{ für alle } k\in\mathbb{N} \quad (S_1u)(k) = \begin{cases} u(k-1) & \text{für alle } k\in\mathbb{N}\setminus\{0\} \\ 0 & \text{für } k=0. \end{cases}$$

Offensichtlich sind S_{-1} und S_1 stetig mit $\max\{\|S_{-1}\|_B, \|S_1\|_B\} \le 1$. Schließlich definieren wir

$$G : B_0 \to B_0, \qquad \text{mit} \qquad G(u)(k) = g(u(k)) \text{ für alle } k\in\mathbb{N}.$$

Gilt dann $g\in C^k(B_V(0,\beta),V)$ für ein $\beta>0$ und ein $k\in\mathbb{N}^*\cup\{\infty\}$, so folgt $G\in C^k(B_{B_0}(0,\beta),B_0)$ und für $g'(0)=0$ auch $G'(0)=0$. Mit dem Einheitsvektor $e_0=(1,0,\ldots)\in B_0$ kann $F(x,\cdot)$ in folgender Form geschrieben werden:

$$\begin{gathered}
F(x,\cdot) = (P_0x)e_0 + T_0P_0(S_1+G\circ S_1) + T_\infty^{-1}P_\infty(S_{-1}-G) \\
\text{Mit } H(x,u) = u - F(x,u) \quad \text{erhalten wir} \quad H\in C^k(V\times B_{B_0}(0,\beta),B_0) \\
K = \mathbb{1}_{B_0} - \frac{\partial H}{\partial u}(0,0) = T_0P_0S_1 + T_\infty^{-1}P_\infty S_{-1}.
\end{gathered}$$

Mithilfe von $\max\{\|S_{-1}\|_B, \|S_1\|_B\} \le 1$ folgt die Abschätzung

$$\|K\|_{\mathcal{L}(B_0)} \le \alpha < 1.$$

Wegen der Neumannschen Reihe ist $\frac{\partial H}{\partial u}(0,0)\in\mathcal{L}(B_0)$ invertierbar. Wegen $H(0,0)=0$, und da $U(x)\in B_0$ für jedes $x\in V_0$ die eindeutige Lösung der Gleichung

$$H(x,u)=0$$

ist, folgt aus dem Satz über implizite Funktionen daß in einer Umgebung von $x = 0$ die Funktion

$$V_0 \to B_0, \quad x \mapsto U(x)$$

zur Klasse C^k gehört. Da die Auswertungsabbildung $B_0 \to V, u \mapsto u(0)$ offensichtlich linear und stetig ist, ist die Funktion $h : V_0 \to V_\infty$ in einer Umgebung V von 0 in der Klasse C^k. Folglich ist W_0^V als Graph einer C^k-Funktion eine C^k-Mannigfaltigkeit der Dimension $\dim_{\mathbb{R}} V_0$. Da durch

$$V_0 \ni x \mapsto (x, h(x)) \in V$$

eine Parametrisierung von W_0^V gegeben wird, ist der Tangentialraum $T_0 W_0^V$ das Bild von V_0 unter $(\mathbb{1}_{V_0} \times h'(0)$ in $V_0 \times V_\infty$, wobei wir o.B.d.A. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ annehmen können. Durch Differenzieren der Identität $H(x, U(x)) = 0$ im Punkt $x = 0$ folgt

$$\frac{\partial H}{\partial x}(0,0) + \frac{\partial H}{\partial u}(0,0)U'(0) = 0 \qquad \text{mit}$$

$$U'(0) \in \mathcal{L}(V_0, B_0) \quad \text{und} \quad \frac{\partial H}{\partial x}(0,0)\xi = -(P_0\xi)e_0 \quad \text{für alle } \xi \in V.$$

Wir erhalten $P_\infty \frac{\partial H}{\partial x}(0,0)\xi = 0$ und mit der Definition von K und Anwenden von P_∞

$$P_\infty U'(0) - T_\infty^{-1} S_{-1} U'(0) = 0, \text{ d.h.} \qquad P_\infty(U'(0)x)(k) = T_\infty^{-1}(U'(0)x)(k+1)$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ und $x \in V_0$. Hieraus folgt

$$\begin{aligned} \|P_\infty(U'(0)x)(k)\| &\le \alpha \|P_\infty U'(0)\|_{\mathcal{L}(V_0,B_0)} \|x\|_V \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N} \\ \|P_\infty U'(0)\|_{\mathcal{L}(V_0,B_0)} &\le \alpha \|P_\infty U'(0)\|_{\mathcal{L}(V_0,B_0)}, \end{aligned}$$

d.h. $P_\infty U'(0) = 0$, da $\alpha < 1$ ist. Wegen $h'(0)\xi = P_\infty(U'(0)\xi)(0)$ für alle $\xi \in V_0$ erhalten wir $h'(0) = 0$ und somit die Behauptung. **q.e.d.**

Ist V eine Umgebung eines kritischen Punktes x_0 des Flusses Φ_f, so definieren wir die lokalen stabilen bzw. instabilen Mannigfaltigkeiten von Φ_f in x_0 bzgl. V durch

$$\begin{aligned} W_s^V(x_0) &= \{x \in W_s(x_0) \mid \Phi_f(t,x) \in V \text{ für } t \ge 0\} \\ W_u^V(x_0) &= \{x \in W_u(x_0) \mid \Phi_f(t,x) \in V \text{ für } t \le 0\}. \end{aligned}$$

I.a. gilt $W_s^V(x_0) \neq W_s(x_0) \cap V$ und $W_u^V(x_0) \neq W_u(x_0) \cap V$. Nach diesen Vorbereitungen können wir den angekündigten Satz über die lokalen stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten beweisen, der im wesentlichen auf Hadamard und Perron zurückgeht.

Satz 2.42. *Es sei $X \subset V$ eine offene Teilmenge eines endlichdimensionalen reellen Banachraums und $f \in C^k(X, V)$ für ein $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Ferner sei x_0 ein hyperbolischer kritischer Punkt des von f erzeugten Flusses Φ_f. Dann gibt es eine Umgebung V von x_0, derart, daß $W_u^V(x_0)$ C^k-Mannigfaltigkeiten sind. Außerdem gilt*

$$T_{x_0} W_s^V(x_0) = x_0 + V_s \text{ und } T_{x_0} W_u^V(x_0) = x_0 + V_u,$$

Wobei V_s und V_u die stabilen und instabilen Unterverktorräume von $e^{tf'(x_0)}$ sind.

Beweis: O.B.d.A. können wir $x_0 = 0$ annehmen. Wir setzen wieder

$$g = (f - f'(0)) \circ r_\alpha,$$

wobei $r_\alpha : V \to \overline{B(0, \alpha)}$ die radiale Retraktion bezeichnet. Dann ist g gleichmäßig Lipschitz stetig, $g(0) = 0$, und $g \in C^k(B(0, \alpha), V)$ mit $g'(0) = 0$. Durch geeignete Wahl von $\alpha > 0$ wird die Lipschitzkonstante von g beliebig klein. Mit $A = f'(0) \in \mathcal{L}(V)$ gilt

$$(A + g)|_{B(0,\alpha)} = f|_{B(0,\alpha)},$$

Also stimmt auf $B(0, \alpha)$ der von $A + g$ erzeugte globale Fluß Φ_{A+g} mit dem von f erzeugten Fluß Φ_f überein. Wir setzen nun $T = e^A$. Dann ist T ein hyperbolischer Automorphismus, und wie im Beweis vom Satz von Grobman und Hartmann folgt, daß $\tilde{g} = \Phi_{A+g}(1, \cdot) - T$ global Lipschitz stetig ist, wobei die Lipschitzkonstante von $\tilde{g}$ durch geeignete Wahl von α beliebig klein wird. Außerdem gehört $\tilde{g}$ in einer Umgebung von 0 zur Klasse C^k. Offensichtlich ist $\tilde{g}(0) = 0$, und da $\frac{\partial}{\partial x}\Phi_{A+g}(\cdot, 0)$ die Lösung des Anfangswertproblems für die linearisierte Gleichung

$$\dot{z} = (A + g'(\Phi_{A+g}(t, 0)))z, \quad z(0) = \mathbb{1}_V$$

ist, folgt aus $\Phi_{A+g}(t, 0) = 0$ und $g'(0) = 0$, daß $\frac{\partial}{\partial x}\Phi_{A+g}(t, 0) = e^{tA}$, also $\tilde{g}'(0) = 0$, gilt. Folglich erfüllen T und $\tilde{g}$ die Voraussetzungen des vorangehenden Satzes. Somit ist die stabile Menge W_0 von $\Phi_{A+g}(1, \cdot) = T + \tilde{g}$ als Graph einer global Lipschitz stetigen Abbildung $h : V_0 \to V_\infty$ darstellbar. Außerdem gibt es eine Umgebung V_0 von 0 in V_0 mit $h \in C^k(V_0, V_\infty)$, derart, daß

$$W_0^{V_0} = \{(x, h(x)) \in V \mid x \in V_0\}$$

eine C^k-Mannigfaltigkeit mit $T_0 W_0^{V_0} = V_0 = V_s$ ist. Wir behaupten nun, daß $W_0 = \tilde{W}_s(0)$ gilt, wobei $\tilde{W}_s(0)$ die stabile Mannigfaltigkeit von Φ_{A+g} im Punkt 0 ist. Da aus $\lim_{t\to\infty} \Phi_{A+g}(t, x) = 0$ stets $\Phi_{A+g}(k, x) \to 0$ für $k \to \infty$ folgt, ist $\tilde{W}_s(0) \subset W_0$. Zum Beweis der umgekehrten Inklusion bemerken wir, daß zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit

$$\|\Phi_{A+g}(t, x)\| \le \epsilon \text{ für } |t| \le 1 \text{ und } \|x\| \le \delta.$$

Andernfalls gäbe es für ein $\epsilon > 0$ eine Folge (t_k, x_k) in $[-1, 1] \times V$ mit $x_k \to 0$ und $\|\Phi_{A+g}(t_k, x_k)\| \geq \epsilon$. Durch Übergang zu einer geeigneten Teilfolge könnten wir $t_k \to \bar{t} \in [-1, 1]$ annehmen, was $\|\Phi_{A+g}(\bar{t}, 0)\| \geq \epsilon$ implizierte, im Widerspruch zu $\Phi_{A+g}(\cdot, 0) = 0$.

Es sei $\epsilon > 0$ beliebig und es gelte $\lim_{k\to\infty} \Phi_f(k, x) = 0$. Dann existiert ein $k(\epsilon) \in \mathbb{N}$ mit $\|\Phi_{A+g}(k, x)\| \leq \beta$ für $k \geq k(\epsilon)$, wobei $\delta > 0$ wie oben gewählt ist. Also folgt

$$\|\Phi_{A+g}(t, x)\| = \|\Phi_{A+g}(t - k, \Phi_{A+g}(k, x))\| \leq \epsilon \quad \text{für } t \geq k(\epsilon) \text{ und } t \in [k, k+1),$$

d.h. $\Phi_{A+g}(t, x) \to 0$ für $t \to \infty$, und somit $W_0 \subset \tilde{W}_s(0)$.

Nach dem Beweis von dem vorangehenden Satz ist $h(x) = P_\infty U(x)(0)$ für $x \in V_0$, wobei die Funktion

$$V \to B_0, \quad y \mapsto U(y)$$

stetig ist, in $y = 0$ verschwindet und $U(y)(k) = (T + \tilde{g})^k(y) = \Phi_{A+g}(k, y)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ erfüllt. Also existiert zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit

$$\{(x, h(x)) \mid \|x\| \leq \delta\} \subset \{y \in W_0 \mid \|\Phi_{A+g}(k, y)\| \leq \epsilon \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}\}.$$

Aus $\|\Phi_{A+g}(t, x)\| \leq \epsilon$ für $|t| \leq 1$ und $\|x\| \leq \delta$ folgt wie im Beweis der Inklusion $W_0 \subset \tilde{W}_s(0)$, daß wir zu vorgegebenem $\epsilon > 0$ die Zahl $\delta > 0$ so wählen können, daß

$$\{(x, h(x)) \mid \|x\| \leq \delta\} \subset \{y \in W_0 \mid \|\Phi_{A+g}(t, y)\| \leq \epsilon \quad \text{für alle } t \in \mathbb{N}\}.$$

gilt. Wegen $W_0 = \tilde{W}_s(0)$ existieren also Nullumgebungen V in V und $\hat{V} \subset V_0$ in V_0 mit $W_0^{\hat{V}} \subset \tilde{W}_s^V(0)$. Da in der Nähe von 0 die Flüsse übereinstimmen, können wir V so klein wählen, daß $\tilde{W}_s^V(0) = W_s^V(0)$ gilt. Insbesondere ist $W_s^V(0) \subset W_0$, und da W_0 der Graph einer auf V_0 definierten Funktion ist, gilt $W_s^V(0) \subset W_0^{V_0}$ für eine genügend kleine Umgebung V von 0. Also ist $W_s^V(0)$ eine C^k-Mannigfaltigkeit mit $T_{x_0}W_s^V(0) = V_s$. Die Behauptung für $W_u^V(0)$ folgt nun durch "Zeitumkehr". **q.e.d.**