FAKULTÄT FÜR WIRTSCHAFTSINFORMATIK
UND WIRTSCHAFTSMATHEMATIK

UNIVERSITÄT MANNHEIM

Prof. Dr. Martin Schmidt
Eva Lübcke

Analysis II
Woche 7

Gemeinsames Erarbeiten von Lösungswegen

1. Lokale Extrema.

Gegeben sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x_1, x_2) = 2x_1^2 - 3x_1x_2^2 + x_2^4$$

(a) Zeige, dass f entlang jeder Geraden durch den Nullpunkt in $(0,0)$ ein lokales Minimum besitzt.

(b) Zeige, dass f im Nullpunkt $(0,0)$ aber kein lokales Minimum in $\mathbb{R}^2$ besitzt.

2. Satz der inversen Funktion und Satz der impliziten Funktion.

(a) Gegeben sei die Abbildung $(u,v) : M := [0,1] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^2$ mit

$$u(x,y) = e^x \cos(y) \quad \text{und} \quad v(x,y) = e^x \sin(y).$$

(i) Bestimme den Bildbereich dieser Abbildung sowie gegebenenfalls die inverse Abbildung.

(ii) Ist diese Abilung auch „im Großen“, d.h. als Abbildung von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$, umkehrbar?

(b) Untersuche mit Hilfe des Satzes über die implizite Funktion, ob die Gleichung

$$x^y = y^x$$

in der Nähe der Punkte $(2,4)$ und (e,e) nach einer der beiden Variablen auflösbar ist.

3. Banachscher Fixpunktsatz.

Überprüfe, ob die folgenden Abbildungen Lipschitz-stetig mit $L < 1$ bzgl. der jeweils angegebenen Metrik d sind:

(a) $f : [1,\infty] \to [1,\infty]$, $x \mapsto x + \frac{1}{x}$ mit $d(x,y) = |x-y|$,

(b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto \frac{1}{2}(\sin(x_1), \cos(x_2))$ mit $d(x,y) = \|x-y\|_2$,

(c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto \frac{1}{2}(x_1 + x_2, x_2)$ mit $d(x,y) = \|x-y\|_2$,

(d) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto \frac{1}{2}(x_1 + x_2, x_2)$ mit $d(x,y) = \|x-y\|_\infty$.

4. Mehrdimensionale Taylorreihe.

(a) Beweise: Wird eine beliebig oft stetig differenzierbare Funktion $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ in einer Umgebung $B(x,r) \subset D$ durch eine Reihe homogener Polynome $P_k(x,h) := \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x)h^\alpha$ auf $\mathbb{R}^n$ mit Grad $k \geq 0$ dargestellt, d.h. für $x+h \in B(x,r)$ ist

$$f(x+h) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(x,h),$$

so ist dies die Taylor-Reihe von f in x.

(b) Zeige, dass die durch

$$f : D := \{y \in \mathbb{R}^2 \mid y_2 - y_1 > -1\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \ln(1 + x_2 - x_1)$$

definierte Funktion die folgende Taylor-Reihe um den Punkt $x = 0$ hat:

$$T_{f,\infty}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(x_2 - x_1)^k$$

Wie sieht der Konvergenzbereich dieser Reihe aus? Stellt sie die Funktion dort dar?

Hinweis zur Notation: In Aufgabenteil (a) wird die sogenannte Multiindex-Notation benutzt. Ein n-dimensionaler „Multiindex“ ist ein n-Tupel $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha)n)$ mit Komponenten $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$. Für Multiindizes sind eine „Ordnung“ $|\alpha|$ und die „Fakultät“$\alpha!$ definiert durch

$$|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n, \quad \alpha! := \alpha_1! \cdot \dots \cdot \alpha_n!.$$

Für $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ wird gesetzt:

$$x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n}$$

Für eine $|\alpha|$-mal stetig differenzierbare Funktion wird gesetzt:

$$\partial^\alpha f := \partial_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot \partial_n^{\alpha_n} f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Wegen der Stetigkeit der Ableitungen ist dieser Ausdruck unabhangig von der Reihenfolge der partiellen Ableitungen.