Fakultät für Wirtschaftsinformatik
und Wirtschaftsmathematik

Universität Mannheim

Prof. Dr. Martin Schmidt
Eva Lübcke

Analysis II
Woche 5

Gemeinsames Erarbeiten von Lösungswegen

1. Zur Neumannschen Reihe.

Für eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ ist auf ihrer „Resolventenmenge“

$$\mathrm{Res}(A) := \{z \in \mathbb{C} \mid z\mathbb{1} - A \in K^{n\times n} \text{ invertierbar}\} \subset \mathbb{C}$$

die *Resolvente* $R(z) := (z\mathbb{1} - A)^{-1}$ definiert. Zudem wird die Menge der Eigenwerte von A als das Spektrum $\sigma(A)$ bezeichnet.

(a) Zeige mit Hilfe von $\sigma(A)$, dass $\mathrm{Res}(A)$ offen ist.

(b) Zeige mit Hilfe des Satzes über die Neumannschen Reihe, dass die Resolvente $R(z) := (A - z\mathbb{1})^{-1}$ auf $\mathrm{Res}(A)$ stetig und auf jeder kompakten Teilmenge von $\mathrm{Res}(A)$ Lipschitz-stetig ist.

2. Differenzierbarkeit und Polarkoordinaten.

Die Abbildung

$$\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \quad (r,\varphi) \mapsto r(\cos\varphi, \sin\varphi)$$

heißt *Polarkoordinaten* von $\mathbb{R}^2$. Hier beschreibt $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ den Raum aller Äquivalenzklassen von $\mathbb{R}$, welche definiert sind durch

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in 2\pi\mathbb{Z}.$$

(a) Veranschauliche die Polarkoordinaten und begründe, warum man manchmal Stetigkeit und Differenzierbarkeit einer Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto f(x,y)$ in $(0,0)$ mit Hilfe dieser Koordinaten zeigen kann.

(b) Zeige, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

auf ganz $\mathbb{R}^2$ differenzierbar ist.

(c) Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^3 y - xy^3}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}.$$

Zeige, dass f überall stetig differenzierbar ist.

3. Zwischenwertsatz für Zusammenhängende Mengen.

In der großen Übung wurde definiert, wann eine Menge zusammenhängend ist. Sei $f : D \subset \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}$ stetig und D zusammenhängend.

(a) Zeige, dass das Bild $f[D]$ zusammenängend ist.

(b) **Zwischenwertsatz für zusammenhängende Mengen:** Zeige, dass f dann für je zwei Punkte $a, b \in D$ jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ annimmt und folgere hieraus, dass f für $f(a)f(b) < 0$ eine Nullstelle in D besitzt.