Woche 9

Aufgaben zum Banachschen Fixpunktsatz

1. Eine einfache Anwendung.
Sei $y \in \mathbb{R}$ mit $y > 1$ und $y \neq e^e$. Gebe eine Abb' an, deren Fixpunkt die Lösung der Gleichung $x^x = y$ ist.
(Hinweis: Durch Logarithmieren kann man leicht zwei Abb'en finden, deren Fixpunkte die Gleichung $x^x = y$ lösen. Eine der beiden ist in einer kleinen Umgebung vom Fixpunkt eine Kontraktion.)

2. Wann ist weniger zu wenig ...
Ziel der Aufgabe ist es zu untersuchen, um wie viel die Voraussetzung $L < 1$ beim Banachschen Fixpunktsatz abgeschwächt werden kann.
Zunächst eine einfache Verallgemeinerung:
a) Sei $f: X \to X$ eine Abb'. auf einem vollständigen metrischen Raum X, so dass für ein $N \in \mathbb{N}$ f^N lipschitzstetig ist mit $L < 1$. Zeige: f besitzt genau einen Fixpunkt und für jedes $x_0 \in X$ konvergiert

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_{n+1} = f(x_n)$ gegen den Fixpunkt.

b) Als nächstes betrachten wir den Fall $L = 1$

i) Finde eine lipschitzstetige Abb mit $L = 1$, die keinen Fixpunkt hat.

ii) Gibt es auch ein Beispiel, das (i) erfüllt und bei dem X kompakt ist?

c) Als nächstes betrachten wir den Fall $f: X \to X$ stetig, $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ $\forall x, y \in X,\ x \neq y$

i) Sei also X ein kompakter metrischer Raum und $f: X \to X$ stetig mit

$d(f(x), f(y)) < d(x, y) \quad \forall x, y \in X$ mit $x \neq y$.

Zeige: f besitzt genau einen Fixpunkt und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_{n+1} = f(x_n)$ konvergiert für alle $x_0 \in X$ gegen den Fixpunkt.

ii) Finde eine glatte Abb $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $|f'(x)| < 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$, die keinen Fixpunkt hat.

d) Sei V normierter VR. und $f: V \to V$ eine stetig diff'bare Abb. mit $\| f'(x) - \mathbb{1}_V \| < 1$ für alle $x \in V$. Zeige: f ist injektiv.