Fakultät für Wirtschaftsinformatik
und Wirtschaftsmathematik

Universität Mannheim

Prof. Dr. Martin Schmidt
Eva Lübcke

Analysis II
Woche 3

Gemeinsames Erarbeiten von Lösungswegen

1. Stetige Fortsetzbarkeit Gegeben sei die Funktion

$$f_{(a,b,c)} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto \frac{ax^2 + bxy + cy^2}{x^2+y^2}.$$

mit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Bestimme die Menge aller $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, so dass sich f stetig zu einer Abbildung auf ganz $\mathbb{R}^2$ fortsetzen lässt.

2. Topologische Räume.

Sei X eine nichtleere Menge. Eine Topologie auf X ist eine Menge T von Teilmengen von X, die folgende Eigenschaften erfüllt:

(a) $\emptyset \in T$, $X \in T$.

(b) Sind $O_1 \dots, O_n \in T$, so ist auch $\bigcap_{i=1}^n O_i \in T$.

(c) Ist I eine beliebige Indexmenge und für alle $i \in I$ gilt $O_i \in T$, so ist auch $\bigcup_{i \in I} O_i \in T$.

Jede Menge $O \in T$ heißt offene Menge und (X,T) heißt topologischer Raum.
Zeige, dass $T_1 := \{\emptyset, X\}$ und $T_2 := \mathcal{P}(X)$ (die Potenzmenge) Topologien auf X sind.

3. Stetigkeit und der „Abstand von Mengen“ im $\mathbb{K}^n$.
Seien $K_1, K_2 \subset \mathbb{K}^n$ (nichtleere) kompakte Mengen.

(a) Zeige, dass die Menge $K_1 \times K_2 \subset \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n$ kompakt ist und dass die Funktion

$$f : K_1 \times K_2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto \|x-y\|$$

stetig auf $K_1 \times K_2$ ist.

(b) Es gibt Punkte $a \in K_1$ und $b \in K_2$ mit

$$\|a-b\| = \inf_{x \in K_1, y \in K_2} \|x-y\|,$$

d.h.: $\|a-b\|$ ist der „Abstand der Mengen K_1 und K_2“.

(c) Im Fall $K_1 \cap K_2 = \emptyset$ ist $\inf_{x \in K_1, y \in K_2} \|x-y\| > 0$. Insbesondere für eine einpunktige Menge $K_1 = \{a\} \not\subset K_2$ ist dann $b \in K_2$ eine sog „Projektion des Punktes a auf die Menge K_2“. Man mache sich durch eine geometrische Überlegung klar, dass diese Projektion im Allgemeinen nicht eindeutig bestimmt ist.

(d) Eine Teilmenge M eines $\mathbb{K}$-Vektorraums heißt *strikt konvex*, wenn für $x, y \in M$ mit $x \neq y$ gilt, dass für jedes $\lambda \in (0,1)$ die Konvexkombination $x_\lambda := \lambda x + (1-\lambda)y \in X^\circ$. Zeige, dass die Zusatzbedingung, dass die Menge $K_2 \subset \mathbb{K}^n$ strikt konvex ist, die Eindeutigkeit der in c) definierten „Projektion von $a \notin K_2$“ auf K_2 garantiert.