Woche 10

Aufgabe zur Anwendung des Satzes über implizite Funktionen bei Extremwertsuche unter Nebenbedingungen

In dieser Aufgabe sei $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f, g : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ glatte Fkt'en. Wir betrachten die Niveaumenge
$A = \{ x \in \mathcal{U} \mid g(x) = g(x_0) \}$ für $x_0 \in \mathcal{U}$.
Wir zeigen, dass die Gleichung

$$f'(x_0) = \lambda\, g'(x_0) \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

auch an bestimmten Singularitäten von A gelten muss, damit x_0 ein lokaler Extremwert von $f|_A$ ist.

a) Zur Motivation betrachten wir zuerst den Doppelpunkt. D. h., $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^2 - y^2$.
sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diffbar.
Zeige, dass $(0,0)$ nur dann ein lokaler Extremwert von $f|_A$ mit
$A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x,y) = 0 \}$ sein kann,
wenn $f'(0,0) = 0$ gilt. Diese Bedingung ist äquivalent dazu, dass es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt, s. d. $f'(0,0) = \lambda\, g'(0,0)$ gilt.

Tipp: Konstruiere stetig diff'bare Abb'en $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \to A$ mit $\gamma(0) = (0,0)$ und $\gamma'(0) \neq 0$. Zeige, dass aller solchen Vektoren $\gamma'(0)$ den VR $\mathbb{R}^2$ aufspannen.

b) Als nächstes betrachten wir $g: \mathcal{U} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$, mit $g'(x_0) = 0$ und die Hessische $g''(x_0)$ aber indefinit ist, d. h., es gibt Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ mit $g''(x_0)(x, x) > 0$ und $g''(x_0)(y, y) < 0$. Zeige, dass die Indefinitheit äquivalent ist zu jeder der beiden folgenden Bedingungen:

i) $\exists\ \tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{R}^n$ mit $g''(x_0)(\tilde{x}, \tilde{x}) = 1$, $g''(x_0)(\tilde{y}, \tilde{y}) = -1$ und $g''(x_0)(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0$.

ii) $\exists\ v, w \in \mathbb{R}^n$ mit $g''(x_0)(v, v) = 0$ und $g''(x_0)(v, w) \neq 0$.

Bemerkung: Die Bedingung i) besagt, dass die Fkt $g(x_0 + t\tilde{x} + s\tilde{y}) - g(x_0)$ in einer Umgebung von $g(x_0)$ approximierbar ist durch $t^2 - s^2$ + Terme höherer Ordnung und deshalb die Menge

$$\{(t,s) \in \mathbb{R}^2 \mid x_0 + t\tilde{x} + s\tilde{y} \in \mathcal{U},\ g(x_0 + t\tilde{x} + s\tilde{y}) = g(x_0)\}$$

ungefähr so aussieht wie der Doppelpunkt.

c) Seien jetzt die Vektoren $v, w \in \mathbb{R}$ so wie in b) ii) gewählt, also mit $g''(x_0)(v,v)=0$ und $g''(x_0)(v,w) \neq 0$. Definiere

$$h : \{(t,s) \in \mathbb{R}^2 \mid x_0 + tv + sw \in \mathcal{U}\} \longrightarrow \mathbb{R}.$$
$$(t,s) \mapsto g(x_0 + tv + sw) - g(x_0)$$

Zeige, dass es für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ ein Polynom p_n von Grad n in t, s gibt, s.d. gilt

$$h(t,s) = p_n(t,s) + \underbrace{\mathcal{O}}_{\text{Landau-Symbol}}(\underbrace{\|(t,s)\|_2}_{\text{2-Norm in } \mathbb{R}^2}{}^{n+1})$$

Tipp: Satz von Taylor. Dabei ist $p_0 = p_1 = 0$.

d) Wir betrachten jetzt die Fkt

$$\Lambda : \{(t,s) \in \mathbb{R}^2 \mid x_0 + t(v + sw) \in \mathcal{U}\} \to \mathbb{R}$$

$$\Lambda(t,s) = \begin{cases} \frac{1}{t^2} h(t,ts) = \frac{1}{t^2} g(x_0 + t(v+sw)) - g(x_0), & \text{für } t \neq 0 \\ \frac{1}{2} g''(x_0)(v+sw, v+sw), & \text{für } t=0 \end{cases}$$

Zeige, dass Λ glatt ist.

Tipp: Benutze Teil c) und zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ $p_n(t,ts)$ durch t^2 teilbar ist.

e) Zeige: $\Lambda(0,0)=0$ und $\frac{\partial \Lambda}{\partial s}(0,0) = g''(x_0)(v,w) \neq 0$

Zeige dann, dass es eine Fkt. $t \mapsto s(t)$ gibt s.d. $g(x_0 + t(v + s(t)w)) = g(x_0)$ gilt. Dabei ist s eine glatte Fkt und $s(0) = 0$ und

es gilt $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} t\,(v + s(t)\,w) = v$.

f). Zeige, dass die Vektoren $v \in \mathbb{R}^n$ mit

$g(x_0)(v, v) = 0$ und $g''(x_0)(v, w) \neq 0$ für

ein $w \in \mathbb{R}$ den VR $\mathbb{R}^n$ aufspannen.

Tipp: Benutze Teil a) und b).

g) Folgere aus f), dass $x_0 \in A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) = g(x_0)\}$

nur dann ein lokaler Extremwert von $f|_A$

sein kann, wenn $f'(x_0) = 0$ gilt.