FAKULTÄT FÜR WIRTSCHAFTSINFORMATIK
UND WIRTSCHAFTSMATHEMATIK

UNIVERSITÄT MANNHEIM

Prof. Dr. Martin Schmidt
Eva Lübcke

Analysis II
Woche 2

Gemeinsames Erarbeiten von Lösungswegen

1. Weitere Konsequenzen unendlich vieler Dimensionen.

(a) Die Sätze von Bolzano-Weierstraß (Satz 3.13 und Übungsaufgabe 2.1) und Heine-Borel (Satz 9.27) wurden in der Vorlesung nur für den $\mathbb{K}^n$ bewiesen. Sie gelten auch allgemein auf endlich-dimensionalen Vektorräumen. In unendlich dimensionalen normierten Räumen gelten diese Sätze nicht.

Man mache sich dies durch Konstruktion eines Gegenbeispiels im Folgenraum l^2 klar.

Dabei ist l^2 der Teilraum des Raumes aller Folgen reeller oder komplexer Zahlen, welcher aus allen Folgen $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besteht, welche

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^2 < \infty$$

erfüllen. Dieser wird durch

$$\|\cdot\|_2 : l^2 \to \mathbb{R}, x \mapsto \|x\|_2 := \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^2\right)^{1/2}$$

zu einem normierten Vektorraum.

(b) Betrachte den normierten Vektorraum $(C([0,2],\mathbb{R}), \|\cdot\|_0)$, wobei $C([0,2],\mathbb{R})$ der stetigen Funktionen auf dem Definitionsbereich $[0,2]$ ist, $\|\cdot\|_0$ die Norm aus Aufgabe 1.3 und die Menge definiert ist als

$$M := \{f \in C([0,2],\mathbb{R}) \mid \|f\|_0 \leq 4\}.$$

Beweise, dass M abgeschlossen und beschränkt aber nicht kompakt ist.

2. Kompaktheit.

Sei (X,d) ein metrischer Raum, in dem jede Teilmenge abgeschlossen ist.

(a) Zeige, dass genau die endlichen Teilmengen von X kompakt sind.

(b) Sei nun X eine unendliche Menge. Kann man d so wählen, dass alle Teilmengen bezüglich d kompakt sind?