

Prof. Dr. Martin Schmidt
Eva Lübcke

Zusatzaufgaben

Analysis II
Woche 9

1. Kugelkoordinaten.

Berechne die Jacobi-Matrix und die Determinante der Jacobi-Matrix der durch

$$v(r, \theta, \varphi) := \begin{pmatrix} r \cos(\theta) \sin(\varphi) \\ r \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ r \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

definierten Abbildung $v : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. In welchen Punkten (r, θ, φ) ist die Jacobimatrix regulär? Zwischen welchen Teilmengen Urbild- und Bild- bereich sind diese Abbildungen jeweils bijektiv?

2. Extremwerte unter Nebenbedingungen.

(a) Prüfe, ob die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \exp(x + y)$$

unter der Nebenbedingung $xy = 0$ lokale Extremwerte besitzt und bestimme diese gegebenenfalls.

(b) Bestimme die Maxima und Minima des Polynoms

$$f(x, y) = 4x^2 - 3xy$$

auf der Kreisscheibe $K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

(*Hinweis:* Berechne zunächst die lokalen Extrema von f im Innern von K und dann auf dem Rand von K , d.h. unter der Gleichungsnebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$.)

(c) Zerlege die reelle Zahl $a > 0$ so in drei positive Summanden, dass deren Produkt maximal ist.

(d) Bestimme mit Hilfe des Euler-Lagrange-Formalismus den euklidischen Abstand des Punktes $x^* := (1, -1, 0)^T \in \mathbb{R}^3$ zum Rotationshyperboloid

$$M := \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 1\}.$$