Prof. Dr. Martin Schmidt
Eva Lübcke

Analysis II
Woche 2

Zusatzaufgaben

1. Grundlagen metrischer Räume.

(a) **(i)** Seien $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$ Teilmengen von $\mathbb{R}$. Finde ein *Beispiel*, so dass die Offenheit und Abgeschlossenheit der Menge A von der Wahl der Menge B abhängt.

(ii) Gebe ein *Beispiel* für eine Menge A in $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, die weder offen noch abgeschlossen ist.

(b) Sei A eine Menge in einem metrischen Raum X. Dann ist ein Punkt $x_0 \in A$ genau dann ein *innerer Punkt* von A, wenn es eine Umgebung U von x_0 gibt, die ganz in A enthalten ist. Das *Innere* A° von A ist definiert als die Menge aller inneren Punkte von A und ihr *Rand* ∂A als $\overline{A} \cap \overline{X \setminus A} = \overline{A} \setminus A^\circ$.

(i) *Zeige*, dass die Menge A genau dann offen ist, wenn $A = A^\circ$.

(ii) *Zeige*, dass die offenen Mengen äquivalenter Normen übereinstimmen.

(iii) *Bestimme* das Innere, den Abschluß und den Rand der folgenden Mengen im $\mathbb{R}^n$:

$$A_1 := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_\infty < 1,\, x_i \in \mathbb{Q}, i = 1 \dots n\},$$
$$A_2 := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 \leq 1, x_1 = 0\}.$$

2. Häufungspunkte und Abgeschlossenheit.

Wir betrachten die Menge

$$M := \left\{ 1 + \frac{(-1)^n}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

(a) Bestimme alle Häufungspunkte der Menge M.

(b) Ist M abgeschlossen?

(c) Ist M kompakt?