

Prof. Dr. Martin Schmidt  
Eva Lübcke

**Zusatzaufgaben**

Analysis II  
Woche 13

**1. Gaußscher Satz.**

(a) Berechne  $\int_{\partial Z} v \cdot n \, d\sigma$  für das Zylindergebiet

$$Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < z < 5, x^2 + y^2 < 9\}$$

und das Vektorfeld  $v(x, y, z) = (x + y, y + z, z + x)$ . Hierbei darf verwendet werden, dass der Gaußsche Satz auch für Gebiete mit stückweisem  $C^2$ -Rand gilt.

(b) Seien  $a, b, c > 0$  und

$$E := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 \leq 1 \right\}.$$

Berechne

$$\int_{\partial E} u \cdot N \, d\sigma$$

für das Vektorfeld  $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $(x, y, z)^T \mapsto (x, y, z)^T$ .

**2. Nochmal mehrdimensionale Integration.**

Sei  $B^3(0, R) \subset \mathbb{R}^3$  der Ball um den Ursprung in  $\mathbb{R}^3$  mit Radius  $R > 0$  und  $S^2 = \partial B^3(0, 1)$ .

(a) Berechne das Volumen von  $B^3(0, R)$ ,

(b) Berechne das Integral  $\int_{B^3(0, R)} \exp(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} \, d\mu$ .

(c) Berechne mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes das Integral

$$\int_{S^2} \left( \frac{1}{2}x^2 + y + z \right) \, d\mu$$

*Tipp:* Verwende, falls notwendig, die Kugelkoordinaten  $x = r \sin \theta \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \theta \sin \varphi$ ,  $z = r \cos \theta$  mit Radius  $r > 0$  und Winkeln  $\theta \in [0, \pi]$  sowie  $\varphi \in [0, 2\pi]$ .

**3. Berechnung von Flächeninhalten mit dem Satz von Gauß.**

Zeigen Sie, dass das elliptische Paraboloid

$$P = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z, x, y \in [-1, 1]\}$$

und das Hyperboloid

$$H = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - y^2 = z, x, y \in [-1, 1]\}$$

als Flächen im  $\mathbb{R}^3$  den gleichen Flächeninhalt besitzen. Wieder darf verwendet werden, dass der Gaußsche Satz auch für Gebiete mit stückweisem  $C^2$ -Rand gilt.

*Tipp:* Es ist nicht nach dem konkreten Inhalt der Flächen gefragt.