

Prof. Dr. Martin Schmidt
Eva Lübcke

Zusatzaufgaben

Analysis II
Woche 12

1. Jacobische Integrationsformel.

(a) Wir betrachten die Parametertransformation

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (t, s) \mapsto (x, y) \text{ mit } x = \frac{1}{3}(t + s) \text{ und } y = \frac{1}{3}(2t - s)$$

sowie das Integrationsgebiet

$$O := \{ \Phi(t, s) \mid 0 < t < 1 \text{ und } 0 < s < 1 \}.$$

Berechne durch Anwendung der Jacobischen Transformationsformel für die Transformation Φ das Integral

$$\int_O (x + y)^{2011} \cdot \exp(2x - y) \, d\mu.$$

Dabei soll auch *überprüft* werden, dass alle Voraussetzungen der Jacobischen Transformationsformel erfüllt sind.

(b) Gegeben sei die *Spirale des Archimedes*, welche durch die Kurve der Abbildung

$$f : [0, 3\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \varphi \mapsto f(\varphi) = (x(\varphi), y(\varphi)) = (\varphi \cos(\varphi), \varphi \sin(\varphi))$$

beschrieben wird.

Sei O die offene Teilmenge von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, welche von der Kurve von $f|_{[0, \pi]}$ und $f|_{[2\pi, 3\pi]}$ sowie $y = 0$ begrenzt wird und die in der Skizze auf der nächsten Seite grau dargestellt wird.

Die Abbildung

$$\Phi : \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi), \quad (r, \varphi) \mapsto (r \cos(\varphi), r \sin(\varphi))$$

bildet die Menge

$$U := \{(\varphi, r) \mid \varphi \in (0, \pi), \varphi < r < \varphi + 2\pi\}$$

bijektiv auf O ab.

- (i) Skizziere die Menge U und bestimme auf welche Teile des Randes von O die Kanten von U durch Φ abgebildet werden.
- (ii) Bestimme den Flächeninhalt von O . Dabei soll auch *überprüft* werden, dass alle Voraussetzungen der Sätze, die angewandt werden, erfüllt sind.

2. Lebesgue-Theorie.

Es sei $f \in L^1(\mathbb{R})$. Zeige:

$$\lim_{r \rightarrow 0+} \int_{[0, r]} f \, d\mu = 0.$$

Tipp: Es genügt zu zeigen, dass für jede Nullfolge $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $r_n > 0$ gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0, r_n]} f \, d\mu = 0$. Dies kann mit Hilfe von Lebesgue's Satz der beschränkten Konvergenz gezeigt werden.

