Fakultät für Wirtschaftsinformatik
und Wirtschaftsmathematik

Universität Mannheim

Prof. Dr. Martin Schmidt
Eva Lübcke

Analysis II
Woche 4

Zusatzaufgaben

1. Stetigkeit.

Betrachte den metrischen Raum (Y, d) mit beliebiger norm-induzierter Metrik und

$$Y := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le |x| \le 2, 1 \le |y| \le 2\}.$$

(a) Zeige, dass Y kompakt ist.

(b) Zeige, dass die Funktion

$$f : Y \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \frac{1}{x^2 + y^2}$$

gleichmäßig stetig ist.

2. Die Menge der linearen invertierbaren Abbildungen von $\mathbb{K}^n$ nach $\mathbb{K}^n$.

Sei

$$M := \{A \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n) \mid \exists\, B \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n) : AB = BA = \mathbb{1}\}.$$

(a) Zeige, dass M offen in $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ ist.
Hinweis: Benutze, dass für $A \in M$ gilt, dass $A + B = A(\mathbb{1} + A^{-1}B)$ gilt und verwende die Neumannsche Reihe.

(b) Zeige, dass M dicht in $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ ist.
Hinweis: Betrachte die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\det(\lambda\mathbb{1} - A)$.

3. Wiederholung zur linearen Algebra.

Gegeben seien zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume V und W. Sei $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V und sei $f : V \to W$ eine $\mathbb{K}$-lineare Abbildung. Dann ist f eindeutig bestimmt durch die n Vektoren $w_1 = f(v_1), \ldots, w_n = f(v_n)$ aus W (vgl. lineare Algebra). Beweise die folgenden beiden Aussagen:

(a) f ist injektiv $\iff$ $w_1, \ldots, w_n$ sind linear unabhngig in $\mathbb{K}^n$.

(b) f ist surjektiv $\iff$ $w_1, \ldots, w_n$ bilden ein Erzeugendensystem von W.