

Prof. Dr. Martin Schmidt

Analysis II

Eva Lübcke

Übungsblatt 7

29. März 2017

1. Gradient, Rotation, Divergenz.

- (a) Es sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ in $x \in \mathbb{R}^n$ differenzierbar. Zeige, dass für jeden Vektor $e \in \mathbb{R}^n$ mit $\|e\| = 1$ gilt:

$$-\|\nabla f(x)\| \leq f'(x) \cdot e \leq \|\nabla f(x)\|. \quad (\star)$$

Zeige zudem, dass für $\nabla f(x) \neq 0$ in (\star) in der linken bzw. rechten Ungleichung Gleichheit gilt, wenn $e = -\frac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|}$ bzw. $e = \frac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|}$ ist. (3 Punkte)

Interpretation: $\nabla f(x)$ gibt die Richtung und den Betrag des größten Anstiegs von f an der Stelle x an.

- (b) Sei $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein zweimal stetig differenzierbares Vektorfeld. Berechne $\operatorname{div}(\operatorname{rot} g)$. (4 Punkte)
- (c) Zeige, dass das differenzierbare Vektorfeld $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ nur dann Gradient einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ sein kann, wenn $\operatorname{rot}(g) = 0$ ist. (4 Punkte)
- (d) Es sei

$$g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (2 + 3y^2 + z(8x + y), x(6y + z), x(4x + y)).$$

- (i) Zeige $\operatorname{rot}(g) = 0$. (3 Punkte)

- (ii) Zum Knobeln: Finde eine Funktion $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, deren Gradient das Vektorfeld g ist. (5 Zusatzpunkte)

2. Zu Satz 10.27: Hinreichendes Kriterium für lokale Extremwerte.

- (a) Es sei $\beta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform. Zeige: Wenn β positiv definit (bzw. negativ definit) ist, d.h. wenn $\beta(x, x) > 0$ (bzw. $\beta(x, x) < 0$) für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt, dann gibt es ein $\delta > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit

$$\beta(x, x) \geq \delta \|x\|^2 \quad \text{bzw.} \quad \beta(x, x) \leq -\delta \|x\|^2.$$

(5 Punkte + 5 Zusatzpunkte)

[Tipp: Satz 9.37]

- (b) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion und $x_0 \in U$ ein kritischer Punkt von f . Indem man zeigt, dass die Voraussetzungen von Satz 10.27 erfüllt sind, beweise man: Wenn

$$f''(x_0)(x, x) > 0 \quad \text{bzw.} \quad f''(x_0)(x, x) < 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt, so besitzt f in x_0 ein lokales Minimum (bzw. ein lokales Maximum). (2 Punkte)

Bemerkung. Diese Verschärfung von Satz 10.27 gilt nicht, wenn f auf einem unendlich-dimensionalen normierten Vektorraum definiert ist, siehe Beispiel 10.28.

3. Extremwertsuche.

- (a) Bestimme alle lokalen Extrema der Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ und $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ aus Aufgabe 6.1(a), und *entscheide* jeweils, ob es sich um ein Maximum oder ein Minimum handelt. (3+4+4 Punkte)
- (b) Es sei X ein Untervektorraum des \mathbb{R}^n und $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ sowie $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ seien Funktionen mit $\tilde{f}|_X = f$ und \tilde{f} differenzierbar. Zeige, dass f differenzierbar ist und dass für alle $x \in X$ gilt, dass $f'(x) = \tilde{f}'(x)|_X$. (3 Punkte)
- (c) Es sei X ein Untervektorraum des \mathbb{R}^n und $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus X$. Wir betrachten die Funktion

$$f : X \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \|x - x_0\|^2,$$

wobei $\|v\| = \sqrt{v \cdot v}$ die euklidische Norm von \mathbb{R}^n bezeichnet. Indem man die Methoden der Extremwertsuche auf f anwendet, *zeige* man, dass es genau einen Punkt $x_1 \in X$ gibt, in dem f ein lokales Minimum annimmt und dass der Verbindungsvektor $x_1 - x_0$ senkrecht zu X ist. (Tatsächlich hat f in x_1 sogar ein globales Minimum.)

[Tipp: Benutze Aufgabenteil (b).]

(4 Punkte)

- (d) Bestimme $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass die Funktion $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto at + b$ die Wurzelfunktion \sqrt{t} auf dem Intervall $[0, 1]$ optimal quadratisch approximiert, das heißt so, dass

$$\int_0^1 (\sqrt{t} - (at + b))^2 dt$$

möglichst klein wird.

(4 Punkte)

4. Ein Taylorpolynom.

Es sei

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \cos(xy).$$

- (a) Berechne das Taylorpolynom zweiter Ordnung $T_{2,(\frac{1}{2},\pi)}f(x, y)$ von f an der Stelle $(\frac{1}{2}, \pi)$. (4 Punkte)
- (b) Benutze $T_{2,(\frac{1}{2},\pi)}f(x, y)$, um eine Näherung für $\cos(xy)$ an $(0.9, 1.6)$ zu berechnen und *vergleiche* diese Näherung mit dem Ergebnis des Taschenrechners. (3 Punkte)

Die Lösungen sind bis Mittwoch, den 5. April 2017, um 8.30 Uhr in die Briefkästen in A5 einzuwerfen.