Prof. Dr. Martin Schmidt
Eva Lübcke

Analysis II

Übungsblatt 9

26. April 2017

1. Singularitäten.

Es sei

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto x^2 - x^4 - y^2\ .$$

(a) *Untersuche* die Niveaumengen von g daraufhin, ob sie glatte Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ sind, und *bestimme* andernfalls ihre Singularitäten. *(4 Punkte)*

(b) *Skizziere* die Niveaumengen von g, die Singularitäten besitzen sowie einige weitere. *(3 Punkte)*

Sei nun

$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto \sin(x)\sin(y)$$

(c) *Untersuche* die Niveaumengen von h daraufhin, ob sie glatte Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ sind, und *bestimme* andernfalls ihre Singularitäten. *(4 Punkte)*

(d) *Skizziere* die Niveaumengen von h, die Singularitäten besitzen für $(x, y) \in [-\pi, \pi]^2$.
Hinweis: Da h sowohl periodisch in x- als auch in y-Richtung ist, genügt es die Singularitäten auf dieser Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ zu skizzieren. *(3 Punkte)*

2. Extremwertsuche unter Nebenbedingungen.

(a) Sei $U := \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}^2$ und

$$f : U \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto x + y \quad \text{und} \quad g : U \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto x^3 + y^3 - 3xy\ .$$

(i) *Zeige*, dass die Niveaumengen zu $g(x, y) = c$ mit $c \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$ glatt sind. *(2 Punkte)*

(ii) *Bestimme* die Gesamtheit aller kritischen Punkte von f auf den Niveaumengen $g(x, y) = c$ mit $c \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$. (Wenn man festzustellen versucht, welcher der kritischen Punkte auf einer vorgegebenen Niveaufläche liegt, kommt man auf eine kubische Gleichung, die nicht gelöst zu werden braucht.) *(4 Punkte)*

(b) *Begründe*, dass die folgenden Funktionen Maximum und Minimum unter den gegebenen Nebenbedingungen annehmen und *bestimme* die Stellen, an denen die (globalen) Extrema angenommen werden.

(i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto x - 6y$ unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 4$, *(4 Punkte)*

(ii) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto x^2 + y^2$ unter der Nebenbedinung $x^2 - xy + y^2 = 3$, *(5 Punkte)*

(iii) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x, y, z) \mapsto 5x + y - 3z$ unter der Nebenbedingung $x + y + z = 0$ und $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. *(4 Punkte)*

(c) *Begründe*, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x,y,z) \mapsto 4(x^2 + xy + y^2) + z^2$$

auf der Menge

$$M := \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 9 \,\}$$

Maximum und Minimum annimmt und *bestimme* den maximalen und den minimalen Wert.

(5 Punkte)

[*Tipp:* Betrachte den Rand $\partial M := \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = 9 \,\}$ und das Innere $M^\circ := \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 < 9 \,\}$ einzeln.]

3. Ein Tetraeder.

Wir betrachten in $\mathbb{R}^3$ das Tetraeder mit den Eckpunkten $A := (0,0,0)$, $B := (2,0,0)$, $C := (0,3,0)$ und $D := (0,0,4)$.

(a) *Begründe,* dass es einen Punkt in $\mathbb{R}^3$ gibt, für den die Summe S der Quadrate der Entfernungen von den Ecken minimal ist und *bestimme* diesen Punkt sowie den Wert von S.

(4 Punkte)

(b) Wo liegt der gesuchte Punkt, wenn man zusätzlich fordert, dass er auf der Sphäre mit der Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ liegen soll? *(4 Punkte)*

(c) Wo liegt der Punkt, wenn er nicht nur auf der Sphäre, sondern außerdem auf der Ebene mit der Gleichung $x + y + z = 0$ liegen soll? *(4 Punkte)*

Die Lösungen sind bis Mittwoch, den 3. Mai 2017, um 8.30 Uhr in die Briefkästen in A5 einzuwerfen.