Prof. Dr. Martin Schmidt
Eva Lübcke

Analysis II
5. April 2017

Übungsblatt 8

1. Der Banachsche Fixpunktsatz.

(a) **(i)** *Zeige* mit Hilfe des Banachschen Fixpunksatzes 11.1, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^{-\frac{x}{2}} - x$$

im Intervall $[0, 1]$ genau eine Nullstelle besitzt. *(5 Punkte)*

(ii) Verwende einen Taschenrechner, um die ersten drei Näherungen der Nullstelle x^* von $f(x)$ mit Startwert $x_0 = 0$ zu *berechnen*. Nach wievielen Schritten wäre eine Genauigkeit von 10^{-10} erreicht? *(4 Punkte)*

(b) Wir betrachten die Funktion

$$f : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \mapsto \left(1 - \tfrac{y^2}{3}\, ,\, 1 - \tfrac{x^2}{4}\right) .$$

Zeige, dass f genau einen Fixpunkt $(x^*, y^*) \in [0, 1] \times [0, 1]$ besitzt und *folgere*, dass die Gleichung $x^4 - 8x^2 + 48x - 32 = 0$ genau eine Lösung in $[0, 1]$ besitzt. *(5 Punkte)*
[*Tipp:* Man verwende die Maximumsnorm $\| \cdot \|_\infty$ auf $\mathbb{R}^2$.]

2. Picard-Iteration.

Gegeben ist das Anfangswertproblem

$$\dot{u}(t) = u(t), \quad u(0) = 1 . \tag{$\star$}$$

(a) Verwende das Iterationsverfahren von Picard

$$u_0(t) = 1 , \qquad u_{n+1}(t) = 1 + \int_0^t u_n(s)\, ds,$$

um die ersten fünf Glieder $u_1, \dots, u_5$ einer Folge zu *bestimmen*, welche nach dem Banachschen Fixpunktsatz gegen die Lösung u von $(\star)$ konvergiert. *(5 Punkte)*
[*Dazu:* Die Konvergenz der Picard-Iteration für kleine t wurde im Beweis von Satz 11.3 gezeigt.]

(b) Wie lautet die Lösung von $(\star)$? *(2 Punkte)*

3. Zum Satz 11.8 über die inverse Funktion.

Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} x + x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

(a) *Zeige,* dass f auf $\mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(0) = 1$, aber in $x = 0$ nicht stetig differenzierbar ist. *(5 Punkte)*
[*Tipp:* Für die Untersuchung bei $x = 0$ kann man Aufgabe 41(b) aus Analysis 1 auf $f(x) - x$ anwenden.]

(b) *Zeige,* dass f auf keiner Umgebung von $x = 0$ injektiv ist. *(5 Punkte)*
[*Tipp:* Angenommen, $f_{|(-\varepsilon,\varepsilon)}$ wäre injektiv für ein $\varepsilon > 0$. Dann wäre $f|_{(-\varepsilon,\varepsilon)}$ nach Satz 6.3 streng monoton und deshalb würde $f'|_{(-\varepsilon,\varepsilon)} \geq 0$ bzw. $f'|_{(-\varepsilon,\varepsilon)} \leq 0$ gelten. Indem man nun für eine geschickt gewählte Nullfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Werte $f'(a_n)$ und $f''(a_n)$ ausrechnet erhält man einen Widerspruch.]

4. Zum Satz über die implizite Funktion.

(a) Wir betrachten eine stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(i) *Zeige*, dass die durch $f(x, y) = c$ lokal bestimmte implizite Funktion $y = g(x)$ einen kritischen Punkt in $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ besitzt, wenn

$$f(x,y) = c, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \neq 0.$$ *(5 Punkte)*

[*Tipp:* Man differenziere die Abbildung $x \mapsto f(x, g(x))$ mit Hilfe der Kettenregel und benutze, dass $f(x, g(x)) = c$.]

(ii) Sei nun f zudem zweimal differenzierbar. *Zeige*, dass in (x, y) ein lokales Maximum vorliegt, wenn

$$\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)}{\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}} > 0. \qquad (\star)$$

(4 Punkte)

Bemerkung: Analog zeigt man dieselbe Aussage auch für ein lokales Minimum mit „< 0“ anstelle von „> 0“ in $(\star)$.

(b) Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ (x, y) \mapsto e^{2y} + y^3 + \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 1.$$

(i) *Bestimme*, für welche $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ die Gleichung $f(x, y) = 0$ lokal in der Form $y = g(x)$ auflösbar ist. *(4 Punkte)*

(ii) *Bestimme* mit Hilfe von (a) die kritischen Punkte von g und *entscheide* jeweils, ob es sich um ein lokales Maximum, ein lokales Minimum oder weder noch handelt. *(3 Punkte)*

(c) *Zeige,* dass man die Schnittmenge $S \subset \mathbb{R}^3$ der beiden Niveaumengen, die durch

$$x^2 - xy + y^2 - z^3 = 0 \quad \text{und} \quad e^{y-x} - z = 0$$

gegeben sind, in der Nähe des Punktes $(1, 1, 1) \in S$ durch eine Kurve in Abhängigkeit von x parametrisieren kann, d.h. dass es eine offene Umgebung $\mathcal{O}$ von 1 in $\mathbb{R}$ und eine offene Umgebung U' von $(1, 1, 1)$ in $\mathbb{R}^3$ sowie eine stetig differenzierbare Abbildung $\alpha : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^2$ (eine „Kurve“) gibt, so dass gilt:

$$S \cap U' = \{ (t, \alpha(t)) \mid t \in \mathcal{O} \}$$ *(3 Punkte)*

5. Wiederholungsaufgaben.

(a) *Noch einmal metrische Räume.*

Untersuche die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{R}^2$ (versehen mit der euklidischen Norm bzw. Metrik) darauf, ob sie offen und/oder abgeschlossen und/oder beschränkt und/oder kompakt und/oder vollständig sind. Dabei genügt jeweils eine knappe Begründung der Behauptung.

(i) $\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^3 + y^3 \leq 1 \}$ *(3 Zusatzpunkte)*

(ii) $\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 < 1 \quad \text{und} \quad y \neq 0 \}$ *(3 Zusatzpunkte)*

(iii) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [\frac{1}{n}, 1]$ *(3 Zusatzpunkte)*

(b) *Noch einmal Extremwertsuche und Differentialrechnung.*

(i) *Bestimme* die kritischen Punkte von $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und *entscheide*, ob es sich dabei um lokale Maxima, Minima oder werder noch handelt. Sind die lokalen Extrema auch globale Extrema?

1. $f(x,y) = x^3 + y^2 - xy^2 + x^2 + 3,$ 2. $f(x,y) = 3x(1-y^2) - x^3.$

(4+4 Zusatzpunkte)

(ii) Bestimme das Taylorpolynom zweiter Ordnung von

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) := \cos\left(\frac{xy}{\pi} + x + y\right).$$

an dem Punkt $(\pi, -\pi)$. *(4 Zusatzpunkte)*

(c) *Noch einmal Dunstkreis des Banachschen Fixpunktsatzes.*

(i) Wir betrachten $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ und

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Zeige, dass f die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt. *Berechne* zudem die ersten zwei Schritte der Fixpunktiteration für $x_0 = (16,16)^T$ sowie den Fixpunkt von f. *(4 Zusatzpunkte)*

(ii) *Das Inverse der komplexen Exponentialfunktion.*

1. *Bestimme* für $z = x + \iota y \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ eine Abbildung $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (u(x,y), v(x,y)) := (\mathrm{Re}(e^z), \mathrm{Im}(e^z))$. *(4 Zusatzpunkte)*
2. *Zeige*, dass F bei allen $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ die Voraussetzungen des Satzes der inversen Funktion erfüllt und *bestimme* die Ableitung der Umkehrfunktion von F bei $(a,b) = F(x,y)$. *(6 Zusatzpunkte)*

(iii) *Bestimme* die Menge S aller Punkte $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$, so dass durch den Satz der impliziten Funktion auf einer Umgebung von (x_0, y_0) eine Funktion $\varphi(x,y)$ existiert mit $z_0 = \varphi(x_0, y_0)$ und alle Lösungen von

$$f(x,y,z) = xy^2 + 4x^2 z + z^2 y^2 = 0$$

von der Form $(x, y, \varphi(x,y))$ sind. *Bestimme* zudem den Gradienten $\nabla\varphi(x,y)$ für einen Punkt der zu S gehört. *(5 Zusatzpunkte)*

6. Ein Kriterium für die Definitheit symmetrischer (2×2)-Matrizen.

Es sei $A := \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & c \end{smallmatrix}\right)$ eine symmetrische (2×2)-Matrix. Bekanntlich ist dann die Determinante bzw. die Spur von A

$$\det(A) := ac - b^2 \quad \text{bzw.} \quad \mathrm{Spur}(A) := a + c\,.$$

Wir nennen A positiv bzw. negativ definit, wenn die durch A beschriebene symmetrische Bilinearform $\beta(x,y) := x \cdot Ay$ diese Eigenschaft hat.

(a) *Zeige*, dass eine symmetrische Matrix genau dann positiv (negativ) definit ist, wenn alle ihre Eigenwerte größer (kleiner) als Null sind. *(4 Zusatzpunkte)*
[*Tipp:* Es darf ohne Beweis verwendet werden, dass für eine symmetrische Matrix A stets eine orthogonale Matrix B (d.h. $B^T = B^{-1}$) exisitiert, so dass

$$A = B^T \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} B \text{ mit } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.]$$

(b) **(i)** A ist genau dann positiv definit, wenn $\det(A) > 0$ und $\mathrm{Spur}(A) > 0$ ist. *(2 Zusatzpunkte)*

(ii) A ist genau dann negativ definit, wenn $\det(A) > 0$ und $\mathrm{Spur}(A) < 0$ ist. *(2 Zusatzpunkte)*

(iii) A ist genau dann indefinit (d.h. es gibt $x, \widetilde{x} \in \mathbb{R}^2$ mit $\beta(x,x) > 0$ und $\beta(\widetilde{x},\widetilde{x}) < 0$), wenn $\det(A) < 0$ ist. *(2 Zusatzpunkte)*

[*Tipp:* In den Aufgabenteilen (b) (i)-(iii) verwende man das charakteristische Polynom von A.]

Bemerkung. Diese Kriterien sind vor allem hilfreich, um zu untersuchen, ob die Hessematrix einer Funktion $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ in einem kritischen Punkt die Voraussetzung von Aufgabe 7.2(b) erfüllt.

Die Lösungen der Aufgaben 1 bis 4 sind bis Mittwoch, den 26. April 2017, um 8.30 Uhr in die Briefkästen in A5 einzuwerfen, die Lösungen der Aufgaben 5 und 6 bis Mittwoch, den 3. Mai 2017, um 8.30 Uhr.