Fakultät für Wirtschaftsinformatik
und Wirtschaftsmathematik

Universität Mannheim

Prof. Dr. Martin Schmidt
Eva Lübcke

Analysis II
8. März 2017

Übungsblatt 4

1. Stetigkeit im $\mathbb{R}^2$.

Man *untersuche* für die folgenden Funktionen $f_k : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto f_k(x,y)$ jeweils, ob f_k in $(0,0)$ stetig fortsetzbar ist (d.h. man untersuche, ob man einen Wert $f_k(0,0) \in \mathbb{R}$ so wählen kann, dass die hierdurch fortgesetzte Funktion $f_k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ in $(0,0)$ stetig ist).

(a) $f_1(x,y) := \dfrac{\sqrt{|x|}y}{|x|+|y|}$ *(5 Punkte)*

(b) $f_2(x,y) := \dfrac{2x-y}{|x|+2|y|}$ *(5 Punkte)*

(c) $f_3(x,y) = \dfrac{x^3\,y}{x^6+y^4}$ *(5 Punkte)*

2. Die Exponentialfunktion für Matrizen.

Wir bezeichnen im Folgenden mit $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ auch den Raum der reellen $(n\times n)$-Matrizen. Wie in der Vorlesung gezeigt wurde, konvergiert für jedes $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ die Potenzreihe $\exp(A) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$ in $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Die Abbildung $\exp : \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ heißt die *(matrixwertige) Exponentialabbildung.*

(a) Sei $t, s \in \mathbb{R}$. *Berechne* $\exp(A)$ für die folgenden $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$:

(i) $A = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$ **(ii)** $A = \begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix}$ **(iii)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$

(3+4+4 Punkte)

[*Tipp:* Man rechne jeweils zuerst A^n für $n \le 3$ aus, um auf Ideen zu kommen, wie A^n allgemein aussieht.]

(b) *Berechne* $e^A \cdot e^B$ und $e^B \cdot e^A$ für

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

(2 Punkte)

(c) Sei $A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ mit $A\cdot B = B\cdot A$. *Zeige:* $\exp(A+B) = \exp(A)\cdot\exp(B)$. Hierbei darf ohne Beweis benutzt werden, dass auch für miteinander kommutierende Matrizen die binomische Formel $(A+B)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} A^j B^{k-j}$ gilt. *(4 Punkte)*

(d) *Folgere* aus (c), dass $\exp(A)$ stets invertierbar ist mit $\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$.

(3 Punkte)

(e) *Zeige*, dass für beliebiges $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ und invertierbares $P \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ gilt, dass $e^{P^{-1}AP} = P^{-1}e^A P$ gilt und *folgere* hieraus, dass für diagonalisierbares $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ auch e^A diagonalisierbar ist. *(3 Punkte)*

3. Derivationen.

Sei V ein Banachraum. Für $A \in \mathcal{L}(V)$ betrachten wir die lineare Abbildung

$$D_A : \mathcal{L}(V) \to \mathcal{L}(V),\ L \mapsto A \cdot L - L \cdot A.$$

(a) *Berechne* $D_A(L)$ für $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ und $L = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$. *(2 Punkte)*

(b) *Zeige*, dass D_A eine Derivation auf $\mathcal{L}(V)$ ist, d.h. dass für alle $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(V)$ gilt:

$$D_A(L_1 \cdot L_2) = D_A(L_1) \cdot L_2 + L_1 \cdot D_A(L_2)\ .$$ *(3 Punkte)*

(c) Sei $A \in \mathcal{L}(V)$. Dann sind Links- und Rechtsmultiplikation $\ell(A)$ und $r(A)$ in $\mathcal{L}(\mathcal{L}(V))$ definiert als

$$\ell(A) : \mathcal{L}(V) \to \mathcal{L}(V), \quad L \mapsto A \cdot L$$

und

$$r(A) : \mathcal{L}(V) \to \mathcal{L}(V), \quad L \mapsto L \cdot A.$$

Zeige, dass für $A, B \in \mathcal{L}(V)$ gilt

$$r(B)\ell(A) = \ell(A)r(B).$$ *(2 Punkte)*

(d) *Zeige*, dass $\exp(\ell(A)) = \ell(\exp(A))$ und dass $\exp(r(A)) = r(\exp(A))$.
Tipp: Zeige, dass $\ell(A^n) = (\ell(A))^n$ bzw. $r(A^n) = (r(A))^n$ und benutze dieses. *(3 Punkte)*

(e) *Zeige* mit Hilfe von Aufgabe 4.2(c) sowie (c) und (d), dass

$$\exp(D_A)L = \exp(A) \cdot L \cdot \exp(-A).$$

Dabei wird $\exp(D_A)$ in $\mathcal{L}(\mathcal{L}(V))$ und $\exp(\pm A)$ in $\mathcal{L}(V)$ gebildet. *(2 Punkte)*

Die Lösungen sind bis Mittwoch, den 15. März 2017, um 8.30 Uhr in die Briefkästen in A5 einzuwerfen.