FAKULTÄT FÜR WIRTSCHAFTSINFORMATIK
UND WIRTSCHAFTSMATHEMATIK

UNIVERSITÄT MANNHEIM

Prof. Dr. Martin Schmidt
Eva Lübcke

Analysis II

Übungsblatt 10

3. Mai 2017

1. Über Quader, Treppenfunktionen und charakteristische Funktionen.

(a) Seien Q_1, Q_2 zwei Quader des $\mathbb{R}^d$.

(i) *Zeige:* $Q_1 \cap Q_2$ ist die leere Menge oder ein Quader des $\mathbb{R}^d$. *(3 Punkte)*

(ii) *Beweise oder widerlege:* $Q_1 \cup Q_2$ ist ein Quader des $\mathbb{R}^d$. *(1 Punkt)*

(b) Wie in der Vorlesung definieren wir zu einer jeden Menge $M \subset \mathbb{R}^d$ die *charakteristische Funktion* $\chi_M : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ durch $\chi_M(x) = 1$ für $x \in M$ und $\chi_M(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R}^d \setminus M$. Es seien nun A, B zwei Teilmengen des $\mathbb{R}^d$. *Zeige*:

(i) $\chi_{A\cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$ *(2 Punkte)*

(ii) $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \cdot \chi_B$ *(3 Punkte)*

(c) Es seien $f, g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ zwei Treppenfunktionen. *Zeige*, dass dann auch

$$f + g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) + g(x) \quad \text{und} \quad f \cdot g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) \cdot g(x)$$

Treppenfunktionen sind. *(4 Punkte)*

2. Nullmengen.

(a) Eine Teilmenge

$$H_j(c) := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_j = c\}$$

des $\mathbb{R}^n$ heißt Hyperebene. *Zeige*, dass $H_j(c)$ eine Nullmenge ist.
Tipp: Eine Möglichkeit dies zu zeigen ist für $k \in \mathbb{N}$ die Quader

$$Q_k := \left(a_1^{(k)}, b_1^{(k)}\right) \times \cdots \times \left(a_n^{(k)}, b_n^{(k)}\right)$$

mit den Intervallendpunkten

$$a_i^{(k)} := \begin{cases} -k & \text{falls } i \neq j \\ c - \frac{\varepsilon}{2^{k+1}(2k)^{n-1}} & \text{falls } i = j \end{cases}, \quad b_i^{(k)} := \begin{cases} k & \text{falls } i \neq j \\ c + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}(2k)^{n-1}} & \text{falls } i = j \end{cases}$$

für $i = 1, \ldots, n$ zu betrachten. *(4 Punkte)*

(b) Sei $f : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und deren Graph sei gegeben durch

$$G(f) := \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}^{n-1}\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Zeige, dass $G(f)$ eine Nullmenge ist. *(4 Punkte)*
Tipp: Begründe zunächst, warum es ausreicht, die Funktion f auf einem kompakten Quader $Q \subset \mathbb{R}^{n-1}$ mit Kantenlänge 1 zu betrachten, d.h. $|a_i - b_i| = 1$ für $i = 1, \ldots, n-1$. Um zu zeigen, dass $G(f)|_Q$ eine Nullmenge ist zerlege man diesen Quader in endlich viele Teilquader Q_k, auf denen man die Schwankung $\sup_{x,y\in Q_k} |f(x) - f(y)|$ kontrollieren kann.

3. Lesbegue-integrable Funktionen.

(a) *Zeige*, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 3 & \text{falls } x \in [0,2] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}), \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Lesbegue-integrabel (Kapitel 12), aber auf dem Intervall $[0,2]$ nicht Riemann-integrabel (Kapitel 8) ist und *berechne* $\int f \, d\mu$ im Sinne der Lesbegueschen Theorie. *(5 Punkte)*

(b) *Zeige*, dass die Funktion

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} n & \text{falls } x \in \left(\frac{1}{(n+1)!}, \frac{1}{n!}\right] \text{ für ein } n \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Lesbegue-integrabel ist. *(4 Punkte)*

(c) *Berechne* $\int g \, d\mu$ für die Funktion g aus (b). *(5 Punkte)*
[*Tipp:* Man benutze die Reihendarstellung von e.]

4. Das Cantorsche Diskontinuum.

Wir definieren rekursiv eine Folge $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Teilmengen von $\mathbb{R}$ durch

$$C_0 := [0,1] \quad \text{und} \quad C_{n+1} := \tfrac{1}{3} C_n \cup \left(\tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{3} C_n\right) \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0.$$

Dann heißt $C := \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$ das *Cantorsche Diskontinuum.*

(a) *Skizziere* C_n für $n = 0, 1, 2, 3$. *(2 Punkte)*

(b) *Zeige,* dass C eine kompakte Nullmenge in $\mathbb{R}$ ist. *(8 Punkte)*
Tipp: Man zeige der Reihe nach:

(1) Für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $C_{n+1} \subset C_n \subset [0,1]$.
(2) C_n ist kompakt für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ und daher ist auch C kompakt.
(3) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist C_n eine disjunkte Vereinigung von endlich vielen endlichen Quadern von $\mathbb{R}$ und die Summe der Maße dieser Quader beträgt $(\frac{2}{3})^n$.
(4) C ist eine Nullmenge.

Hierbei werden die Schritte (1)-(3) induktiv gezeigt.

(c) *Zeige,* dass C überabzählbar ist. *(5 Punkte)*
[*Tipp:* Zeige zunächst, dass $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{3^{i+1}} \in C$ für jede Folge $(a_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ mit $a_i \in \{0, 2\}$ gilt und konstruiere sodann mithilfe der Darstellung reeller Zahlen zur Basis 2 eine injektive Abbildung $[0,1] \to C$.]

Die Lösungen sind bis Mittwoch, den 10. Mai 2017, um 8.30 Uhr in die Briefkästen in A5 einzuwerfen.