FAKULTÄT FÜR WIRTSCHAFTSINFORMATIK
UND WIRTSCHAFTSMATHEMATIK

UNIVERSITÄT MANNHEIM

Prof. Dr. Martin Schmidt
Eva Lübcke

Analysis II
17. Mai 2017

Übungsblatt 12

1. Integralberechnung mit der Jacobischen Transformationsformel.

(a) Es sei A das rautenförmige Gebiet, welches durch die Geraden $x+2y=2$, $x-2y=2$, $x+2y=-2$ und $x-2y=-2$ berandet wird.

(i) *Finde* Koordinaten u, v so dass es eine lineare Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(u,v) \mapsto (x,y)$ gibt, so dass $A' = \Phi^{-1}[A]$ ein Quadrat der Seitenlänge 4 ist. Drücke (x,y) mit Hilfe der Koordinaten (u,v) aus. *(4 Punkte)*

(ii) Benutze diese Koordinaten, um $\int\limits_A (3x+6y)^2 \, \mathrm{d}\mu$ zu *berechnen.* *(3 Punkte)*

(b) Es sei

$$B := \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y > 0 \text{ und } x+y \leq 3 \,\} .$$

Berechne $\int_B \exp\left(\frac{y-x}{y+x}\right) \mathrm{d}\mu$ mit Hilfe der Transformationsformel. *(5 Punkte)*

(c) Gegeben seien die Parabeln $P_1 : y = x^2$, $P_2 : y = 2x^2$, $P_3 : x = y^2$, $P_4 : x = 3y^2$ für $x, y > 0$. Wir betrachten die Fläche C zwischen den Stücken von P_1 und P_2, die jeweils Schnittpunkte mit P_3 und P_4 haben und den Stücken von P_3 und P_4, die jeweils Schnittpunkte mit P_1 und P_2 haben.

Skizziere die Fläche C im $\mathbb{R}^2$ und *berechne* deren Flächeninhalt $\mu(C) = \int \chi_C \, d\mu$ mit Hilfe der Jacobischen Transformationsformel. *(6 Punkte)*

Tipp: Beachte, dass auf den Rändern von C gilt, dass entweder $\frac{y}{x^2}$ oder $\frac{x}{y^2}$ konstant ist und dass es ausreicht die inverse Transformation $\Phi^{-1}(x,y)$ zu kennen, um $\det(\Phi(u,v))$ zu bestimmen.

(d) Es sei D das durch die Ellipsen $9x^2 + y^2 = 9$ und $9x^2 + y^2 = 81$ sowie die Geraden $y = -x$ und $y = 0$ eingeschlossene Gebiet im zweiten Quadranten der xy-Ebene.

(i) *Bestimme* das Gebiet D' der $r\varphi$-Ebene, in das D unter der Koordinatentransformation $x = r \cdot \cos(\varphi)$, $y = 3r \cdot \sin(\varphi)$ übergeht. *(3 Punkte)*

(ii) *Skizziere* D in der xy-Ebene sowie D' in der $r\varphi$-Ebene. *(2 Punkte)*

(iii) *Berechne* die Jacobi-Matrix der Abbildung

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \; (r, \varphi) \mapsto (x,y) = (r \cdot \cos(\varphi), 3r \cdot \sin(\varphi)) ,$$

die zu der Transformation aus (i) gehört sowie ihre Determinante. *(2 Punkte)*

(iv) *Berechne* mit Hilfe von (i)–(iii) das Integral

$$\int_D \frac{xy}{9x^2+y^2} \, \mathrm{d}\mu . \qquad (4 \text{ Punkte})$$

Tipp: Der Wert $\sin\left(\arctan\left(-\frac{1}{3}\right)\right) = -\frac{1}{\sqrt{10}}$ könnte nützlich sein.

2. Polarkoordinaten.

(a) Es sei $R \in (0, \infty]$, $B_R := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq R^2 \}$ die abgeschlossene Kreisscheibe vom Radius R um Null in $\mathbb{R}^2$ und $f \in L^1(B_R)$ eine auf B_R beschränkte Funktion, deren Unstetigkeitsstellen eine Nullmenge bilden. *Zeige*, dass dann gilt:

$$\int_{B_R} f \,\mathrm{d}\mu = \int_0^R \int_{-\pi}^{\pi} r \cdot f(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}r \;.$$

Diese Formel beschreibt die sogenannte *Integration in Polarkoordinaten.* *(6 Punkte)*

Tipp: Sei $O := B_R \setminus ((-\infty, 0] \times \{0\} \cup \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = R^2 \})$ und $U := (0, R) \times (-\pi, \pi)$ sowie $\Phi : U \to O,\ (r, \varphi) \mapsto (r \cos(\varphi), r \sin(\varphi))$. Man zeige, dass in dieser Situation die Voraussetzungen der Jacobischen Transformationsformel (Satz 12.33) erfüllt sind. Warum gilt $\int_{B_R} f \,\mathrm{d}\mu = \int_O f \,\mathrm{d}\mu$?

(b) Es sei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto \exp(-(x^2 + y^2)) \;.$$

Zeige, dass $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ ist und *berechne* $\int_{\mathbb{R}^2} f \,\mathrm{d}\mu$. *(5 Punkte)*

Tipp: Verwende Aufgabenteil (a) und betrachte zunächst $f \cdot \chi_{B_R}$.

(c) Verwende das Ergebnis von (b), um zu *zeigen*, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) \,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$$

gilt. *(4 Punkte)*

3. Eine L^1-Nullfolge, die nirgends punktweise konvergiert.

Zu jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ existieren eindeutig bestimmte $p, q \in \mathbb{N}_0$ mit $n = 2^p + q$ und $q < 2^p$. Sei

$$I_{p,q} := [q \cdot 2^{-p}, (q + 1)2^{-p}] \quad \text{und } f_n := \chi_{I_{p,q}} .$$

Dann ist $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ offenbar eine Folge in $L^1(\mathbb{R})$.

(a) *Zeige*, dass $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge in $L^1(\mathbb{R})$ ist. *(3 Punkte)*

(b) *Zeige*, dass $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ für kein $x \in [0, 1]$ konvergiert. *(3 Punkte)*

Die Lösungen sind bis Mittwoch, den 24. Mai 2017, um 8.30 Uhr in die Briefkästen in A5 einzuwerfen.