FAKULTÄT FÜR WIRTSCHAFTSINFORMATIK
UND WIRTSCHAFTSMATHEMATIK

UNIVERSITÄT
MANNHEIM

Prof. Dr. Martin Schmidt
Eva Lübcke

Analysis II

Übungsblatt 1

15. Februar 2017

1. Metriken.

(a) Man *beweise* oder *widerlege*, dass durch

$$(x-y)^2$$

eine Metrik auf $\mathbb{R}$ definiert wird. *(3 Punkte)*

(b) *Zeige*, dass durch die Einschränkung der Metrik $d(x,y) = |x-y|$ auf die Vereinigung der Inversen der natürlichen Zahlen mit $\{0\}$ wegen

$$\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\} \simeq \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{0\}$$

eine Metrik auf $\overline{\mathbb{N}}$ gegeben ist durch

$$d(n,m) = \frac{|n-m|}{nm},\ d(n,\infty) = d(\infty,n) = \frac{1}{n},\ d(\infty,\infty) = 0.$$

(3 Punkte)

2. Wie man aus Metriken weitere konstruiert.

(a) Gegeben seien eine Metrik $d : X \times X \to \mathbb{R}$ auf einer Menge X sowie eine monoton steigende Funktion $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ mit $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ und der Eigenschaft

$$\forall\, t,s \in \mathbb{R}_0^+ \ : \ f(t+s) \leq f(t) + f(s)\ .$$

Zeige, dass dann

$$\widetilde{d} : X \times X \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto f(d(x,y))$$

eine weitere Metrik auf X ist. *(4 Punkte)*

(b) *Zeige*, dass die Funktion $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R},\ t \mapsto \frac{t}{1+t}$ die Voraussetzungen aus (a) erfüllt. *(4 Punkte)*

(c) *Folgere* aus (a) und (b), dass durch $\widetilde{d}(x,y) := \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$ mit $x,y \in \mathbb{R}$ eine weitere Metrik auf $\mathbb{R}$ definiert wird. *(4 Punkte)*

(d) Seien $x := (x_i)_{i\in\mathbb{N}}, y := (y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ Folgen in $\mathbb{R}$. Zeige die Konvergenz der Reihe

$$d_F(x,y) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|}.$$

(1 Punkt)

(e) *Zeige* mit Hilfe von (c) und (d), dass durch d_F auf dem Raum (s) aller Folgen in $\mathbb{R}$ eine Metrik gegeben ist, (s) also ein metrischer Raum ist. Eine solche Metrik heißt *Fréchet-Metrik.*

(3 Punkte)

3. Normen.

(a) Sei V ein Vektorraum mit Norm $\|\cdot\|$. Dann bezeichnet man die Menge $\{\, v \in V \mid \|v\| = 1 \,\}$ aller Vektoren von V mit der Norm 1 als *Einheitskugel* in $(V, \|\cdot\|)$.

(i) *Skizziere* die Einheitskugeln von $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$, $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ und $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$. *(3 Punkte)*

(ii) Kann man an den Bildern aus (i) ablesen, dass diese drei Normen äquivalent sind? *(Nur zum Nachdenken)*

(b) Sei $x \in \mathbb{C}^n$. *Zeige*, dass die Maximumsnorm der Grenzwert der $\boldsymbol{p}$-Normen ist, d.h.

$$\|x\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|x\|_p \,. \qquad (6\ \textit{Punkte})$$

[*Tipp:* Ist $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ gegeben, so dividiere man den Ausdruck für $\|x\|_p$ durch $\max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$.]

(c) Sei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Wir bezeichnen mit $C^1([a,b], \mathbb{R})$ den Raum der auf $[a,b]$ stetigen und auf (a,b) stetig differenzierbaren Funktionen $[a,b] \to \mathbb{R}$, deren Ableitung sich stetig auf $[a,b]$ fortsetzen lässt. Ferner sei für $f \in C^1([a,b], \mathbb{R})$

$$\|f\|_0 := \sup\{\, |f(x)| \,\big|\, x \in [a,b] \,\} \quad \text{und} \quad \|f\|_1 := \|f\|_0 + \sup\{\, |f'(x)| \,\big|\, x \in [a,b] \,\} \,.$$

(i) *Zeige*, dass durch $\|\cdot\|_0$ und $\|\cdot\|_1$ zwei Normen auf $C^1([a,b], \mathbb{R})$ definiert werden. *(6 Punkte)*

(ii) *Beweise oder widerlege*: $\|\cdot\|_0$ und $\|\cdot\|_1$ sind zueinander äquivalent. *(6 Punkte)*
[*Tipp:* Untersuche $f(x) := \sin(cx)$ mit $c \geq \frac{2\pi}{b-a}$.]

4. Grundlagen metrischer Räume.
Belege die folgenden Aussagen *durch jeweils ein Beispiel*:

(a) Es gibt einen metrischen Raum, in dem jede Teilmenge zugleich offen und abgeschlossen ist. *(4 Punkte)*

(b) Der Schnitt von unendlich vielen offenen Mengen ist im Allgemeinen weder offen noch abgeschlossen. *(4 Punkte)*

Die Lösungen sind bis Mittwoch, den 22. Februar 2017, um 8.30 Uhr in den Briefkästen in A5 einzuwerfen.