Prof. Dr. Martin Schmidt
Eva Lübcke

Analysis II
22. März 2017

Übungsblatt 6

1. Kritische Punkte, lineare Approximation, Gradient, Rotation und Divergenz.

(a) *Berechne* den Gradienten und *bestimme* alle kritischen Punkte der folgenden Abbildungen:

(i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$ *(4 Punkte)*

(ii) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto y \cdot \sin(x)$ *(4 Punkte)*

(iii) $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x,y,z) \mapsto x^4 + 2y^2 + 2z^2 + 4xz$ *(6 Punkte)*

(b) Berechne die Ebenendarstellung $E : ax + by + cz = d$ der lineare Approximation von

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto x^3 - 5xy^2 - 3y + 4$$

an der Stelle $(x_0, y_0) = (2,1)$ mit $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ und $z = f(x,y)$. *(4 Punkte)*
[*Tipp:* Die lineare Approximation von f an (x_0,y_0) ist gleich dem Taylorpolynom erster Ordnung von f an (x_0,y_0).]

(c) *Berechne* die Rotation und die Divergenz des Vektorfelds

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y,z) \mapsto (x^2y, y^2z, xz)\ .$$ *(3+3 Punkte)*

2. Mehr Rechenregeln für die Ableitung.

(a) Wir betrachten den $\mathbb{R}^n$ mit dem Skalarprodukt $x \cdot y = \sum_{k=1}^n x_k\, y_k$ und der hiervon induzierten Norm $\|x\| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}$.

(i) Sei die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ x \mapsto \|x\|$$

gegeben. *Zeige*, dass $\nabla f(x) = \frac{x}{\|x\|}$ für $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und *begründe*, warum f an $x = 0$ in keine Richtung $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ differenzierbar ist. *(4 Punkte)*

(ii) Sei nun die Abbildung

$$h : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n,\ x \mapsto \frac{x}{\|x\|}$$

gegeben. *Zeige*, dass für die k-te partielle Ableitung von h an einer Stelle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt, dass

$$\frac{\partial h}{\partial x_k}(x) = \frac{1}{\|x\|}\, e_k - \frac{x_k}{\|x\|^3}\, x.$$

Dabei ist $e_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ der k-te Standardeinheitsvektor des $\mathbb{R}^n$. *(5 Punkte)*

(iii) *Folgere* aus (ii), dass h differenzierbar ist und dass für $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ sowie $v \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$h'(x)v = \frac{1}{\|x\|}\, v - \frac{x \cdot v}{\|x\|^3}\, x\ .$$

Dabei bedeutet der Ausdruck $h'(x)v$ die Anwendung der linearen Abbildung
$h'(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ auf den Richtungsvektor v. *(4 Zusatzpunkte)*

(b) Es seien X_1, X_2, Y normierte Vektorräume und $\beta : X_1 \times X_2 \to Y$ eine stetige, bilineare Abbildung. *Zeige*, dass β als Abbildung des Produkt-Vektorraums $X_1 \times X_2$ differenzierbar ist und dass für alle $(x_1, x_2), (v_1, v_2) \in X_1 \times X_2$ gilt:

$$\beta'(x_1, x_2)(v_1, v_2) = \beta(v_1, x_2) + \beta(x_1, v_2)\ . \qquad \textit{(5 Punkte)}$$

[*Tipp:* Satz 10.11.]

3. Geometrische Anschauung des Laplaceoperators in $\mathbb{R}^2$.

Im Folgenden sei $p_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ und $\gamma_r(t) = (r\cos(t), r\sin(t))$ eine Parametrisierung der Kreislinie mit Mittelpunkt 0 und Radius r.

(a) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ein Polynom höchstens ersten Grades. *Zeige*, dass

$$\int_0^{2\pi} \Big(f(p_0 + \gamma_r(t)) - f(p_0) \Big)\, dt = 0. \qquad \textit{(4 Punkte)}$$

(b) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ein Polynom zweiten Grades. *Zeige*, dass dann

$$\frac{2}{\pi r^2} \int_0^{2\pi} \Big(f(p_0 + \gamma_r(t)) - f(p_0) \Big)\, dt = \triangle f(p_0). \qquad \textit{(4 Punkte)}$$

(c) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ nun ein homogenes Polynom in $(x_0 - x, y_0 - y) \in \mathbb{R}^2$ vom Grad größergleich 3, d.h.

$$f(x, y) = \sum_{k+\ell=n} a_k (x - x_0)^k (y - y_0)^\ell$$

mit $n \geq 3$. *Zeige*, dass

$$\lim_{r \to 0} \left(r^{-2} \int_0^{2\pi} \Big(f(p_0 + \gamma_r(t)) - f(p_0) \Big)\, dt \right) = 0. \qquad \textit{(4 Punkte)}$$

(d) Sei schließlich $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. *Folgere* aus (a)-(c) und mit Hilfe der mehrdimensionalen Taylorentwicklung, dass

$$\lim_{r \to 0} \left(\frac{2}{\pi r^2} \int_0^{2\pi} \Big(f(p_0 + \gamma_r(t)) - f(p_0) \Big)\, dt \right) = \triangle f(p_0).$$

(6 Zusatzpunkte)

Bemerkung: Dies bedeutet, dass der Laplace-Operator das Integral über die Abweichung der Funktionswerte von f auf einem infinitesimal kleinen Kreis um $f(p_0)$ zu $f(p_0)$ misst und das Ergebnis mit der Kreisfläche „gewichtet“. Er kann also als *radialsymmetrische Ableitung* von f an p_0 betrachtet werden.

Die Lösungen sind bis Mittwoch, den 29. März 2017, um 8.30 Uhr in die Briefkästen in A5 einzuwerfen.