FAKULTÄT FÜR WIRTSCHAFTSINFORMATIK
UND WIRTSCHAFTSMATHEMATIK

UNIVERSITÄT MANNHEIM

Prof. Dr. Martin Schmidt
Eva Lübcke

Analysis II
22. Februar 2017

Übungsblatt 2

1. Folgenkonvergenz im $\mathbb{R}^n$.

(a) Es sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge im $\mathbb{R}^n$. Wir schreiben das Element $x_k \in \mathbb{R}^n$ jeweils in „Komponenten", d.h. in der Form $x_k = (x_k^1, \ldots, x_k^n)$ mit $x_k^j \in \mathbb{R}$.

Zeige: Die Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann in $\mathbb{R}^n$ bezüglich der Maximumnorm $\|\cdot\|_\infty$, wenn für jedes $j \in \{1, \ldots, n\}$ die „Komponentenfolge" $(x_k^j)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ konvergiert. Ist dies der Fall, so gilt

$$\lim_{k\to\infty} x_k = \Big(\lim_{k\to\infty} x_k^1 \,, \; \ldots \;, \lim_{k\to\infty} x_k^n \Big) \; \in \; \mathbb{R}^n \, .$$ *(6 Punkte)*

Bemerkung. In Satz 9.37 haben wir gesehen, dass je zwei Normen auf dem $\mathbb{R}^n$ äquivalent sind. Die obige Aussage gilt deshalb nicht nur bezüglich der Maximumnorm, sondern auch bezüglich jeder beliebigen anderen Norm auf dem $\mathbb{R}^n$. Dieser Konvergenzbegriff ist gemeint, wenn von der „Konvergenz im $\mathbb{R}^n$" (ohne ausdrückliche Angabe einer Metrik bzw. Norm) die Rede ist.

(b) *Untersuche,* ob die Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit

$$x_k := \Big(\sqrt[k]{k} \,,\; (1+\tfrac{1}{k})^k \,,\; \tfrac{1}{k} \Big) \; \in \; \mathbb{R}^3$$

in $\mathbb{R}^3$ konvergiert und *bestimme* gegebenenfalls den Grenzwert. *(4 Punkte)*

(c) Konvergiert die Folge aus (b) bezüglich der diskreten Metrik (Beispiel 9.2(i)) auf $\mathbb{R}^3$? *(3 Punkte)*

2. Diverses zu metrischen Räumen.

(a) Sei (X, d) ein metrischer Raum. *Zeige*, dass jeder offene Ball in (X, d) eine offene Menge in (X, d) ist. *(3 Punkte)*

(b) *Beweise oder widerlege:* Ist $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen metrischen Räumen X und Y und ist $K \subset Y$ kompakt, so ist auch $f^{-1}[K] \subset X$ kompakt. *(3 Punkte)*

(c) *Beweise oder widerlege:* Für jede Menge X ist die diskrete Metrik auf X (siehe Beispiel 9.2(i)) vollständig. *(4 Punkte)*

(d) *Gebe explizit* eine offene Überdeckung des Intervalls $(0, 1)$ *an*, die keine endliche Teilüberdeckung besitzt. *(4 Punkte)*

3. Vervollständigung metrischer Räume.

Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Wir werden in dieser Aufgabe eine „Vervollständigung“ von X konstruieren.

(a) Es seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Cauchyfolgen von X.
Zeige: Die reelle Zahlenfolge $(d(x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert in $\mathbb{R}$. *(4 Punkte)*
[*Tipp:* Verwende die Ungleichung aus Beispiel 9.33(iii) („Parallelogrammungleichung“), um $|d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)|$ auszurechnen und dass $\mathbb{R}$ vollständig ist.]

(b) Seien $(\widetilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\widetilde{y}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei weitere Cauchyfolgen von X mit $\lim_{n\to\infty} d(x_n, \widetilde{x}_n) = \lim_{n\to\infty} d(y_n, \widetilde{y}_n) = 0$.
Zeige, dass dann $\lim_{n\to\infty} d(\widetilde{x}_n, \widetilde{y}_n) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$ gilt. *(3 Punkte)*
[*Tipp:* Verwende wieder die Parallelogrammungleichung.]

(c) Sei $\mathfrak{C}$ die Menge der Cauchyfolgen von X. Für zwei Cauchyfolgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\widetilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{C}$ schreiben wir $(x_n) \sim (\widetilde{x}_n)$, wenn $\lim_{n\to\infty} d(x_n, \widetilde{x}_n) = 0$ gilt.
Zeige, dass durch $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathfrak{C}$ definiert wird (siehe Abschnitt 1.3). *(3 Punkte)*

(d) Sei $\widetilde{X}$ die Menge der Äquivalenzklassen von $\mathfrak{C}$ bezüglich $\sim$.
Zeige: Dann gibt es genau eine Abbildung $\widetilde{d} : \widetilde{X} \times \widetilde{X} \to \mathbb{R}$, so dass für alle $(x_n), (y_n) \in \mathfrak{C}$ gilt:

$$\widetilde{d}([(x_n)], [(y_n)]) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) \ .$$

Dabei bezeichnen wir für $(x_n) \in \mathfrak{C}$ mit $[(x_n)] \in \widetilde{X}$ die Äquivalenzklasse von (x_n) bezüglich $\sim$. *(3 Punkte)*

(e) *Zeige*, dass $\widetilde{d}$ eine Metrik auf $\widetilde{X}$ ist. *(4 Punkte)*

(f) Für $x \in X$ bezeichnen wir mit $(x) = (x)_{n\in\mathbb{N}}$ auch die Folge in X, die konstant gleich x ist; offenbar ist $(x) \in \mathfrak{C}$. Dann betrachten wir die Abbildung

$$\Phi : X \to \widetilde{X},\ x \mapsto [(x)] \ .$$

Zeige: Φ ist eine *Isometrie*, das heißt, es gilt

$$\forall\, x, y \in X \ : \ \widetilde{d}(\Phi(x), \Phi(y)) = d(x, y) \ .$$

Folgere hieraus: Φ ist injektiv und stetig. *(3 Punkte)*

(g) *Zeige*: Das Bild $\Phi[X]$ liegt dicht in $\widetilde{X}$. *(3 Punkte)*

(h) *Beweise*, dass $(\widetilde{X}, \widetilde{d})$ ein vollständiger metrischer Raum ist. *(6 Zusatzpunkte)*
[*Tipp:* Es sei eine Cauchyfolge $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\widetilde{X}$ gegeben. Da nach (g) das Bild $\Phi[X]$ dicht in $\widetilde{X}$ liegt, existiert zu $n \in \mathbb{N}$ jeweils ein $x_n \in X$ mit $\widetilde{d}(\Phi(x_n), \xi_n) < \frac{1}{n}$. Zeige, dass die hierdurch definierte Folge (x_n) eine Cauchyfolge in X ist, welche ein Element $\xi := [(x_n)] \in \widetilde{X}$ repräsentiert und dass die Folge (ξ_n) in $\widetilde{X}$ gegen ξ konvergiert.]

Wegen (f) ist das Bild $\Phi[X] \subset \widetilde{X}$ eine „Kopie“ von X, die in $\widetilde{X}$ enthalten ist. Indem man $\Phi[X]$ mit X identifiziert, kann man daher $\widetilde{X}$ als eine „Vervollständigung“ von X auffassen.

Die Lösungen sind bis Mittwoch, den 1. März 2017, um 8.30 Uhr in die Briefkästen in A5 einzuwerfen.