A2 $\quad (x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ induktiv

$x_0 \in [0,\infty) \qquad x_{n+1} = \sqrt{x_n+1}$

Beh.: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, ges.: GW

Bew.: ~~z. zg.~~:

Setze $f(x) = \sqrt{x+1}$

z. zg.: f ist Lipschitz-stetig mit $L<1$, $f(x) \in [0,\infty)$ $\forall x \in [0,\infty)$

$[0,\infty)$ ist vollst. ~~Ma~~ metr. Raum

z. zg.:

$$d(f(x), f(y)) \le L \cdot d(x,y)$$

$$\Leftrightarrow |\sqrt{x+1} - \sqrt{y+1}| \le L \cdot |x-y|$$

$$\Leftrightarrow \frac{|\sqrt{x+1} - \sqrt{y+1}|}{|x-y|} \le L$$

$$\frac{|\sqrt{x+1} - \sqrt{y+1}|}{|x-y|} = \frac{|\sqrt{x+1} - \sqrt{y+1}| \cdot |\sqrt{x+1} + \sqrt{y+1}|}{|x-y| \cdot |\sqrt{x+1} + \sqrt{y+1}|}$$

2. binomische Formel

$$= \frac{|x+1-(y+1)|}{|x-y| \cdot |\sqrt{x+1} + \sqrt{y+1}|}$$

$$= \frac{\cancel{|x-y|} \quad 1}{\cancel{|x-y|} \cdot |\sqrt{x+1} + \sqrt{y+1}|} = \frac{1}{|\sqrt{x+1} + \sqrt{y+1}|}$$

$$\lim_{x,y\to 0} \frac{1}{|\sqrt{x+1} + \sqrt{y+1}|}$$

da $\sqrt{\ }$ - mon. steigend & Stetigkeit von $\frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{y+1}}$

$\frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{y+1}}$ maximal, wenn x, y minimal

$$\frac{1}{|\sqrt{1} + \sqrt{1}|} = \frac{1}{2} \le L \quad \Rightarrow \text{Setze } L = \frac{1}{2} < 1$$

$\Rightarrow f$ ist Lipschitz-stetig mit $L < 1$

$f(x) = \sqrt{x+1} \geq 0 \quad \forall x \in [0, \infty)$

(folgt aus Wurzeleigenschaft)

$f(0) = \sqrt{0+1} = 1 = \min\{im(f)\}$ da f streng monoton steigt

$(x+1 < x+2 \Leftrightarrow \sqrt{x+1} < \sqrt{x+2})$

$\Rightarrow f[[0, \infty)] = [1, \infty) \subset [0, \infty)$

z. zg.: $[0, \infty)$ ist vollständiger metr. Raum

In $\mathbb{R}$ ist jede abgeschlossene Menge vollständig

(Lemma 5.4, Definition 5.6)

$(-\infty, 0)$ ist offenkundig eine offene Menge

$\Rightarrow \mathbb{R} \setminus (-\infty, 0) = [0, \infty)$ ist abgeschlossen

$\Rightarrow [0, \infty)$ ist vollständig

BFS

$\Rightarrow f$ (bzw. $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$) besitzt genau einen Fixpunkt

$x^* \in [0, \infty)$ genau einen Grenzwert

$x^* = f(x^*)$

$$x^* = \sqrt{x^* + 1} \Leftrightarrow x^{*2} = x^* + 1 \Leftrightarrow x^{*2} - x^* - 1 = 0$$

$$\Rightarrow x^* = +\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}}$$

$$= \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0 \Rightarrow \text{Nicht aus } [0, \infty)!\right)$$

Große Übung 7

Aufgabe 2

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ induktiv definiert durch

$x_0 \in [0,\infty)$, $x_{n+1} = \sqrt{x_n + 1}$

Beh.: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert gegen $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Bew.: Betrachte $f: [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x+1}$.

Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes:

① $[0,\infty)$ vollständig ist offensichtlich wahr

② z.zg.: $f([0,\infty)) \subseteq [0,\infty)$

Bew.: Für alle $y \in [0,\infty)$ ist $\sqrt{y} \geq 0$, also auch $\sqrt{x+1} \geq 0 \ \forall x \in [0,\infty)$

$\Rightarrow$ Behauptung.

③ z.zg.: f ist L-stetig mit $L<1$

Bew.: f ist stetig differenzierbar mit $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} > 0 \ \forall x \in [0,\infty)$ (*)

f' ist stetig differenzierbar mit $f''(x) = -\frac{1}{4\sqrt{x+1}^3} < 0 \ \forall x \in [0,\infty)$

$\Rightarrow \sup\{f'(x) \mid x \in [0,\infty)\} = f'(0) = \frac{1}{2}$.

$\overset{(*)}{\Longrightarrow} \underbrace{\sup\{|f'(x)| \mid x \in [0,\infty)\}}_{L :=} = \frac{1}{2}$, denn $f'(x) \in (0, \frac{1}{2}] \ \forall x \in [0,\infty)$

$\overset{MWS}{\Longrightarrow} |f(x) - f(y)| \leq L|x-y|$ für $x,y \in [0,\infty)$, also ist f Lipschitz-stetig mit $L = \frac{1}{2} < 1$

$\Rightarrow$ Voraussetzungen für Banachschen Fixpunktsatz gelten.

$\Rightarrow f$ hat genau einen Fixpunkt $x^* \in [0,\infty)$ mit $f(x^*) = x^*$

$\Rightarrow x^* = \sqrt{x^*+1} \iff {x^*}^2 = x^* + 1 \iff {x^*}^2 - x^* - 1 = 0$

$\overset{\text{pq-Formel}}{\iff} x^*_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Da $\frac{1-\sqrt{5}}{2} \notin [0,\infty)$, folgt $x^* = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ist Fixpunkt von f

$\Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. $\square$