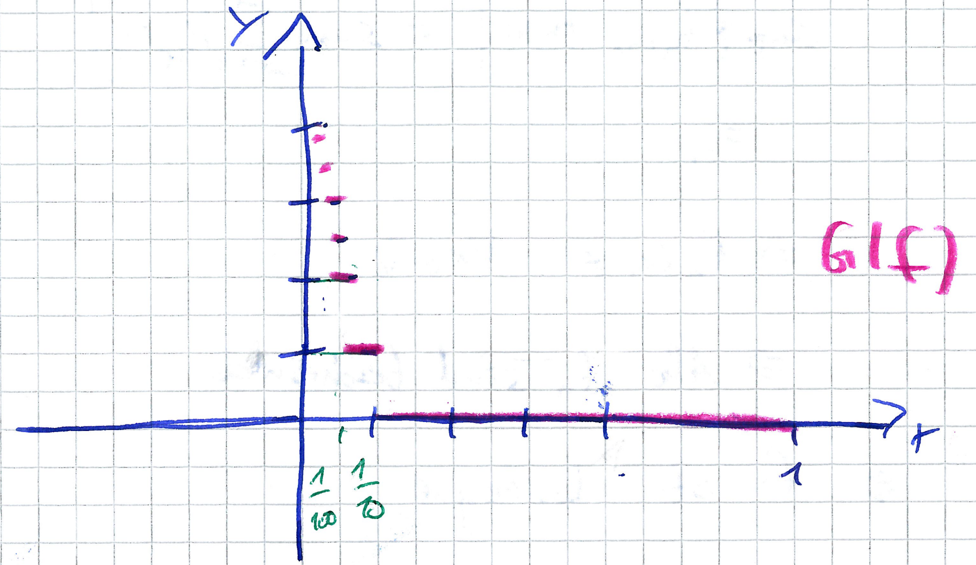
A1

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \begin{cases} 0 & \forall x \notin (0,1) \\ k & \text{für } x \in [10^{-(k+1)}, 10^{-k}) \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}_0$$




$$\chi_k(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in (0, 10^{-k}) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \chi_k(x)$$

$$f_n := \sum_{k=1}^{n} \chi_k(x)$$

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \chi_k$$

- $f_{n+1} - f_n = \sum_{k=1}^{n+1} \chi_k - \sum_{k=1}^{n} \chi_k = \chi_{n+1} \geq 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist monoton wachsend

- $$\int f_n \, d\mu = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} 10^{-k}}_{= \sum_{k=0}^{\infty}(10^{-k}) - 1} \underset{\text{geom. Summe}}{=} \frac{\overbrace{1 - 10^{-k-1}}^{<1}}{1 - 10^{-1}} - 1 \leq \frac{10}{9} - 1 = \frac{1}{9} < \infty$$

$\Rightarrow \int f_n \, d\mu$ ist beschränkt $\forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ Folge $(\int f_n \, d\mu)$ ist beschränkt.

- $$\lim_{n \to \infty} f_n = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \chi_k = \sum_{k=1}^{\infty} \chi_k = f \quad (*)$$

$\Rightarrow f$ ist $\mathcal{L}$-integrierbar

und es gilt $\int f \, d\mu = \int \sum_{k=1}^{\infty} \chi_k \, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\mu_k \, d\mu}_{10^{-k}}$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} 10^{-k} = \frac{1}{1 - 1/10} - 1 = \frac{10}{9} - 1 = \frac{1}{9}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} 10^{-1} - 1$$

(*) genauer: Für $x \in [10^{-(k+1)}, 10^{-k})$ ist $f_{\tilde{n}}(x) = f_n(x)$ für alle $\tilde{n} \geq n$ und für $x \in \mathbb{R} \setminus (0,1)$ ist $f_n(x) = f(x)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$ $f_n$ konvergiert punktweise gegen $f$ (sogar überall, also für alle $x \in \mathbb{R}$, "fast überall" würde schon ausreichen!)