Analysis II - Übung 6

Aufgabe 1

Sei $\mathcal{A}$ eine normierte Algebra und $A, B \in \mathcal{A}$

$$(f_1 = id : \mathcal{A} \to \mathcal{A},\ A \mapsto A)$$
$$f_2 : \mathcal{A} \to \mathcal{A},\ A \mapsto A^2$$
$$f_3 : \mathcal{A} \to \mathcal{A},\ A \mapsto A^3$$
$$\vdots$$
$$f_n : \mathcal{A} \to \mathcal{A},\ A \mapsto A^n \text{ mit } n \in \mathbb{N}$$

f_1 wg. Bsp. 10.3(ii) diff'bar

(a) $f_i'(A) \in \mathcal{L}(\mathcal{A}, \mathcal{A}) = \mathcal{L}(\mathcal{A})$

f_i ist diff'bar für $i = 2, 3, \ldots, n$, denn $f_1 = id$ und $f_2 = f_1 \cdot f_1 = id^2$ sowie $\overset{\text{induktiv}}{f_n} = id^n$, $f_3 = id^3$

id ist stetig diff'bar und die Multiplikation diff'barer Abbildungen ist auch diff'bar.

(b)(i) $f_2'(A)(B) = (id \cdot id)'(A)(B) \overset{\text{Leibniz-Regel}}{=} (id' \cdot id) + (id \cdot id')(A)(B)$ ← Stelle ← Richtung

$= id'(B) \cdot id(A) + id(A) \cdot id'(B)$

$f_2'(A)(B) = (A \cdot \mathbb{1} + \mathbb{1} \cdot A)(B)$

Ableitungen linearer Abb sind die Abb selber $\to$ $= id(B) \cdot id(A) + id(A) \cdot id(B)$

$= B \cdot A + A \cdot B$ ← Kommutativität in einer Algebra i.A. nicht gegeben

(ii) $f_3'(A)(B) = (id \cdot id \cdot id)'(A)(B) \overset{\text{Leibniz-Regel, sukzessive}}{=} (id \cdot (id \cdot id))'(A)(B)$

$= (id' \cdot (id \cdot id) + id \cdot (id \cdot id)')(A)(B)$

$= (id' \cdot id \cdot id + id \cdot (id' \cdot id + id \cdot id'))(A)(B)$

$= (id' \cdot id \cdot id + id \cdot id' \cdot id + id \cdot id \cdot id')(A)(B)$

analog wie vorher $\to$ $= id(B) id(A) id(A) + id(A) id(B) id(A) + id(A) id(A) id(B)$

$= B \cdot A \cdot A + A \cdot B \cdot A + A \cdot A \cdot B = BA^2 + ABA + A^2B$

Große Übung 6

Aufgabe 1

a) Aus Bsp. 10.3 wissen wir, dass $id_X \in \mathcal{A}$ differenzierbar ist.
Wegen Satz 10.4 (ii) sind auch alle Produkte der Form
$(id_X)^k$ $(k \in \mathbb{N})$ differenzierbar. Also sind f_2, f_3, f_n differenzierbare
Abbildungen mit $f_i'(\mathcal{A}) \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$.

b) Da f_i für $i = 2, 3, n$ als Polynom in A diff'bar sind (s. (a)) gilt
wegen der Leibnitzregel

(i) $f_2'(A)(B) = (A \cdot \mathbb{1} + \mathbb{1} \cdot A)(B) = AB + BA.$

(ii)
$$\begin{aligned} f_3'(A)(B) &= (A \cdot A^2)'(B) = [\mathbb{1} \cdot A^2 + A \cdot (\mathbb{1}A + A\mathbb{1})](B) \\ &= (\mathbb{1}A^2 + A\mathbb{1}A + A^2\mathbb{1})(B) \\ &= BA^2 + ABA + A^2B. \end{aligned}$$

(iii) <u>Beh:</u> Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $f_n'(A) = \sum_{k=1}^{n} A^{k-1} \mathbb{1} A^{n-k}.$

<u>Bew:</u> per Induktion.

<u>I.A:</u> Für $n = 1$ ist $f_1(A) = A$ und daher $f_1'(A) = \mathbb{1} = \sum_{k=1}^{1} A^{k-1} \mathbb{1} A^{n-k}.$

<u>I.V.:</u> Gelte nun für $n \in \mathbb{N}$, dass $f_n'(A) = \sum_{k=1}^{n} A^{k-1} \mathbb{1} A^{n-k}.$

<u>I.S.:</u>
$$\begin{aligned} f_{n+1}'(A) &= (A \cdot A^n)' \underset{\text{Leibnitz}}{=} \mathbb{1} \cdot A^n + A \cdot (A^n)' \\ &\underset{\text{I.V.}}{=} \mathbb{1}A^n + A \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} A^{k-1} \mathbb{1} A^{n-k}\right) \\ &= \underbrace{\mathbb{1}A^n}_{= A^{1-1} \mathbb{1} \cdot A^{n-1+1}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} A^k \mathbb{1} A^{n-k}}_{= \sum_{k=2}^{n+1} A^{k-1} \mathbb{1} \underbrace{A^{n+1-k}}_{= A^{n-(k-1)}}} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} A^{k-1} \mathbb{1} A^{n+1-k}. \end{aligned}$$
$\square$

$$\Rightarrow f_n'(A)(B) = \sum_{k=1}^{n} A^{k-1} B A^{n-k}.$$

$= \partial f$

Aufgabe 2

Def. Gradient

$$\operatorname{grad} f(c(t)) \cdot c'(t) = f'(c(t)) \cdot c'(t)$$

$$= (f \circ c)'(t) = 0$$

Kettenregel

da $f \circ c$ konstant