Analysis II – Übung 12

Nicolas A. Hesse
Borui N. Zhu

Aufgabe 1

Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, $|f|$ uneigentlich Riemannintegrabel

Behauptung

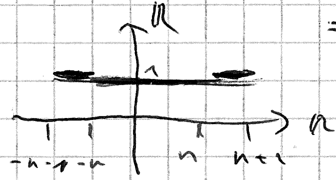
$f \in L^1(\mathbb{R})$

Beweis

⊛ $(|f_{n+1}| - |f_n|)(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$|f| \cdot (\chi_{[-n-1,n+1]} - \chi_{[-n,n]})$

$= \underbrace{|f|}_{\geq 0} \cdot (\underbrace{\chi_{[-n-1,-n]} + \chi_{[n,n+1]}}_{\geq 0}) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$



Lemma

$|f| \in L^1(\mathbb{R})$

Unterbeweis

$|f_n| := |f| \cdot \chi_{[-n,n]}$

Wir wollen den Satz der monotonen Konvergenz von Beppo-Levi benutzen:
Voraussetzungen:
(i) $(|f_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ monotone Folge
(ii) $(|f_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge in $L^1(\mathbb{R})$
(iii) Integrale beschränkt

(i) $|f_n|$ ist monoton wachsend, weil $|f| \geq 0$. ⊛

(ii) $|f_n|$ ist Riemannintegrabel, also insbesondere Lebesgueintegrabel ($|f_n|$ auf kompaktem Intervall, $|f_n| = |f|\big|_{[-n,n]}$)

(iii) Beschränktheit der Integrale folgt aus (ii), da uneigentlich Riemannintegrabel $\Rightarrow$ $\int |f_n| \, d\mu \leq \int |f| \, d\mu < \infty$

$(|f_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen $|f|$, denn sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig, $\varepsilon > 0$.

Nach Archimedes $\exists N \in \mathbb{N}: N > |x| \Rightarrow x \in [-N, N]$
$\Rightarrow \big| |f_n|(x) - |f(x)| \big| = \big| |f(x)| - |f(x)| \big| = 0 < \varepsilon \quad \forall n \geq N$

Beppo-Levi $\Rightarrow |f| \in L^1(\mathbb{R}) \wedge \lim_{n \to \infty} \int |f_n| \, d\mu = \int |f| \, d\mu < \infty$ □

$f_n := f \cdot \chi_{[-n,n]}$

Wir wollen den Satz der beschränkten Konvergenz von Lebesgue anwenden.
Voraussetzungen:

(i) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in $L^1(\mathbb{R})$

(ii) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen f a.e.

(iii) $\exists\, k \in L^1(\mathbb{R}): |f_n| \leq k \;\forall n \in \mathbb{N}$

(i) Lebesguekriterium

(a) auf einem kompakten Intervall: offensichtlich

(b) Funktion beschränkt: f_n ist stetig (weil f stetig ist) und auf einem kompakten Intervall, nimmt also ein Maximum an

(B) Unstetigkeitsstellen bilden Nullmenge
f stetig, also an maximal zwei Stellen unstetig, nämlich den Intervallgrenzen von $[-n,n]$
$\Rightarrow$ Nullmenge

$\Rightarrow f_n \in L^1(\mathbb{R}) \;\forall n \in \mathbb{N}$

(ii) analog zum Beweis im Lemma, nur ohne Betragsstriche

(iii) Wähle $k := |f|$
Offenbar ist $|f_n| \leq k = |f| \;\forall n \in \mathbb{N}$, da nach (i) des Lemmas $(|f_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge ist.

Lebesgue $\Rightarrow f \in L^1(\mathbb{R})$ und $\left(\int f_n \, d\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $\int f \, d\mu$ $\square$