Aufgabe 1 $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad (x,y) \mapsto (x+y)^2$

Ges.: kritische Punkte, lokale Maxima, Minima oder weder noch

(x,y) krit. Pkt. $\iff Df(x,y) = (0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2(x+y)\cdot 1 = 2(x+y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2(x+y)\cdot 1 = 2(x+y)$$

$$\Rightarrow Df(x,y) = 2(x+y, x+y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \Rightarrow 2(x+y) = 0 \Rightarrow x = -y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Rightarrow 2(x+y) = 0 \Rightarrow x = -y$$

$\Rightarrow$ Wir haben unendlich viele kritische Punkte

Menge der krit. Pkt'e: $\{(x,-x) \mid x \in \mathbb{R}\}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2 \qquad \text{Hess.} f(x_0) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (1 \ -1)\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

$\Rightarrow$ positiv semidefinit

keine Aussage über Extrema

genauer:

$$(x,y)\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2(x+y)^2 \geq 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

und $= 0$ für $x = -y \Rightarrow$ pos. semidefinit

Betr. bel. Umgebung von $(x,-x)$ (also krit. Pkt.)

$$f(x+\varepsilon, y+\hat{\varepsilon}) \quad \varepsilon, \hat{\varepsilon} \in \mathbb{R} \text{ und } (x,y)$$

kritischer Punkt, d.h.

$$y = -x$$

$$\Rightarrow f(x+\varepsilon, -x+\hat{\varepsilon})$$

$$= (x+\varepsilon+(-x+\hat{\varepsilon}))^2$$

$$= (x-x+\varepsilon+\hat{\varepsilon})^2 = (\varepsilon+\hat{\varepsilon})^2 > 0$$

da $\varepsilon, \hat{\varepsilon} \in \mathbb{R}$

$f(x,-x) = (x-x)^2 = 0$ an krit Pkt.

$\Rightarrow \quad f(x+\varepsilon, y+\tilde{\varepsilon}) = (\varepsilon+\tilde{\varepsilon})^2 \geq 0 = f(x,y)$

für (x,y) krit Pkt.

und nur

$f(x+\varepsilon, y+\tilde{\varepsilon}) = f(x,y)$ für $\varepsilon = -\tilde{\varepsilon}$,

d.h. wenn $(x+\varepsilon, y+\tilde{\varepsilon})$ auch kritischer Punkt ist.

$\Rightarrow$ alle kritischen Punkte sind lokale Minima (und auch globale Minima, da für alle krit. Punkte p_0 gilt, dass

$f(p_0) \geq f(p)$ mit $p \in \mathbb{R}^2$.