A1 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijektiv, stetig diff.bar

f^{-1} diff.bar ?

<u>Beh.:</u> f^{-1} nicht diff.bar

<u>Bew.:</u> Korollar 11.10:
Die Umkehrabbildung einer bijektiven ~~A~~ n-mal diff.baren Abb. ist bei allen x mit invertierbarem $f'(x)$ n-mal diff.bar

$\Rightarrow$

f^{-1} ~~be~~ ist bei allen x mit invertierbarem $f'(x)$ diff.bar

$f(x) = x^3$

$f'(x) = 3x^2$

$f'(0) = 0 \Rightarrow (f')^{-1}(0)$ existiert nicht

Außerdem ist f^{-1} ist in 0 nicht diff.bar, s. unten. (*)

$\Rightarrow f^{-1}$ ist nicht diff.bar

q.e.d.

(*) <u>Ann:</u> $f^{-1}(x) = x^{1/3}$ ist differenzierbar in 0.
Dann gilt wg. der Kettenregel mit $f \circ f^{-1} = \mathbb{1}$,
dass $(f \circ f^{-1})(0) = 1$. Jedoch ist

$\underbrace{f'(f^{-1}(0))}_{=0} \cdot (f^{-1})'(0) = 0 \neq 1$ ↯

$\Rightarrow f^{-1}$ ist nicht diff'bar in $x=0$.

Aufgabe 2

Komponenten von f sind stetig db in einer Umgebung von (0,0,0)

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} e^x + \tan(y) \\ x^2 + z^3 + z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$

Zeige, daß $f(x,y,z) = (1,0)^T$ lokal um $(x,y,z)^T = (0,0,0)^T$ eine implizite Lösung der Form $g(x) = (y(x), z(x))^T$ existiert.

Lösung:

$$\frac{\partial f}{\partial yz} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \tan^2(y) & 0 \\ 0 & 3z^2 + 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial yz}(0,0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow$ invertierbar an $(0,0,0)$

$\begin{pmatrix} x \\ g(x) \end{pmatrix} = f(x, g(x)) \qquad g(x) = \begin{pmatrix} y(x) \\ z(x) \end{pmatrix}$

Satz der impl. Fkt. $\Rightarrow$ Es gibt eine Umgebung $(x_0 - \varepsilon, \overset{0}{\overset{\shortparallel}{x_0}} + \varepsilon) = (-\varepsilon, \varepsilon)$ sd. $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ lokal um $x_0 = 0$ auf lösbar ist, d.h.

$$g: (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^2, \quad x \mapsto \begin{pmatrix} y(x) \\ z(x) \end{pmatrix},$$

$$\text{sd.} \quad f(x, g(x)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$