Aufgabe 1

a) Beh: ψ ist linear

Bew: Seien $v, w \in X$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\psi(v+w) = \left(x \mapsto (v+w) \cdot x\right) = \left(x \mapsto vx + wx\right)$$
$$= (x \mapsto vx) + (x \mapsto wx) = \psi(v) + \psi(w)$$

$$\psi(\lambda \cdot v) = \left(x \mapsto (\lambda \cdot v) \cdot x\right) = \left(x \mapsto \lambda \cdot v \cdot x\right)$$
$$= \left(x \mapsto \lambda \cdot (v \cdot x)\right) = \lambda \cdot (x \mapsto v \cdot x)$$
$$= \lambda \cdot \psi(v)$$

$\square$

b) z.z.: $\mathcal{L}(\mathbb{R}, X) \to X$, $A \mapsto A(1)$
ist Umkehrabb.

$\to$ zeige $\phi(\psi(v)) = v$

Beweis: Sei $v \in X$ vorgegeben. Dann ist

2.) $\phi(\psi(v)) = \phi(\underbrace{x \mapsto v \cdot x}_{:=A}) = (x \mapsto v \cdot x)(1) = v$ ✓

Dann ist für $t \in \mathbb{R}$

1.) Sei $\underset{\mathcal{L}(\mathbb{R},X)}{A}$ vorgegeben. $\psi(\phi(A)) = \psi(\phi(x \mapsto A(x)) = \psi(A(1))$

$= (x \mapsto A(1) \cdot x) \underset{\text{da } A \text{ linear}}{=} (x \mapsto A(x)) = A$ ✓

$\Rightarrow$ ψ ist ein Isomorphismus,

denn $\varphi^{-1} = \varphi$.

Dazu: $\psi \circ \varphi : \mathcal{L}(\mathbb{R}, X) \to \mathcal{L}(\mathbb{R}, X)$

$\varphi \circ \psi : X \to X$

also zz: 1.) $\psi \circ \varphi = \mathbb{1}_{\mathcal{L}(\mathbb{R},X)}$

2.) $\varphi \circ \psi = \mathbb{1}_X$

c) Beh.: Ψ ist ein isometrischer Isomorphismus

Bew.: z.zg.: $d(\Psi(v), \Psi(w)) \stackrel{!}{=} d(v,w)$

für $v, w \in X$

Definiere $\|\cdot\|_\infty$ $\begin{cases} A(x) := v \cdot x \\ \tilde{A}(x) = w \cdot x \end{cases}$

$d_{Z(\mathbb{R},X)}(\Psi(v), \Psi(w)) = \| \Psi(v) - \Psi(w) \|_\infty$

$= \sup\{\|vx - wx\| \mid x \in \overline{B(0,1)}\}$

d.h. $(|x| \leq 1) \leftarrow (\|x\| \leq 1)$

sup für $\|x\| = 1$ angenommen

$\stackrel{\downarrow}{=} \|v - w\|$

$= d_X(v,w)$

Isometrie: folgt aus b

Ψ isometrisch, weil Ψ isometrisch.

$\Rightarrow \Psi$ ist isometrischer Isomorphismus

q.e.d.