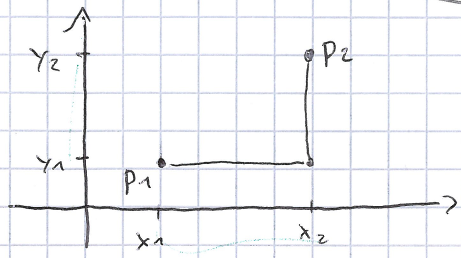
$$d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \le \underbrace{d((x_1,y_1),(x_1,y_2))}_{\text{Abstand}} + d((x_1,y_2),(x_2,y_2))$$

Aufgabe 1



$p_1 = (x_1, y_1)$

$p_2 = (x_2, y_2)$

a)

$$d(p_1, p_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

~~$d(p_1, p_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$~~

b) Das ist die Metrik des kartesischen Produkts!

Abstand $\|x - y\|_1 \hat{=} d(x, y)$

p-Norm, $\rightsquigarrow$ (1-Norm)

"$\Rightarrow$" **Aufg. 2:** Sei $\|\cdot\|$ eine Norm und $d(x,y) = \|x-y\|$ die durch sie induzierte Metrik dann gilt

(i) Translationsinvarianz, da $d(x+z, y+z) = \|(x+z)-(y+z)\| = \|x+z-z-y\| = \|x-y\| = d(x,y)$

(ii) Homogenität: $d(\alpha x, 0) = \|\alpha x - 0\| = \cancel{\|\alpha x - \alpha 0\|} = |\alpha| \cancel{\|\alpha} \|x-0\| = |\alpha| d(x,0)$

$\|\alpha x\| \underset{\text{da Norm}}{=} |\alpha| \, \|x\|$

$\Rightarrow$ jede norminduzierte Metrik erfüllt (i) und (ii)

"$\Leftarrow$": d habe Eigenschaften (1) & (2). Dann ist die Fkt. $\|\cdot\|: X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto d(x,0)$ eine Norm auf X, denn $\forall x,y \in X$, $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt

- Positivität: $\|x\| = d(x,0) \geq 0$ und $\|x\| = 0 \Leftrightarrow d(x,0) = 0 \underset{d \text{ Metrik}}{\Leftrightarrow} x = 0$

- Homogenität: $\|\alpha x\| = d(\alpha x, 0) \overset{(2)}{=} |\alpha| d(x,0) = |\alpha| \, \|x\|$

- Δ-Ungl.: $\|x+y\| = d(x+y, 0) \overset{(1)}{=} d(x+y-y, -y)$
$= d(x,-y) \leq d(x,0) + \underbrace{d(0,-y)}_{\overset{(1)}{=} d(y,-y+y)}$
$\overset{(1)}{=} d(x,0) + d(y,0)$
$= \|x\| + \|y\|$.

Zsgh. $\|\cdot\|$ & Metrik: $\boxed{d(x,0) = \|x\|}$

[$\hookrightarrow$ Bem: Daraus folgt sogar Eindeutigkeit. Denn angenommen es gibt eine andere Norm $\|\cdot\|_*$, die ebenfalls d induziert, also $d(x,y) = \|x-y\|_* \Rightarrow \|x\| = d(x,0) = \|x\|_* \quad \forall x \in X$.]