Analysis II – Übung 13

Spacko 1
Spacko 2

(d) Behauptung:

$$\int_{\partial\Omega} f \cdot N \, d\sigma = 2\pi$$

Beweis

$$f(x,y) = \frac{1}{\|x+y\|^2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

f in $(0,0)$ nicht stetig
$\Rightarrow$ Satz von Gauß eigentlich nicht anwendbar

f auf $\Omega \setminus B(0,r)$ stetig
$\Rightarrow$ Satz von Gauß anwendbar

$$\Rightarrow \int_{\partial(\Omega\setminus B(0,r))} f \cdot N \, d\sigma = \int_{\Omega\setminus B(0,r)} \nabla \cdot f \, d\mu$$

$$= \int_{\Omega\setminus B(0,r)} \operatorname{div}(f) \, d\mu \overset{(a)}{=} \int_{\Omega\setminus B(0,r)} 0 \, d\mu = 0$$

$$\int_{\partial\Omega} f \cdot N \, d\sigma = \int_{\partial((\Omega\setminus B(0,r)) \cup B(0,r))} f \cdot N \, d\sigma$$

$$= \int_{\partial\Omega} f \cdot N \, d\sigma - \int_{\partial B(r,0)} f \cdot N \, d\sigma + \int_{\partial B(r,0)} f \cdot N \, d\sigma$$

$$\overset{\text{Satz von Gauss}}{=} \int_{\Omega\setminus B(r,0)} \nabla \cdot f \, d\mu + \int_{\partial B(r,0)} f \cdot N \, d\sigma$$

$$\overset{(c)}{=} 0 - 2\pi = -2\pi$$

$\square$

zu (c): Das Ergebnis widerspricht nicht dem Satz von Gauß, da f an $(0,0)$ unstetig ist.