Aufgabe 2

(a) Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig.

Behauptung:

$$A_f: C(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R}) \quad \text{Algebrahomomorphismus.}$$
$$g \mapsto g \circ f$$

Beweis: Seien $g, h \in C(\mathbb{R})$ und $\lambda \in \mathbb{R}$

$$A_f(g+h) = (g+h) \circ f = g \circ f + h \circ f = A_f(g) + A_f(h)$$
$$A_f(\lambda g) = (\lambda g) \circ f = \lambda (g \circ f) = \lambda A_f(g)$$
$$A_f(g \cdot h) = (g \cdot h) \circ f = (g \circ f) \cdot (h \circ f) = A_f(g) \cdot A_f(h) \qquad \square$$

(b) Sei $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Behauptung:

$$D: C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R}) \quad \text{Derivation}$$
$$f \mapsto f'$$

Beweis:

z.zg.: $D(f \cdot g) = D(f) \cdot g + f \cdot D(g) \ \forall f, g \in C^\infty(\mathbb{R})$

$$D(f \cdot g) = (f \cdot g)' \underset{\text{Produktregel}}{=} f'g + g'f = D(f) \cdot g + f \cdot D(g) \qquad \square$$