Analysis II – Übung 4

Aufgabe 1

$(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_p)$, $1 \leq p \leq \infty$, VR

(a) $A \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$, $A(x_1, \dots, x_n) := (\lambda_1 x_1, \dots, \lambda_n x_n)$

Behauptung:

$\|A\| = \max\{|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|\}$

$$A x = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 \\ \vdots \\ \lambda_n x_n \end{pmatrix}$$

Beweis:

$\|A\| = \sup\{\|Ax\|_p \mid \|x\|_p \leq 1\}$

Wir zeigen zunächst, dass gilt:
$\|A\| \leq \max\{|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|\}$

(i) Fall 1: $1 < p < \infty$

$\|A\| = \sup\{\|Ax\|_p \mid \|x\|_p \leq 1\}$. Sei $\|x\|_p \leq 1$. Dann ist

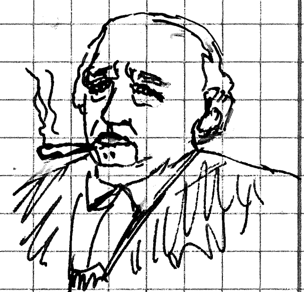
$$\|Ax\|_p = (|\lambda_1 x_1|^p + \dots + |\lambda_n x_n|^p)^{\frac{1}{p}} = (|\lambda_1|^p |x_1|^p + \dots + |\lambda_n|^p |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^n |\lambda_i|^p |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \left(\max\{|\lambda_1|^p, \dots, |\lambda_n|^p\} \sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(\max\{|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|\}^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}}_{= \|x\|_p \leq 1}$$

$$\leq \max\{|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|\}$$



stoned Weierstraß

(ii) Fall 2: $p = \infty$

$\|A\| = \sup\{\|Ax\|_\infty \mid \|x\|_\infty \leq 1\}$

$$\|Ax\|_\infty = \max\{|\lambda_1 x_1|, \dots, |\lambda_n x_n|\}$$
$$= \max\{|\lambda_1||x_1|, \dots, |\lambda_n||x_n|\}$$
$$\leq \max\{|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|\} \underbrace{\max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}}_{= \|x\|_\infty \leq 1}$$

$$\leq \max\{|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|\}$$

$\Longrightarrow \|A\| \leq \max\{|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|\} \quad \forall\ 1 \leq p \leq \infty$

Sei $|\lambda_k| = \max\{|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|\}$

$\|A \cdot e_k\|_p = \|(\dots, 0, \underbrace{\lambda_k \cdot \underbrace{x_k}_{=1}}_{\text{k-te Stelle}}, 0, \dots)\|_p = |\lambda_k|$ $\qquad e_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow$ k-te Stelle

Wir haben also ein $x \in \mathbb{K}^n$ mit $\|A\| = \max\{|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|\}$ gefunden. Weil wegen (i) und (ii) $\|A\| \leq \max\{|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|\}$ gilt, folgt $\|A\| = \max\{|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|\}$ $\square$

$\boxed{\text{Aufgabe 1(b)}}$ I. Allg. gilt <u>nicht</u>, dass $\|A\|^{-1} = \|A^{-1}\|$.

Denn für $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und somit nach (a)

$$\frac{1}{\|A\|} = \frac{1}{2} \neq 1 = \|A^{-1}\|.$$