Aufgabe 1

$$f: (x,y) \mapsto \nabla \ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

$$= \nabla \frac{1}{2} \ln(x^2+y^2)$$

$$= \left(\frac{1}{\cancel{2}} \frac{1}{x^2+y^2} \cdot \cancel{2}x \,,\, \frac{1}{\cancel{2}} \frac{1}{x^2+y^2} \cancel{2}y\right)^T = \frac{1}{\|(x,y)\|_2^2} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

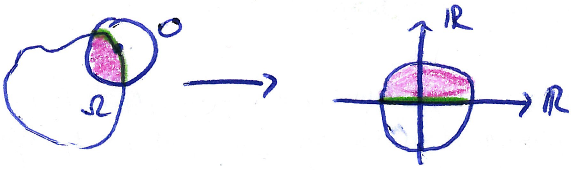
a) $$\operatorname{div} f = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} = \frac{x^2+y^2 - x(2x)}{(x^2+y^2)^2} + \frac{x^2+y^2 - y(2y)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= 0$$

Aufgabe 1

(b) genauer als in großer Übung:

- Zunächst muss man die Polarkoordinaten so modifizieren, dass der Rand auf ein Intervall in $\mathbb{R}$ (horizontale Achse) abgebildet wird und dass $O \cap \Omega$ auf die obere Halbebene abgebildet wird:



→ bei Polarkoordinaten wird r fixiert ($r = 1$ für Rand des Einheitsballs), brauche also Koordinate s, sd. für $s=0$ der Wert r angenommen wird

$$\Rightarrow \text{betrachte} \quad \phi : (0, 2\pi] \times \overbrace{(-\varepsilon, \varepsilon)}^{\text{kleine offene Umg. um } r,\ \text{z.B. } \varepsilon = \frac{1}{4}} \to \mathbb{R}^2,\ (\varphi, s) \mapsto ((r-s)\cos\varphi, (r-s)\sin\varphi)$$

- da $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix}$ ist es wichtig die Jacobimatrix so aufzustellen, dass die letzte Komponente, nach der abgeleitet wird, in diesem Fall s entspricht:

$$\phi'(\varphi, s) = \begin{pmatrix} (s-r)\sin\varphi & -\cos\varphi \\ (r-s)\cos\varphi & -\sin\varphi \end{pmatrix}, \quad \det \phi' = r - s$$

$$\Rightarrow (\phi'(\varphi,s))^{-1} = \frac{1}{r-s}\begin{pmatrix} -\sin\varphi & \cos\varphi \\ (s-r)\cos\varphi & (s-r)\sin\varphi \end{pmatrix} \Rightarrow \left((\phi'(\varphi,s))^{-1}\right)^T = \begin{pmatrix} -\sin\varphi & (s-r)\cos\varphi \\ \cos\varphi & (s-r)\sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \phi'\Big|_{\mathbb{R}}^{\#} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi & (s-r)\cos\varphi \\ \cos\varphi & (s-r)\sin\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (s-r)\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$$

vgl. Skript, Def. 12.40
↳ da $\det \phi > 0$ ist das Vorzeichen vor dem Integral negativ

c) $$\int_{\partial B(0,1)} f \cdot N \, d\sigma = -\int_{U \cap \mathbb{R}} (f \circ \phi) \, \phi'\Big|_{\mathbb{R}}^{\#} \, d\mu_{\mathbb{R}}$$

$$= -\int_0^{2\pi} \frac{1}{r^2} \cdot \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix} d\varphi$$

$$-\int_0^{2\pi} \frac{1}{r^2} \cdot r^2 \, d\varphi = -\int_0^{2\pi} 1 \, d\varphi = \underline{\underline{-2\pi}}$$