Aufgabe 1

$$f_n := f \cdot \chi_{[0,n]\times[0,x\cdot e^{-x}]} = \chi_{[0,n]\times[0,x\cdot e^{-x}]}$$

$$\int f_n \, d\mu = \int \chi_{[0,n]\times[0,x\cdot e^{-x}]} \, d\mu$$

Lebesgue-Kriterium, da 1 beschränkt ist auf $[0,n]\times[0,n]$ & beschränkt auf kompaktem Quader der M_n enthält und Mg der Unstetigkeitsstellen von f_n ist Nullmenge für alle $n \in \mathbb{N}$ (Rand von $[0,n] \times [x\cdot e^{-x}]$)

$$= \int_0^n \left(\int_0^{\frac{x}{e^x}} 1 \, dy \right) dx$$

$$= \int_0^n \left(\int_0^{\frac{x}{e^x}} 1 \, dy \right) dx$$

$$= \int_0^n \left[y \right]_0^{\frac{x}{e^x}} dx = \int_0^n \frac{x}{e^x} \, dx$$

partielle Integration

$$= \left[-x \cdot e^{-x} \right]_0^n - \int_0^n -e^{-x} \, dx = -n \cdot e^{-n} + \left(-e^{-n} + 1 \right)$$

mit $n \to \infty$ gehen $-n \cdot e^{-n} \to 0$ & $e^{-n} \to 0$

$\Rightarrow f_n$ hat beschränkte Integrale $\forall n \in \mathbb{N}$

& f_n ist monoton wachsend, da $f_{n+1} - f_n = \chi_{[n,n+1]\times[0,x e^{-x}]} \geq 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

Beppo-Levi $\Rightarrow$ $\int f \, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int f_n \, d\mu = \quad +1$