Aufgabe 1

$A: C(X,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$

$A(f) = f(x_0),\ x_0 \in X$

(i) Linearität

$$A(f+g) = (f+g)(x_0) = f(x_0) + g(x_0) = A(f) + A(g) \quad \forall f,g \in C(X,\mathbb{R})$$

$$A(\lambda f) = (\lambda f)(x_0) = \lambda \cdot f(x_0) = \lambda\, A(f) \quad \forall f \in C(X,\mathbb{R}), \lambda \in \mathbb{R}$$

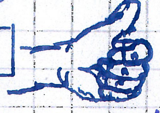
$\boxed{\text{© by VWL}}$

(ii) Stetigkeit

Wir zeigen, dass A lipschitzstetig ist. zz: $\exists L > 0$, sd. $|A(f) - A(g)| \leq L \cdot \|f-g\|_\infty$

$$|f(x_0) - g(x_0)| \leq \sup\{|f(x) - g(x)| \mid x \in X\} = \|f-g\|_\infty$$

$\Rightarrow$ Wähle $L = 1$ $\boxed{\text{© by VWL}}$



□

$\Rightarrow$ A L-stetig $\Rightarrow$ A stetig.

A2 a)

$C(\mathbb{R}_{dis}, \mathbb{R})$

Beh.: $C(\mathbb{R}_{dis}, \mathbb{R})$ = Menge aller Abb. von $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Bew.: f ist stetig $\Leftrightarrow$
wenn $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert geg. x
konvergiert $f((x_n)_{n\in\mathbb{N}})$ geg. $f(x)$

Bzgl. d_{dis} konvergiert x_n:

$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}: x_n = x_N \ \forall n \geq N$

$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}: f(x_n) = f(x_N) \ \forall n \geq N$

für alle stetigen Fkt.

$d(f(x_n), f(x_N)) = 0 \ \forall n \geq N$

$\Rightarrow C(\mathbb{R}_{dis}, \mathbb{R})$ = Menge aller Abb.