Große Übung
- Woche 2 -

Aufgabe 1

Sei $M \subseteq X$ eine endl. Teilmenge von X, d.h. $M = \{x_1, \dots, x_n\}$

Wir müssen zeigen, dass jede offene Überdeckung von M eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

Sei also $\bigcup_{i\in I} O_i$ eine offene Überdeckung von M.

Für jedes $x_j \in M$ existiert dann mind. eine offene Menge O_j aus $\bigcup_{i\in I} O_i$ sd. $x_j \in O_j \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{n} O_j$ ist endliche offene Überdeckung von M, also ist M kompakt. Δ

Aufgabe 2

ⓐ Damit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert muss gelten

Da d aber nur diskret Metrik ist kann

a) „⇒" Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent. $\Rightarrow \exists\, x \in X$ mit $x =$ Grenzwert von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Hierfür muss aber gelten $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $d(x_n, x) < \varepsilon$ für $n \geq N_\varepsilon$

Da d aber diskrete Metrik ist folgt $d(x_n, x)$ kann nur kleiner $\varepsilon = \frac{1}{2}$ sein, wenn $x_n = x$

$\Rightarrow \exists\, N \in \mathbb{N}$ mit $x_n = x_N\ \forall\, n \geq N$

„⇐" Es existiere ein $N \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq N$ gilt $x_n = x_N$, d.h. ab dort ist die Folge konstant ⇒ Folge konvergiert gegen x_N. (konst. Folgen sind konvergent)

BRUNNEN