Aufgabe 1

a) $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Betrachte nun eine Niveaumenge $A := \{ (x_1, \dots x_n) \mid f(x_1, \dots, x_n) = c \}$

Da f stetig ist und A somit Urbild einer abgeschlossenen Menge (nur ein Punkt) ist A abgeschlossen. $\left(A = f^{-1}[\{c\}] \right)$
$\hookrightarrow \{c\}$

Es bleibt Beschränktheit zu zeigen:

Annahme: A wäre nicht beschränkt

Dann gibt es eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in A mit

$\lim_{n \to \infty} \|x_n\| = \infty$

Nun gilt aber $\lim_{r \to \infty} \inf \{ |f(x_n)| \mid \|x_n\| = r \} = \infty$,

weswegen dann ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $x_N \notin A$ $\lightning$

$\Rightarrow$ A ist beschränkt

$\Rightarrow$ (Heine-Borel) A ist kompakt

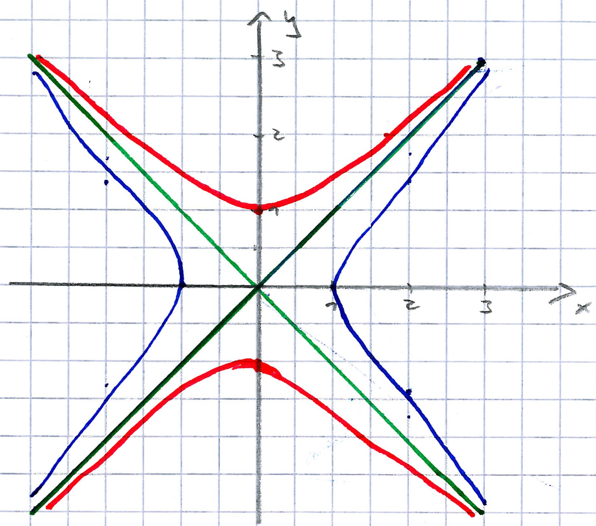
b)

Analysis II - Große Übung - Aufgaben

1b) ges.: für $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto x^2 - y^2$ die Höhenlinien

$M_c := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = c\}$ für

$c = 1$ $\quad$ $c = 0$ $\quad$ $c = -1$



$c = 0: \quad (x-y)\cdot(x+y) = 0$

$c = 1: \quad x^2 - y^2 = 1$

$\Leftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{1+y^2}$

$c = -1: \quad x^2 - y^2 = -1$

$\Leftrightarrow \quad y = \pm\sqrt{1+x^2}$

glatt: $\nabla f = (2x, -2y) \overset{!}{=} (0,0)$

$\Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$

$f(0,0) = 0 \quad \Rightarrow$ Für $c = 0$ ist M_c nicht glatt.

Für $c = -1, c = 1$ sind die Mengen jeweils glatt.

Aufgabe 2

$M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 1\}$, suche Extremwerte von $f|_M$.

1. zz: M ist kompakt

- M ist abgeschlossen, denn $M = g^{-1}[\{1\}]$, g ist stetig und $\{1\}$ ist abgeschlossen
- M ist beschränkt, denn $x^2+y^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\underbrace{1-y^2}_{\geq 0 \text{ für } y \in [-1,1]}}$,

$$y = \pm\sqrt{\underbrace{1-x^2}_{\geq 0 \text{ für } x \in [-1,1]}}$$

$\Rightarrow (x,y) \in [-1,1]^2$

$\overset{\text{Heine-}}{\underset{\text{Borel}}{\Rightarrow}}$ M ist kompakt.

- Da f stetig und M kompakt nimmt f auf M ihr Maximum und Minimum an.

2a) Singularitäten von M?

$\nabla g(x,y) = (2x, 2y) = (0,0) \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$. Aber $g(0,0) = 0 \neq 1$

$\Rightarrow (0,0) \notin M \Rightarrow$ M ist glatt. Also keine Kandidaten für Extrempunkte von $f|_M$ durch Singularitäten von M.

2b) Lagrange-Formalismus: $Df(x,y) = \lambda \cdot Dg(x,y)$

$\Leftrightarrow$ (I) $y = 2\lambda x$
(II) $x = 2\lambda y$
(III) $x^2+y^2 = 1$

$\rightsquigarrow$ Multiplikation von (I) mit x und (II) mit y ergibt

(I') $xy = 2\lambda x^2$ (II') $xy = 2\lambda y^2$

Setze (I') = (II'): $2\lambda x^2 = 2\lambda y^2$. Da aus (I) & (II) folgt, dass $\lambda \neq 0$ ist (sonst $x = y = 0$, $(x,y) = (0,0) \notin M$) ist dies äquivalent zu $x^2 = y^2 \rightsquigarrow$ in (III): $2x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, $y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow$ 4 Kandidaten für Extrempunkte: $P_{1,2} = \pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $P_{3,4} = \pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

3) Es ist $f(P_{1,2}) = \frac{1}{2}$, $f(P_{3,4}) = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ lok. Maxima von f unter der Nebenbedingung $g(x,y) = 1$ an $P_{1,2}$,
lok. Minima —— " —— " —— an $P_{3,4}$