

Übung 1

Metrik und Norm

15. Februar 2017

Aufgabe 1

Stellt euch die Straßen von Manhattan idealisiert als die Menge aller Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vor, so dass entweder $x \in \mathbb{Z}$ oder $y \in \mathbb{Z}$.

- (a) Gebe eine einfache Formel für die kürzeste Wegstrecke an, die zwischen zwei Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) auf den Straßen von Manhattan zurückgelegt werden muss.
- (b) Der so definierte Abstand stimmt mit einem aus der Vorlesung bekannten Metrik überein. Um welche handelt es sich?

Aufgabe 2

Sei X ein Vektorraum über \mathbb{K} . Zeige, dass eine Metrik $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ genau dann norminduziert ist, wenn die folgenden zwei Bedingungen gelten:

Translationsinvarianz: Für alle $x, y, z \in X$ gilt

$$d(x, y) = d(x + z, y + z).$$

Homogenität: Für alle $x \in X$ und $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt

$$d(\alpha x, 0) = |\alpha| d(x, 0).$$

Wie hängen die Norm und die Metrik dann genau zusammen?