# Übung 13

## Der Gaußsche Satz

24. Mai 2017

**Aufgabe 1**

Sei $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto \nabla \ln \|(x,y)\|_2$.

(a) Bestimme $\operatorname{div}(f)$.

(b) Sei $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(r,\varphi) \mapsto (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))$. Bestimme $\Phi'|^{\sharp}_{\mathbb{R}}$ für das Wegintegral $\int_{\partial B(0,r)} f \cdot N \, d\sigma$.

(c) Sei $B(0,r)$ der Ball von $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ mit Radius $r > 0$ und Mittelpunkt im Ursprung. Berechne $\int_{\partial B(0,r)} f \cdot N \, d\sigma$. Wieso ist dies kein Widerspruch zum Satz von Gauß?
*Tipp:* Benutze Polarkoordinaten.

(d) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ eine beschränkte, offene Teilmenge mit zweimal differenzierbarem Rand, welche den Ursprung $(0,0)$ enthält. Zeige

$$\int_{\partial\Omega} f \cdot N \, d\sigma = 2\pi.$$

*Tipp:* Benutze den Gaußschen Satz für $\Omega \setminus B(0,r)$ mit geeignetem $r > 0$.