Übung 4

Funktionenräume

8. März 2017

Aufgabe 1 Betrachte den normierten Vektorraum $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_p)$ mit $1 \leq p \leq \infty$.

(a) Zeige, dass für $A \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ mit

$$A(x_1, \dots, x_n) := (\lambda_1 x_1, \dots, \lambda_n x_n)$$

gilt, dass $\|A\| = \max\{|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|\}$.

(b) Gilt $\|A^{-1}\| = \frac{1}{\|A\|}$?

Aufgabe 2

(a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Zeige, dass die Abbildung

$$A_f : C(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R}), \quad g \mapsto g \circ f$$

ein Algebrahomomorphismus ist, d.h. eine lineare Abbildung für die zudem für alle $g, h \in C(\mathbb{R})$ gilt, dass $A_f(g \cdot h) = A_f(g) \cdot A_f(h)$.

(b) Sei $f \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R})$. Zeige, dass

$$D : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R}), \quad f \mapsto f'$$

eine Derivation ist.

Hinweis: Die Derivation D ist nicht beschränkt. Deshalb ist es nicht klar, wie man $\exp(D)$ definieren kann. In Aufgabe 4.2 wird gezeigt, dass $\exp(D)$ ein Algebrahomomorphismus ist, wenn man $\exp(D)$ definieren kann. Wenn f eine ganzanalytische Funktion ist, so kann man $\exp(D)(f)(x)$ ausrechnen und sieht, dass diese Reihe konvergiert. Berechne den Grenzwert.