Seminararbeit zum Themen : Stabile Mannigfaltigkeit I

Phuong Mai Le

27.10.2016

Institut für Mathematik III
Falkutät für Mathematik und Informatik
Universität Mannheim
Dozent : Prof. Martin Ulrich Schmidt

Inhaltsverzeichnis

1 Motivation

In diesem Seminar betrachten wir das Thema „Stabile Mannigfaltigkeit“.
Unter einer Mannigfaltigkeit , versteht man in der Mathematik einen topologischen Raum , der lokal dem euklidischen Raum $\mathbb{R}$ gleichen . Global muss die Mannigfaltigkeit jedoch nicht einem euklidischen Raum gleichen (d.h nicht zu ihm homöomorph sein) .
Mannigfaltigkeiten sind der zentrale Gegenstand der Differentialgeometrie und sie haben bedeutende Anwendungen in der theoretischen Physik .
In diesem Vortrag betrachten wir nur die Untermannigfaltigkeit . Das ist eine Teilmenge von der Mannigfaltigkeit , die mit den Kanten der Mannigfaltigkeit verträglich ist .
In der Mathematik und insbesondere in der Untersuchung von dynamischen Systemen , gibt die Idee von stabiler und instabiler Menge bzw. stabiler und instabiler Mannigfaltigkeit eine formale mathematische Definition zu der allgemeinen Vorstellung der Idee eines Attraktor .
Attraktor ist eine Untermenge der Phasenraum , auf die sich ein dynamisches System im Laufe der Zeit zubewegt und die unter der Dynamik dieses Systems nicht mehr verlassen wird. Das heißt, eine Menge von Variablen nähert sich im Laufe der Zeit (asymptotisch) einem bestimmten Wert, einer Kurve, oder komplexerem (also einer Region im n-dimensionalen Raum) und bleibt dann im weiteren Zeitverlauf in der Nähe dieses Attraktors

2 Einführung

In diesem Seminar sind (E,$\|\ .\ \|$) ein endlichdimensionaler Vektorrraum , X $\in$ E eine offen Teilmenge und $f \in C^1(X, E)$

2.1 Definition

Definition 1.1(Lokaler Fluss): Sei X ein topologischer Raum und W $\subset \mathbb{R} \times$ X eine offene Teilmenge . Eine Abbildung Φ : W $\rightarrow X$ heisst lokaler Fluss auf X , falls die folgende Bedingungen erfüllt sind :
(i) $\forall$ x $\in$ X gilt: $\{t \in \mathbb{R} | (t, x) \in W\}$ ist ein offenes Intervall , das die Null enthält .
(ii) Sei (s,x) $\in$ W und (t,$\Phi(s, x)$) $\in$ W, dann gilt :(t+s,x) $\in$ W und

$$\Phi(t, \Phi(s, x)) = \Phi(t + s, x)$$

(iii) Es gilt :

$$\Phi(0, x) = x, \forall x \in X.$$

Definition 1.2 (Globaler Fluss):Sei W = $\mathbb{R} \times X$ .Dann heißt ein lokaler Fluss $\Phi : W \rightarrow X$ globaler Fluss.

Definition 1.3 : Ein Fluss $\Phi : W \rightarrow X$ besitzt einen Fixpunkt $x_0 \in$ X ,falls gilt :

$$\Phi(t, x) = x_0, \forall t \in W.$$

Dann heißt x_0 :
stabil , wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass $\Phi(t, x) \in B(x_0, \epsilon)$ für alle $(t, x) \in [0, \infty) \times B(x_0, \delta) \cap W$ gilt.
instabil, wenn x_0 nicht stabil ist.
attraktiv, wenn es ein $\delta > 0$ gibt ,so dass $[0, \infty) \times B(x_0, \delta)$ in W enthalten ist und es für alle $\epsilon > 0$ ein $t_0 > 0$ gibt , so dass $\Phi(t, x) \in B(x_0, \epsilon)$ für alle (t,x) $\in (t_0, \infty) \times B(x_0, \delta)$ gilt.
asymptotisch stabil , wenn x_0 stabil und attraktiv ist .

Zunächst zerlegen wir das Spektrum $\sigma(A)$ disjunkt in 3 Mengen :

$$\sigma(A) = \sigma_s(A) \cup \sigma_u(A) \cup \sigma_n(A)$$

- Das neutrale Spektrum :

$$\sigma_n(A) := \{\lambda \in \sigma(A) | Re(\lambda) = 0\} .$$

- Das stabile Spektrum :

$$\sigma_s(A) := \{\lambda \in \sigma(A) | Re(\lambda) < 0\} .$$

- Das instabile Spektrum :

$$\sigma_u(A) := \{\lambda \in \sigma(A) | Re(\lambda) > 0\} .$$

Definition 1.4 (Hyperbolischer Fluss) : Der von A erzeugte Fluss e^{tA} heißt ***hyperbolisch*** ,wenn $\sigma_n(A) = \emptyset$,d.h :

$$\sigma(A) = \sigma_s(A) \cup \sigma_u(A).$$

Der Vektorraum E zerfällt dann in zwei invariante Unterräume :

$$E = E^+ \oplus E^-$$

Die Unterräume heißen **stabiler** bzw **instabiler** Unterraum.
Ein Fixpunkt x_0 einer Differentialgleichung $\dot{x} = f(x)$ heißt **hyperbolisch** ,wenn die Linearisierung $Df(x_0)$ keine Eigenwerte auf der imaginäre Achse besitzt.

Definition 1.5 (positiv bzw negativ invariante Menge) :
Für einen lokalen Fluss $\Phi : W \to X$ auf dem metrischen Raum X heißt eine Teilmenge A $\subset X$ positiv bzw. negativ invariant , wenn $\Phi(t, x) \in A$ für alle (t,x) $\in W \cap ((0, \infty) \times A)$ bzw. (t,x) $\in W \cap (-\infty, 0) \times A)$ gilt. Sie heißt invariant , wenn sie positiv und negativ invariant ist , also $\Phi(t, x) \in A$ für alle $(t, x) \in W \cap (\mathbb{R} \times A)$gilt.

Definition 1.6 (Orbit/Trajektorie):
Für jedes $x \in X$ ist :
$\gamma^+(x) := \{\Phi(t, x) | 0 \leq t < t^+(x)\}$ bzw.
$\gamma^-(x) := \{\Phi(t, x) | t^-(x) < t \leq 0\}$ bzw.
$\gamma(x) := \gamma^+ \cup \gamma^-(x)$
der positive bzw. der negative Halborbit bzw. der Orbit (oder die Trajektorien) durch x , wobei $t^+(x)$ bzw. $t^-(x)$ heißen positive bzw. negative Fluchtzeit von x .

2.2 Sätze

Satz 1: Bezeichnen die Eigenwerte von A mit α_j ,$1 \leq j \leq m$, , und die dazugehörigen algebraische und geometrische Vielfachheit mit a_j, g_j .
Das System $\dot{x} = Ax$ ist global stabil genau dann wenn $Re(\alpha_j) \leq 0$ und $a_j = g_j$ wenn $Re(\alpha_j) = 0$.
Das System $\dot{x} = Ax$ ist global asymptotisch stabil genau dann wenn $Re(\alpha_j) < 0, \forall j$. Außerdem gibt es in diesem Fall eine Konstante C für jede $\alpha < min\{-Re(\alpha_j)\}_{j=1}^m$ so dass :

$$\| \exp(tA) \| \leq Ce^{-t\alpha}, t \leq 0.$$

Beweis : siehe Skript von Dynamische System .

Satz 2 (Grobmann, Hartmann) : Es sei x_0 ein hyperbolische Fixpunkt von dem Fluss Φ_f ist. Dann sind $\Phi_f|_{x_0}$ und $e^{tf'(x_0)}|_0$ flußäquivalent.
Beweis : Siehe Skript von Dynamische System .

3 Stabile bzw unstabile Mannigfaltigkeiten

3.1 Vorbereitung

Aus dem Satz von Grobmann Hartmann wissen wir , dass lokal, d.h in der Nähe von der kritischen Punkt x_0 der Fluss Φ_f flußäquivalent zum linearen Fluss $e^{tf'(x_0)}$ ist , d.h dass das Phasenporträt des Fluss Φ_f die gleiche topologische Struktur wie das Phasenporträt der Linearisierung in der Nähe von 0 hat . In Analogie zum stabilen Untervektorraum E^+ bzw instabilen Untervektorraum E^- eines linearen Flusses definiert man die stabile Mannigfaltigkeit $W^+(x_0)$ bzw. instabile Mannigfaltigkeit $W^-(x_0)$ von Φ_f in x_0 .

Unser Ziel ist zu zeigen , dass wir viele Informationen über die Stabilität eines Fluss durch Linearisierung das System in der Umgebung von der Fixpunkt erhalten .
Zur Vorbereitung erinnern wir uns an die Stabilität von dem linearen System :

$$\dot{x} = Ax$$

Unsere Stabilitätsdefinitionen ist invariant unter lineare Transformation von Koordinaten . Also o.B.d.A können wir annehmen ,dass A in Jordansche Normalform ist .
Aufgrund der explizite Form von e^{tJ} von einem Jordanblock J :

$$e^{tJ} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ & 1 & t & \ddots & \vdots \\ & & 1 & \ddots & \frac{t^2}{2} \\ & & & \ddots & t \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

folgt ,dass Langzeitsverhalten eines System wird durch die Realteilen von den Eigenwerten bestimmen wird. Im Allgemein hängt es von den Anfangsbedingungen ab und es gibt zwei lineare Mannigfaltigkeiten $E^+(e^A)$ und $E^-(e^A)$ so dass , wenn wir in $E^+(e^A)$ bzw. $E^-(e^A)$ sind ,dann x(t)$\rightarrow$ 0 wenn t $\rightarrow \infty$ bzw. t $\rightarrow -\infty$.
Wir nennen die lineare Mannigfaltigkeit $E^+(e^A)(bzw.E^-(e^A))$ stabile (bzw. instabile) Mannigfaltigkeit . Das ist ein Unterraum , der von den Eigenvektoren mit dazugehörigen Eigenwerten mit negativen (bzw. positiven) Realteil aufgespannt ist .

$$E^{\pm}(e^A) = \bigoplus_{\pm Re(\alpha_j)<0} Ker(A - \alpha_j)^{a_j} \tag{1}$$

Wir definieren die Zentrumsmannigfaltigkeit für die Eigenvektoren mit dazugehörigen rein imaginären Eigenwerten . Aber die Zentrumsmannigfaltigkeit ist im Allgemein nicht stabil unter kleinen Störungen ,d.h wenn unsere Eigenwerte nur positve oder negative Realteile haben , dann können wir erwarten , dass unter kleine Störungen diese Realteile immer noch positiv bzw. negativ sind . Aber in diesem Fall unsere Eigenwerte haben Realteil 0 und unter kleinen Störungen können diese Realteile positiv oder negativ sein . Deswegen betrachten wir im Allgemein hyperbolischen Fall ,d.h die Eigenwerte sind

nicht rein imaginär .
Aus Satz 1 und das Fakt dass die stabile und instabile Mannigfaltigkeit sind invariant bzgl A (und folglich bzgl exp(tA)) folgt :
Satz 3 : Die lineare stabile und instabile Mannigfaltigkeiten $E^{\pm} = E^{\pm}(e^A)$ sind invariant unter den Fluss und jeder Punkt startet in $E^{\pm}$ konvergiert exponential gegen 0 wenn $t \to \pm\infty$. Wir haben dann

$$|\exp(tA)x_{\pm}| \leq Ce^{\mp t\alpha}|x_{\pm}|, \pm t \geq 0, x_{\pm} \in E^{\pm} \tag{2}$$

für alle $\alpha < min\left\{|Re(\alpha_j)||\alpha_j \in \sigma(A), \pm Re(\alpha_j) < 0\right\}$ und einige C $>$ 0 in Abhängigkeit von α.
In diesem Vortrag werde ich diesen Satz nicht beweisen , aber wir betrachten dann später eine Verallgemeinerung davon .
Für unsere späteren Untersuchungen , bezeichnen wir den Raum , der von alle Eigenvektoren von A mit dazugehörigen Eigenwerte mit Realteil kleiner/größer als $\mp\alpha$,

$$E^{\pm,\alpha}(e^A) = \bigoplus_{\mp Re(\alpha_j)>\alpha} Ker(A-\alpha_j)^{a_j} = E^{\pm}(e^{A\pm\alpha}). \tag{3}$$

Äquivalent dazu :

$$E^{\pm,\alpha}(e^A) = \left\{ \ x \ \mid \ lim_{t\to\pm\infty} e^{\pm\alpha t}|\exp(tA)x| = 0 \right\} \tag{4}$$

ist der Raum , der aus alle Anfangsbedingungen , die gegen 0 mit gegebenen exponentialen Raten $\alpha > 0$ konvergiert ,besteht.
Diese Menge ist stückweise konstant d.h sie wird sich verändert ,wenn α verändert sich .

3.2 Stabile Mannigfaltigkeit

Jetzt transformieren wir unser vorherige Resultat in nicht linearen System .
Wir definieren die **stabile** und **instabile** Menge von dem Fixpunkt x_0 als die Menge aller Punkte , die für $t \to \infty$ bzw. $t \to -\infty$ gegen x_0 konvergieren, so dass :

$$W^{\pm}(x_0) = \{ \ x \in E \ \mid \ lim_{t\to\pm\infty}|\Phi(t,x) - x_0| = 0 \} . \tag{5}$$

Beide Menge sind invariant unter den Fluss . Unser Ziel ist diese Mengen zu untersuchen .
Jede Funktion $f \in C^1$, die in $x_0 \in$ M verschwindet , kann umgeschrieben werden in :

$$f(x) = A(x - x_0) + g(x). \tag{6}$$

wobei A die Jacobimatrix von f an der Stelle x_0 ist und g(x) = $o(|x - x_0|)$.
Wir erwarten ,dass in einer kleinen Umgebung von x_0 die Lösung solcher System durch die Lösung von der linearisierte Gleichung beschrieben werden kann . Das ist richtig für

kleine t , aber was passiert wenn $|t| \to \infty$?
Wir wissen , dass in eindimensionalen Fall (n = 1) , wir die Stabilität aus A = $f'(x_0)$ wenn $f'(x_0) \neq 0$ ablesen können.
Wir werden dann dieses Resultat auf mehrdimensionalen Fall verallgemeinen .
Da unser Ergebnis lokal ist , betrachten wir eine Umgebung $U(x_0)$ von x_0 und definiere :

$$M^{\pm,\alpha}(x_0) = \left\{ \, x \ | \ \gamma_{\pm} \subseteq U(x_0), \ \sup_{\pm t \geq 0} e^{\pm \alpha t}|\Phi(t,x) - x_0| < \infty \right\}. \tag{7}$$

als die Menge aller Punkten , die mit einigen exponentialen Raten $\alpha > 0$ für t $\to \pm\infty$ gegen x_0 konvergieren . Das ist die Entsprechung von $E^{\pm,\alpha}$, der Raum, der von alle Eigenvektoren von A mit zugehörigen Eigenwerten mit Realteil kleiner / größer als $\mp\alpha$,aufgespannt wird .
Jetzt definieren wir die lokale **stabile** bzw. **instabile** Mannigfaltigkeiten von Fixpunkt x_0 als die Menge aller Punkten , die exponentielle gegen x_0 für t $\to \infty$ bzw. t $\to -\infty$ konvergieren . Das ist

$$M^{\pm}(x_0) = \bigcup_{\alpha > 0} M^{\pm,\alpha}(x_0) \tag{8}$$

Beide Mengen sind $\pm$ invariant unter den Fluss per Konstruktion .
Im linearen Fall haben wir $M^{\pm}(0) = E^{\pm}$. Unser Ziel ist zu zeigen , als eine Verallgemeinerung von Satz 3 ,dass die Mengen $M^{\pm}(x_0)$ Mannigfaltigkeit sind und $E^{\pm}$ $M^{\pm}(x_0)$ in x_0 berühren .
Wir werden später auch sehen , dass im hyperbolischen Fall $M^{\pm}(x_0) = W^{\pm}(x_0)$.
Zur Vereinfachung nehmen wir an , dass $x_0 = 0$ unser hyperbolischer Fixpunkt ist . Die Idee ist Transformierung das Problem in Integralgleichung , so dass wir das durch Iteration lösen können .
Angenommen, wir haben eine Lösung x(.) auf dem Intervall [0,t] gefunden . Durch Variation der Konstante haben wir :

$$x(t) = e^{tA}x(0) + \int_0^t e^{(t-r)A}g(x(r))dr. \tag{9}$$

Aufgrund der Kenntniss der Lösung die Abbildung $t \to g(x(t))$ kann mann $g(x(t))$ als Inhomogenität für die Lösung $x(t)$ auffassen. Deshalb kann man eine Formel aus der Theorie der linearen Differentialgleichungen auf eine nichtlineare Differentialgleichung anwenden .
Der erste Term $e^{tA}x(0)$ ist die Lösung von der homogenen Differentialgleichung und der zweite Term ist eine spezielle Lösung von der inhomogenen Gleichung .
Bemerkung : Wir zerlegen wieder $E = E^+ \bigoplus E^-$ und definieren $P^+ : E^+ \bigoplus E^- \to E^+$ die Projektion auf den stabilen Unterraum E^+ .
Analog sei $P^- := (Id - P^+) : E^+ \bigoplus E^- \to E^-$ die Projektion auf den instabilen Unterraum .
Für $x \in E$ schreiben wir : $x_{\pm} = P^{\pm}x(0)$ und $g_{\pm} = P^{\pm}g(x)$.
Mit Hilfe von den Projektionen ,zerlegen wir die Gleichung (9) in die äquivalenten Sys-

temen :

$$
\begin{aligned}
x_+(t) &= P^+x(t) \\
&= e^{At}P^+x(0) + \int_0^t e^{(t-r)A}P^+g(x(r))dr \\
&= e^{At}x_+ + \int_0^t e^{(t-r)A}g_+(x(r))dr
\end{aligned} \tag{10}
$$

$$
\begin{aligned}
x_-(t) &= P^+x(t) \\
&= e^{At}P^-x(0) + \int_0^t e^{(t-r)A}P^-g(x(r))dr \\
&= e^{At}x_- + \int_0^t e^{(t-r)A}g_-(x(r))dr
\end{aligned} \tag{11}
$$

Wir brauchen eine Bedingung für $x(0) = x_+ + x_-$,so dass $x(t)$ beschänkt ist . Wenn g(x) = 0 ist , dann ist die Bedingung $x_- = 0$. Im allgemeinen Fall , wollen wir dann vielleicht x_- als eine Funktion von x_+ : $x_- = h^+(x_+)$ darstellen .
Dazu betrachten wir eine Lemma:
Hilfslemma 4 : Falls $x(t)$ eine Lösung von $\dot{x} = Ax + g(x)$ ist , die für alle t $\geq$ 0 gleichmäßig beschränkt bleibt , dann erfüllt $x(t) = (x^+(t), x^-(t))$ die Integralgleichung :

$$
x_+(t) = e^{At}x_+ + \int_0^t e^{(t-r)A}g_+(x(r))dr \tag{12}
$$

$$
x_-(t) = -\int_t^\infty e^{(t-r)A}g_-(x(r))dr \tag{13}
$$

Umgekehrt gilt : Falls $(x^+(t), x^-(t)\ ) \in E^+ \times E^-$ eine beschänkte Lösung dieser Integralsgleichung sind , dann ist $x(t)$ eine beschänkte Lösung von $\dot{x} = Ax + g(x)$ ist .

Beweis. Da die Formel von $x_+(t)$ im Vergleich zu (10) nicht verändert , müssen wir die Behauptung für $x_-(t)$ zeigen.
Wir wissen , dass $x(t)$ als Lösung von einer Differentialgleichung einen lokalen Fluss definiert , d.h $x(t) = \Phi(t, x_0) = e^{tA}x(0) + \int_0^t e^{(t-r)A}g(x(r))dr$
Für festes t $\geq$ 0 und beliebiges T $>$ t gilt :

$$
\begin{aligned}
x(T) = \Phi(T, x_0) &=^{Flusseigenschaft} \Phi(T-t, x(t)) \\
&= e^{(T-t)A}x(t) + \int_t^T e^{(T-r)A}g(x(r))dr..
\end{aligned}
$$

Analog wir erhalten die Formel für $x(t)$ aus $x(T)$ durch Zeitumkehr :

$$
x(t) = e^{(t-T)A}x(T) + \int_T^t e^{(t-r)A}g(x(r))dr..
$$

Wenden wir die Projektion P^- auf diese Formel an und erhalten dann :

$$x_-(t) = e^{A(t-T)}x_-(T) + \int_T^t e^{(t-r)A} g_-(x(r))dr$$

Nun gilt :

$$|e^{A(t-T)}x_-(T)| \leq \| e^{A(t-T)} \| \, |x_-(T)| \overbrace{\leq}^{Satz1} Ce^{-\delta(t-T)}|x_-(T)|$$

Für T $\to +\infty$ strebt dieser Term gegen 0 , da $x_-(T)$ beschränkt ist . Der zweite Term strebt gegen :

$$\int_{+\infty}^t e^{(t-r)A} g_-(x(r))dr = -\int_t^{+\infty} e^{(t-r)A} g_-(x(r))dr$$

Dieses uneigentliche Integral ist absolut konvergent , da

$$|e^{(t-r)A} g_-(x(r))| \leq \| e^{(t-r)A} \| \, |g_-(x(r))| \overbrace{\leq}^{Satz1} Ce^{-\delta(t-r)}|g_-(x(r))|$$

für $r \geq t$,d.h der Integrand ist beschänkt und es ist außerdem noch monoton fallend . Umgekehrt rechnet man durch Differenzieren nach , dass jede Lösung der Integralgleichung eine Lösung $x(t)$ von $\dot{x} = Ax + g(x)$ liefert . Da x_+ und x_- beschränkt sind , folgt auch dass $x(t)$ beschränkt ist. $\square$

Insgesamt haben wir :

$$x(t) = e^{At}x_+ + \int_0^t e^{(t-r)A} g_+(x(r))dr - \int_t^\infty e^{(t-r)A} g_-(x(r))dr \tag{14}$$

Wir definieren $P(t) = P^+, t > 0$ bzw. $P(t) = -P^-, t \leq 0$, dann können wir diese Gleichung noch kompakt schreiben als $x(t) = K(x(t))$,mit

$$K(x)(t) = e^{tA}x_+ + \int_0^\infty e^{(t-r)A} P(t-r) g(x(r))dr. \tag{15}$$

Zusammengefasst , wenn A hyperbolisch ist , dann löst jede beschränkte Lösung die Integralsgleichung (15) und mit dem Banachsche Fixpunktsatz können wir die Existenz von der Lösung beweisen . Das wird die Existenz von einer stabilen Mannigfaltigkeit , die ihre lineare Entsprechung in einen hyperbolischen Fixpunkt tangiert ,beweisen .
Wir können die instabile Mannigfaltigkeit durch Zeitumkehr $t \to -t$ erhalten .
Bevor wir zum unserem wichtigsten Satz kommen , beweisen wir noch einen Hilfssatz :
Betrachten wir die **Hammerstein Integralgleichung** :

$$K_\lambda(x)(t) = k(t, \lambda) + \int_0^\infty \kappa(s-t, \lambda) K(s, x(s), \lambda)ds \tag{16}$$

mit

$$k \in C([0, \infty) \times \Lambda, \mathbb{R}^n), \kappa \in C(\mathbb{R} \times \Lambda, \mathbb{R}^n), K \in C([0, \infty) \times V \times \Lambda, \mathbb{R}^n), \tag{17}$$

$\Lambda \in \mathbb{R}^n$ kompakt. Wir nehmen an , dass auf jede kompakte Menge $C \subseteq V$ k und K sind gleichmäßig stetig und beschränkt

$$|k(t,\lambda)| \leq m, \quad |K(t,x,\lambda)| \leq M, \quad (t,x,\lambda) \in [0,\infty) \times C \times \Lambda \tag{18}$$

Es gibt eine integrierbare Funktion $\alpha(s)$ so dass

$$|\kappa(s+t,\lambda)| \leq \alpha(s) \quad f\ddot{u}r \ \ |t| \leq \epsilon. \tag{19}$$

Zusätzlich nehmen wir an :

$$|K(s,x,\lambda) - K(s,y,\lambda)| \leq L|x-y|, \quad x,y \in V. \tag{20}$$

L ist unabhängig von λ und

$$L \int_{-\infty}^{+\infty} |\kappa(s,\lambda)| ds \leq \theta < 1. \tag{21}$$

Hilfssatz 5: Wenn K_λ obige Bedingungen erfüllt ,dann hat die Fixpunktgleichung $K_\lambda(x) = x$ eine eindeutige Lösung $\bar{x}(t,\lambda) \in C([0,\infty) \times \Lambda, V)$.
Zusätzlich nehmen wir an , dass alle partielle Ableitungen bis zu r-te Ordnung bzgl λ und x von $k(t,\lambda), \kappa(s,\lambda)$ und $K(s,x,\lambda)$ stetig sind . Für alle partielle Ableitungen bis zu Ordnung r bzgl λ von $\kappa(s,\lambda)$ gibt es dominante Funktion wie (19) und alle partielle Ableitungen bis Ordnung r bzgl λ und x von $K(s,x,\lambda)$ sind gleichmäßig stetig und beschränkt wenn x in einer kompakten Menge wie in (18) liegt .
Alle partielle Ableitungen bis zu Ordnung r bzgl λ von $\bar{x}(t,\lambda)$sind stetig .

Beweis. o.B.d.A können wir annehmen , dass $k(t,\lambda) \equiv 0$.
Wir haben dann :

$$\begin{aligned} K_\lambda(x)(t) &= \int_0^\infty \kappa(s-t,\lambda) K(s,x(s),\lambda) ds \\ &= \int_0^\infty \kappa(s-t,\lambda) \left(K(s,0,\lambda) + K(s,x(s),\lambda) - K(s,0,\lambda) \right) ds. \end{aligned}$$

Wähle $\delta = (1-\theta)^{-1} \parallel K_\lambda(0) \parallel$, dann impliziert $\parallel x \parallel \leq \delta$:

$$\begin{aligned} \parallel K_\lambda(x) \parallel &\leq \int_0^\infty |\kappa(s-t,\lambda)| (|K(s,0,\lambda)| + |K(s,x(s),\lambda) - K(s,0,\lambda)|) ds \\ &= \int_0^\infty |\kappa(s-t,\lambda)| |K(s,0,\lambda)| ds + \int_0^\infty |\kappa(s-t,\lambda)| |K(s,x(s),\lambda) - K(s,0,\lambda)|) ds \\ &\leq \ \parallel K_\lambda(0) \parallel + \theta \parallel x \parallel \leq \delta. \end{aligned}$$

$K_\lambda : C([0,\infty), B_\delta(0)) \to C([0,\infty), B_\delta(0))$ ist eine Selbstabbildung . Wenn wir annehmen ,dass K_λ eine Kontraktion mit Kontraktionskonstante θ ist , dann gibt es eine eindeutige Lösung $\bar{x}(\lambda,t)$ (nach Banachsche Fixpunktssatz) .

Zunächst müssen wir zeigen, dass $K_\lambda(x)$ bzgl λ stetig ist .
Es gilt :

$$\begin{aligned}|K_\lambda(x)(t) - K_\eta(x)(t)| \leq &\int_0^\infty |\kappa(s-t,\lambda)||K(s,x(s),\lambda) - K(s,x(s),\eta)|ds \\ &+ \int_0^\infty |\kappa(s-t,\lambda) - \kappa(s-t,\eta)||K(s,x(s),\eta)|ds\end{aligned}$$

Wegen die gleichmäßige Stetigkeit von K , für $\forall \epsilon > 0$ haben wir

$$|K(s,x,\lambda) - K(s,x,\eta)| < \epsilon$$

mit $|\lambda - \eta|$ hinreichend klein und

$$\parallel K_\lambda(x)(t) - K_\eta(x)(t) \parallel \leq \frac{\epsilon\theta}{L} + M \int_{-\infty}^\infty |\kappa(s-t,\lambda) - \kappa(s-t,\eta)|ds$$

Die rechte Seite kann beliebig klein werden wenn wir $|\lambda - \eta|$ hinreichend klein wählen (dominante Konvergenz - siehe Bemerkung 6 (unten)). Somit folgt die Behauptung dass $K_\lambda(x)$ bzgl λ stetig ist .
Jetzt werden wir zeigen , dass $\bar{x}$ stetig ist .
Wir haben :

$$|\bar{x}(t,\lambda) - \bar{x}(s,\eta)| \leq |\bar{x}(t,\lambda) - \bar{x}(t,\eta)| + |\bar{x}(t,\eta) - \bar{x}(s,\eta)|$$

wobei der erste Term konvergiert gegen 0 wenn $(t,\lambda) \to (s,\eta)$ und das gleiche gilt für den zweiten Term ,da

$$\begin{aligned}|\bar{x}(t,\eta) - \bar{x}(s,\eta)| &\leq \int_0^\infty |\kappa(r-t,\eta) - \kappa(r-s,\eta)||K(r,\bar{x}(r,\eta),\eta)dr \\ &\leq M \int_0^\infty |\kappa(r-t,\eta) - \kappa(r-s,\eta)|dr\end{aligned}$$

Setzen wir r = 0 ,dann sind wir fertig . Jetzt beweisen wir die zweite Behauptung .
Angenommen $\bar{x}(t,\lambda) \in C^1$, dann $\bar{y}(t,\lambda) = \frac{\partial}{\partial\lambda}\bar{x}(t,\lambda)$ die Lösung von der Fixpunktsgleichung $\tilde{K}_\lambda(x(\lambda),y) = y$ ist .
Es gilt also :

$$\begin{aligned}\tilde{K}_\lambda(x,y)(t) = &\int_0^\infty \kappa_\lambda(s-t,\lambda)K(s,x(s),\lambda)ds \\ &+ \int_0^\infty \kappa(s-t,\lambda)K_\lambda(s,x(s),\lambda)ds \\ &+ \int_0^\infty \kappa(s-t,\lambda)K_x(s,x(s),\lambda)y(s)ds.\end{aligned}$$

Da der Integraloperator linear bzgl y ist und wegen der Mittelwertssatz und (20) haben wir $\parallel K_x(s,x(s),\lambda) \parallel \leq L$.
Also implizieren die ersten beiden Terme die Existenz von einer stetigen Lösung $\bar{y}(t,\lambda)$ von $\tilde{K}_\lambda(\bar{x}(\lambda),y) = y$.

Es bleibt zu zeigen , dass es die Ableitung von $\bar{x}(\lambda)$ ist.
Wir fixieren λ . Wenn wir mit $(x_0(t), y_0(t)) = (0{,}0)$ starten , dann erhalten wir eine Folge aufgrund von $(x_{n+1}, y_{n+1}) = (K_\lambda(x_n), \tilde{K_\lambda}(x_n, y_n))$, s.d $y_n(t) = \frac{\partial}{\partial\lambda} x_n(t)$.
Wir haben κ ist stetig , K ist gleichmäßig stetig und beschränkt und nach Annahme gilt , dass alle partielle Ableitung bis zur Ordung r von $\kappa(s,t)$ und $K(s,x,\lambda)$ bzgl x stetig ist . Daraus folgt , dass $\tilde{K_\lambda}(x,y)(t)$ ist stetig bzgl x .
Der Hilfssatz 7 (siehe unten) impliziert ,dass $(x_n, y_n) \to (\bar{x}(\lambda), \bar{y}(\lambda))$. Außerdem ist (x_n, y_n) gleichmäßig beschränkt bzgl λ . Somit gilt nach dem Korollar 8 (siehe unten) , das $\bar{y}(\lambda)$ die Ableitung von $\bar{x}(\lambda)$
Das löst der Fall r = 1 .Nehmen wir an, dass die Behauptung gilt für $r-1$. Da die Gleichung für y gleiche Typ wie die Gleichung für x ist und $k_\lambda, K_\lambda, K_x \in C^{r-1}$, dann gilt $y \in C^{r-1}, x \in C^r$.

□

Bemerkung 6: *(Dominante Konvergenz)* : Angenommen , $f_n(x)$ ist eine Folge von integrierbaren Funktionen , die punkweise gegen eine integrierbare Funktion $f(x)$ konvergiert . Wenn es eine dominante Funktion $g(x)$ gibt ,so dass $g(x)$ integrierbar und erfüllt :

$$|f_n(x)| \leq g(x)$$

dann

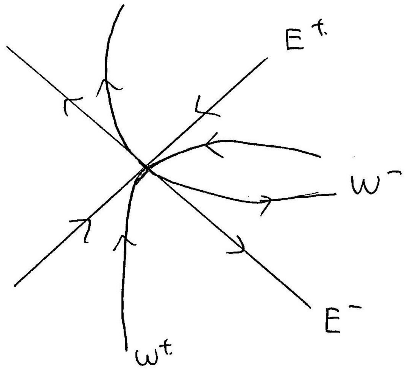
$$lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int f(x)dx$$

Hilfssatz 7 : Sei C eine nicht leere ,abgeschlossene Untermenge eines Banachraum X , Λ eine Untermenge von einem anderen Banachraum .
Wir nehmen an , dass $K_\lambda : C \to C$ erfüllt :

$$\| K_{\lambda_n} \circ ... \circ K_{\lambda_1}(x) - K_{\lambda_n} \circ ... \circ K_{\lambda_1}(y) \| \leq \theta_n \| x - y \| \ ; x, y \in C, \lambda_j \in \Lambda \tag{22}$$

mit $\Sigma_{n=1}^{\infty} \theta_n < \infty$ und $K_\lambda(x)$ ist stetig bzgl $\lambda \in \Lambda$ für $\forall x \in C$. Dann ist die eindeutige Fixpunkt $\bar{x}(\lambda)$ stetig bzgl λ .
Außerdem , wenn $\lambda_n \to \lambda$, dann $x_{n+1} = K_{\lambda_n}(x_n) \to \bar{x}(\lambda)$.
Korollar 8 :$f_n(x) \to f(x)$ punktweise und $df_n(x) \to g(x)$ punktweise. Wenn es eine (lokale) dominante Funktion für $df_n(x)$ gibt , dann ist $f(x)$ differenzierbar und $df(x) = g(x)$
Jetzt betrachten wir unser Hauptproblem .

Betrachten wir z.B der Fall ,wenn wir einen Sattelpunkt haben :



Aus diesem Phasenporträt können wir sehen ,dass W^+ und W^- in dem kritischen Punkt transversal schneiden und die Tangentialräume für W^+ und W^- parallel zu E^+ und E^- ist . Da in diesem Beispiel betrachten wir einen hyperbolischen Fall , das gilt dann $W^{\pm}(x_0) = M^{\pm}(x_0)$. Die Beweis dafür werden wir in nächsten Vortrag sehen .
Wir werden dann diese Tangentialseigenschaft zeigen .

Satz 9: Angenommen,dass $f \in C^k(M, \mathbb{R}^n), M \subseteq \mathbb{R}^n, k \geq 1$, einen Fixpunkt x_0 mit entsprechende Jacobimatrix A besitzt . Wenn $\alpha > 0$, $A + \alpha I$ hyperbolisch , dann gibt es eine Umgebung $U(x_0) = x_0 + U$ und eine Funktion $h^{+,\alpha} \in C^k(E^{+,\alpha} \cap U, E^{-\alpha})$ so dass

$$M^{+,\alpha}(x_0) \cap U(x_0) = \Big\{x_0 + a + h^{+,\alpha}(a) \ \mid \ a \in E^{+,\alpha} \cap U\Big\} \tag{23}$$

$h^{+,\alpha}$ und ihre Jacobimatrix verschwindet in 0 . Dann berührt $M^{+,\alpha}(x_0)$ seine Entsprechung $E^{+,\alpha}$ *in* x_0 . Wir haben $M^{+,\alpha_2}(x_0) \subseteq M^{+,\alpha_1}(x_0)$ wenn $\alpha_1 \leq \alpha_2$ und $M^{+,\alpha_2}(x_0) = M^{+,\alpha_1}(x_0)$ wenn $E^{+,\alpha_2} = E^{+,\alpha_1}$.

Beweis. Angenommen , $x_0 = 0$ und A ist hyperbolisch , so dass wir $\alpha = 0$ wählen können . Unser Banachraum ist $C_b([0,\infty), \mathbb{R}^n)$ mit der Supremumnorm $\| x \| = \sup_{t\geq 0} |x(t)|$.
Um

$$K(x)(t) = e^{tA}x_+ + \int_0^\infty e^{(t-r)A}P(t-r)g(x(r))dr \tag{24}$$

wobei x_+ fest gewählt .
durch Interation zu lösen , nehmen wir an , dass $|x(t)| \leq \delta$.
Weil die Jacobimatrix von g in 0 verschwindet , haben wir

$$|g(x(t)) - g(y(t))| \leq \epsilon |x(t) - y(t)| \tag{25}$$

(Das folgt aus dem Mittelwertssatz)
Wenn wir δ hinreichen klein wählen , dann ist ϵ auch klein . Außerdem für $\alpha_0 <$

$min\{|Re(\alpha)| \ \ \alpha \in \sigma(A)\}$ haben wir

$$\| e^{(t-r)A}P(t-r) \| \overbrace{\leq}^{Satz \ \ 1} Ce^{\alpha_0|t-r|} \tag{26}$$

Kombinieren (25)und (26) erhalten wir

$$\begin{aligned}
\| K(x)-K(y) \| &= \sup_{t\geq 0} |\int_0^\infty e^{(t-r)A}P(t-r)(g(x(r))-g(y(r)))dr| \\
&\leq C \sup_{t\geq 0} \int_0^\infty e^{-\alpha_0|t-r|}|g(x(r))-g(y(r))|dr \\
&\leq C\epsilon \| x-y \| \sup_{t\geq 0} \int_0^\infty e^{-\alpha_0|t-r|}dr \\
&= C\epsilon \| x-y \| \sup_{t\geq 0} (\int_0^t e^{-\alpha_0(t-r)}dr + \int_t^\infty e^{-\alpha_0(r-t)}dr) \\
&= C\epsilon \| x-y \| \sup_{t\geq 0} \left(e^{-\alpha_0 t}\left(\frac{e^{\alpha_0 t}}{\alpha_0}-\frac{1}{\alpha_0}\right)+e^{\alpha_0 t}\frac{e^{-\alpha_0 t}}{\alpha_0}\right) \\
&= C\epsilon \| x-y \| \sup_{t\geq 0} \left(\frac{1}{\alpha_0}-\frac{e^{-\alpha_0 t}}{\alpha_0}+\frac{1}{\alpha_0}\right) \\
&= C\epsilon \| x-y \| \sup_{t\geq 0} \left(\frac{2-e^{-\alpha_0 t}}{\alpha_0}\right) \\
&= \frac{2C\epsilon}{\alpha_0} \| x-y \|
\end{aligned} \tag{27}$$

Für $\epsilon < \frac{\alpha_0}{2C}$ existiert nach dem Banachsche Fixpunktssatz eine eindeutige Lösung $\psi(t,x_+)$.

Wegen Hilfssatz 5 ist $\psi(t,x_+)$ C^k bzgl x wenn f C^k bzgl x ist.
Wir haben $\psi(t,0)=0$ (das erhalten wir durch Einsetzen in der Fixpunkgleichung (24)) .Wir definieren $h^+(a)=P^-\psi(0,a)$, dann erhalten wir

$$M^+(0)\cap U = \left\{a+h^+(a) \ | \ a\in E^+\cap U\right\}$$

für die stabile Mannigfaltigkeit von nicht linearem System in einer Umgebung U von 0 . Das gilt ,da wir angenommen haben , dass unsere Lösung $x(t)$ beschränkt ist . M^+ ist der Graph von $h^+(a)$ aus dem stabilen Unterraum E^+ in dem instabilen Unterraum E^-. Wir behaupten ,dass $M^+(0)$ E^+ in 0 tangiert .
Aus dem Beweis von Hilfssatz 5 folgt, dass $\varphi(t,x_+)=\frac{\partial}{\partial x_+}\psi(t,x_+)$ erfüllt

$$\varphi(t,x_+)=e^{tA}P^+ + \int_0^\infty e^{(t-r)A}P(t-r)g_x(\psi(r,x_+))\varphi(r,x_+)dr \tag{28}$$

Bei $(t,x_+)=(0,0)$ erhalten wir $\varphi(0,0)=P^+$. Das ist äquivalent zu

$$\frac{\partial}{\partial a}h^+(a)|_{a=0} = \frac{\partial}{\partial a}P^-\psi(0,a)|_{a=0} = P^-\varphi(0,0)=0 \tag{29}$$

$\Longrightarrow M^+(0)$ berührt die lineare stabile Mannigfaltigkeit E^+ in 0 .
Um dieses Problem zu verallgemeinen , transformieren wir die Koordinaten $x(t)$ in $\tilde{x}(t) = \exp(\alpha t)x(t)$, (d.h $x(t) = \exp(-\alpha t)\tilde{x}(t)$) , A in $\tilde{A} = A + \alpha\mathbb{I}$, und $g(x)$ in $\tilde{g}(t,\tilde{x}) = \exp(\alpha t)g(x) = \exp(\alpha t)g(\exp(-\alpha t)\tilde{x})$. (das erhalten wir durch ersetzen A in A + αI in der Lösungsformel von $x(t)$)
Da $\tilde{A}$ und $\tilde{g}$ unsere Voraussetzungen erfüllen und $\sup_{t\geq 0}|\tilde{x}(t)| \leq \delta$
$\Longrightarrow \sup_{t\geq 0}|x(t)| \leq \delta\exp(-\alpha t)$.
Wegen der Eindeutigkeit der Lösung von unserer Integrationsgleichung in einer hinreichend kleinen Umgebung von x_0 , erhalten wir

$$M^{+,\alpha}(x_0) \cap U(x_0) = \left\{x_0 + a + h^{+,\alpha}(a) \;\middle|\; a \in E^{+,\alpha} \cap U\right\}. \tag{30}$$

Für die letzte Behauptung :
Sei $x \in M^{+,\alpha_2}(x_0)$ beliebig, dann gilt nach Definition , dass $\gamma_+(x) \subseteq U(x_0)$ und $\sup_{t\geq 0} e^{\alpha_2 t}|\Phi(t,x) - x_0| < \infty$.
Da $0 < \alpha_1 \leq \alpha_2$ und Exponentialfunktion monoton steigend , gilt :

$$e^{\alpha_1 t}|\Phi(t,x) - x_0| \leq e^{\alpha_2 t}|\Phi(t,x) - x_0|$$

$$\Longrightarrow \sup_{t\geq 0} e^{\alpha_1 t}|\Phi(t,x) - x_0| \leq \sup_{t\geq 0} e^{\alpha_2 t}|\Phi(t,x) - x_0| < \infty.$$

Somit gilt $x \in M^{+,\alpha_1}(x_0)$. Da $x \in M^{+,\alpha_2}$ beliebig , gilt $M^{+,\alpha_2}(x_0) \subseteq M^{+,\alpha_1}(x_0)$,wenn $\alpha_1 \leq \alpha_2$.
Zunächst sei $x \in M^{+,\alpha_2}(x_0) \cap U(x_0) \subseteq M^{+,\alpha_1}(x_0) \cap U(x_0)$,dann $x = x_0 + a + h^{+,\alpha_2}(a) = x_0 + a + h^{+,\alpha_1}(a)$. für $a \in E^{+,\alpha_1} = E^{+,\alpha_2}$. Das impliziert $h^{+,\alpha_2}(a) = h^{+,\alpha_1}(a)$. Dann folgt die Behauptung.

□

Dieser Satz gilt auch für instabile Mannigfaltigkeit . Wir müssen dann nur Zeitumkehr also $t \to -t$ machen .

4 Literaturverzeichnis

1. Schmidt , Martin : *Dynamische System* , Universität Mannheim , 2015.
2. Teschl , Gerald : *Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems* , 2011 .