Die Euler-Lagrange-Gleichungen

Marco Simnacher

20.10.2016

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

In seinem Vortrag bzw. seiner Ausarbeitung hat David bereits die Variationsrechnung sowie einiges über Differentiale von Funktionen auf normierten Vektorräumen und Bedingungen für Extrema solcher Funktionen vorgestellt. Aufbauend auf diesem Wissen will ich in meiner Ausabeitung eine notwendige Bedingung für ein Extremum herleiten, die sogenannte Euler-Lagrange-Gleichung. Dabei werde ich mich auf eine spezielle Klasse von Funktionalen beschränken, welche wie folgt aussehen wird:

$$J(y(x)) = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y(x), y'(x))dx, J : C^2([x_0, x_1) \to \mathbb{R} \tag{1}$$

wobei f hier zweimal partiell stetig differenzierbar nach x,y und y' sein soll. Außerdem gelte für die Randwerte $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$, die y jeweils bei x_0 und x_1 annehmen soll. Die Suche nach einem Extremum von J an der Stelle y (y ist eine zweimal stetig diffenzierbare Funktion) nennt man dann fixed endpoint variational problem. Später kann gezeigt werden, dass eine notwendige Bedingung für ein solches Extremum eine Differentialgleichung zweiter Ordnung ist.

2 Vorbereitung zur Herleitung der Euler-Lagrange-Gleichung

Zunächst eine kurze Wiederholung:

Definition 1. *Sei $J : X \to \mathbb{R}$ ein Funktional auf einem normierten Vektorraum X, S eine offene Teilmenge von X. J hat ein lokales Maximum (bzw. Minimum) an der Stelle $y \in S$, wenn ein $\epsilon > 0$ existiert, so dass $J(y) \geq J(y_0)$ (bzw. $J(y) \leq J(y_0)$) für alle $y_0 \in B(y, \epsilon)$.*

Neben dieser Definition wird auch noch folgender Satz benötigt, welcher im Laufe der Ausarbeitung auf obige Klasse von Funktionalen spezifiziert wird:

Definition 2. *Sei W Teilraum eines Vektorraums V und U eine Teilmenge von V mit folgender Eigenschaft: Für jedes $x \in U$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass auch $x + h \in U$ ist und für alle $h \in W$ mit $\|h\| < \delta$. Dann soll U bezüglich W offene oder kurz W-offene Teilmenge von V heißen.*

Satz 3. *Seien V ein Vektorraum, W ein Teilraum von V und U eine bzgl. W offene Teilmenge von V. Das Funktional $J[x]$ sei auf V erklärt und besitze für $y \in U$ ein Gateaux-Differential. Dafür, dass $J(\tilde{y})$ an der Stelle y in U ein lokales Extremum besitzt, ist notwendig, dass für alle $\eta \in U$ gilt:*

$$DJ(y, \eta) = 0$$

.

Der Teilraum W wird hier lediglich deshalb eingeführt, um diesen Satz in der Variationsrechnung anwenden zu können. Dies wird im nächsten Satz ersichtlich.

Beweis. y sei ein Minimum. Daraus folgt, dass für alle $\eta \in V$ die Abbildung $t \to f(y - t\eta)$ auf einer offenen Umgebung $O \subset \mathbb{R}$ differenzierbar ist und dort ein lokales Minimum besitzt. Die entsprechende Richtungsableitung von $t \to f(y + t\eta)$ verschwindet also. Deshalb gilt: $\frac{\partial f}{\partial \eta}(y) = 0$ für alle $\eta \in W$ und damit auch $DJ(y) = 0$. □

Lemma 4. *Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha < \beta$. Dann existiert eine Funktion $v \in C^2(\mathbb{R})$, so dass gilt: $v(x) > 0$ für alle $x \in (\alpha, \beta)$ und $v(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R} \backslash (\alpha, \beta)$.*

Beweis. Die Idee hinter dem Beweis ist, dass ein Polynom konstruiert wird, welches die Bedingungen aus dem Lemma auf dem Intervall erfüllt. Anschließend werden die ersten beiden Ableitungen an den Punkten α und β betrachtet und auf Stetigkeit überprüft.
Sei

$$v(x) = \begin{cases} (x-\alpha)^3(\beta - x^3) & \text{wenn } x \in (\alpha, \beta) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Da v ein Polynom ist, können wir es beliebig oft auf $\mathbb{R}\backslash\{\alpha, \beta\}$ stetig differenzieren. Außerdem ist $v(x) > 0$ für alle $x \in (\alpha, \beta)$. Jetzt betrachten wir die ersten beiden Ableitungen der Funktion bei $x = \alpha$ und $x = \beta$, um zu zeigen, dass diese dort stetig sind:

$$\lim_{x\to\alpha^+} \frac{v(x) - v(\alpha)}{(x-\alpha)} = \lim_{x\to\alpha^+} \frac{(x-\alpha)^3(\beta - x)^3 - 0}{(x-\alpha)} = \lim_{x\to\alpha^+} (x-\alpha)^2(\beta-x)^3 = 0$$

$$\lim_{x\to\alpha^-} \frac{v(x) - v(\alpha)}{(x-\alpha)} = \lim_{x\to\alpha^-} \frac{0-0}{(x-\alpha)} = 0$$

Daraus folgt, dass die erste Ableitung an der Stelle $x = \alpha$ sowohl von links als auch von rechts verschwindet und somit stetig ist. Analog lässt sich dies auch für $x = \beta$ und die zweite Ableitung zeigen. Deshalb gilt: $v \in C^2(\mathbb{R})$. $\square$

Mithilfe von diesem Lemma wird nun das Fundamentallemma der Variationsrechnung (FdV) bewiesen:

Lemma 5. *Sei $g(x) \in C([x_0, x_1])$ und gelte*

$$\int_{x_0}^{x_1} g(x)h(x)dx = 0$$

für alle Funktionen $h(x) \in C^2([x_0, x_1])$ mit $h(x_0) = h(x_1) = 0$. Dann gilt: $g(x) = 0$ für alle $x \in [x_0, x_1]$.

Beweis. Idee: Wir führen einen Widerspruchsbeweis durch, indem wir zuerst ein $g \neq 0$ annehmen und anschließend zeigen, dass wir dann auch eine Funktion h finden können, für die das Integral ungleich 0 sein muss.
Annahme: Es existiert ein $c \in [x_0, x_1]$ mit $g(c) \neq 0$. Dann können wir o.B.d.A. wegen der Stetigkeit von g annehmen, dass $g(c) > 0$ und $c \in (x_0, x_1)$. Aus der Stetigkeit von g folgt dann: Es existiert ein α, β in $[x_0, x_1]$, so dass $x_0 < \alpha < c < \beta < x_1$ und $g(x) > 0$ für $x \in (\alpha, \beta)$. Aus dem vorherigen Lemma wissen wir, dass eine Funktion $h \in C^2(\mathbb{R})$ existiert, so dass $h(x) > 0$ für alle $x \in (\alpha, \beta)$ und $h(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}\backslash(\alpha, \beta)$. Daraus folgt:

$$\int_{x_0}^{x_1} g(x)h(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} g(x)h(x)dx > 0$$

Dies ist ein Widerspruch zu unserer Annahme, dass $\int_{x_0}^{x_1} g(x)h(x)dx = 0$ für alle $h \in C^2([x_0, x_1])$. Deshalb muss gelten: $g(x) = 0$ auf $[x_0, x_1]$. $\square$

Jetzt werden die Funktionale von der Gestalt betrachtet, wie sie bereits in (1) beschrieben wurden:

$$J(y(x)) = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y(x), y'(x))dx, J : C^2([x_0, x_1) \to \mathbb{R}$$

wobei f hier zweimal partiell stetig differenzierbar nach x,y und y' sein soll. Außerdem gelte für die Randwerte $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$, die y jeweils bei x_0 und x_1 annehmen soll. Als nächstes wird ein notwendiges Kriterium für die Funktion $y \in C^2([x_0, x_1])$ hergeleitet, so dass $y(x_0) = y_0$ und $y(x_1) = y_1$ und J bei $y \in S$ in S ein lokales Extremum hat. Hierzu benötigen wir noch folgende Mengen:

$$S = \{y \in C^2([x_0, x_1]) : y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1\}$$

$$H = \{\eta \in C^2([x_0, x_1]) : \eta(x_0) = \eta(x_1) = 0\}.$$

Die Menge H wird hier benötigt, um die zu betrachtenden Funktionen, an denen das Funktional ein Extremum haben soll, zu definieren. Dies ist die Funktionenschar $\tilde{y} = y + \epsilon\eta$, wobei gelten soll, dass $\|y - \tilde{y}\| < \epsilon$.

Satz 6. *Das Funktional* $J(\tilde{y}(x)) = \int_{x_0}^{x_1} f(x, \tilde{y}(x), \tilde{y'}(x))dx$ *sei auf der Menge S definiert und besitze für* $y \in S$ *ein Gateaux-Differential. Dafür, dass* $J(\tilde{y})$ *für* $\tilde{y} = y$ *in S ein Lokales Extremum besitzt, ist notwendig,dass gilt:*

$$DJ(y, \eta) = \frac{d}{d\epsilon} J(y + \epsilon\eta)|_{\epsilon=0} = 0 \textit{ für alle } \eta \in H.$$

Beweis. Hier soll $C^2([x_0, x_1])$ der Vektorraum V, H der Teilraum von V und S die Teilmenge von V sein, die bzgl H offen ist. Damit folgt der Satz dann aus Satz 3. $\square$

3 Euler-Lagrange-Gleichung

Mithilfe von diesem Satz wird nun die Euler-Lagrange-Gleichung nach folgender Idee hergeleitet: Das Funktional (1) wird abgeleitet und anschließend wird darauf das Fundamentallemma angewendet.

$$
\begin{aligned}
DJ(y,\eta) &= \frac{d}{d\epsilon}J(y+\epsilon\eta)|_{\epsilon=0} = \int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{d\epsilon} f(x, y+\epsilon\eta, y'+\epsilon\eta')|_{\epsilon=0}dx \\
&= \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial f(x, y+\epsilon\eta, y'+\epsilon\eta')}{\partial x_2} * \eta|_{\epsilon=0} + \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial f(x, y+\epsilon\eta, y'+\epsilon\eta')}{\partial x_3} * \eta'|_{\epsilon=0} \\
&= \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial f(x,y,y')}{\partial y} * \eta|_{\epsilon=0} + \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial f(x,y,y')}{\partial y'} * \eta'|_{\epsilon=0}
\end{aligned}
$$

Die partielle Ableitung nach x_2 bzw. x_3 ist als die partielle Ableitung von f nach der zweiten bzw. dritten Variablen definiert. Um die Ableitung von η wegzubekommen und anschließend eine Form wie im Fundamentallemma zu erhalten, wird der zweite Summand partiell integriert, indem das Integral auseinandergezogen wird:

$$
\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial f(x,y,y')}{\partial y'} * \eta'(x)|_{\epsilon=0}
$$

$$
= \eta(x)\frac{\partial f}{\partial y'}|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx}\frac{\partial}{\partial y'}dx
$$

Der erste Teil des Terms fällt weg, da $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$. Also gilt:

$$
DJ(y,\eta) = \int_{x_0}^{x_1} \eta(x) * (\frac{\partial f(x,y,y')}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f(x,y,y')}{\partial y'})dx = 0 \tag{2}
$$

Wegen Satz 6 muss das Integral gleich 0 sein, falls J an der Stelle y ein Extremum besitzen soll. Außerdem erfüllt $DJ(y,\eta)$ die Voraussetzungen des Fundamentallemmas:

1. $\eta(x) \in H \Rightarrow \eta(x)$ ist zweimal stetig differenzierbar und $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0 \Rightarrow \eta(x)$ entspricht $h(x)$
2. $\frac{\partial f(x,y,y')}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f(x,y,y')}{\partial y'}$ ist stetig, da f zweimal partiell stetig differenzierbar ist $\Rightarrow \frac{\partial f(x,y,y')}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f(x,y,y')}{\partial y'}$ entspricht $g(x)$.

Daraus folgt, dass

$$
\frac{\partial f(x,y,y')}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f(x,y,y')}{\partial y'} = 0 \tag{3}
$$

gelten muss, wenn (2) gilt. (3) heißt dann die Euler-Lagrange Gleichung und ist eine notwendige Bedingung für ein Extremum von J an der Stelle $y \in S$. Außerdem lässt sich direkt zeigen, dass die Euler-Lagrange-Gleichung eine Differentialgleichung zweiter Ordnung ist:

$$0 = \frac{\partial f(x,y,y')}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f(x,y,y')}{\partial y'} = \frac{\partial f(x,y,y')}{\partial y} - \frac{\partial f(x,y,y')}{\partial x \partial y'} - \frac{\partial f(x,y,y')}{\partial y \partial y'}y' - \frac{\partial f(x,y,y')}{\partial y' \partial y'}y''$$

Zusammengefasst ergibt sich folgender Satz:

Satz 7. *Sei $J : C^2([x_0,x_1]) \to \mathbb{R}, [x_0,x_1] \subset \mathbb{R}$ von der Form $J(y) = \int_{x_0}^{x_1} f(x,y,y')dx$, wobei f eine zweimal partiell stetig differenzierbare Funktion bzgl. x,y und y' ist, $x_0 < x_1$ und*

$$S = \{y \in C^2([x_0,x_1]) : y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1\}$$

, wobei $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$. Wenn J ein Extremum an der Stelle $y \in S$ hat, gilt

$$\frac{\partial f(x,y,y')}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f(x,y,y')}{\partial y'} = 0 \textit{ für alle } x \in [x_0,x_1].$$

4 Beispiele

Das wohl bekannteste Beispiel für die Verwendung der Euler-Lagrange-Gleichung ist folgendes:
Beispiel 1.(Kurvenlänge) Ziel ist es, den kürzesten Abstand zwischen zwei Punkten zu erhalten, also aus einer Menge an Funktionen die mit der kürzesten Strecke zu wählen. In diesem Beispiel werden die Punkte $(x_0, y_0) = (0, 0)$ und $(x_1, y_1) = (1, 1)$ gewählt, außerdem gilt: $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

$$J(y) = \int_0^1 \sqrt{1 + y'^2} dx$$

beschreibt dann die Länge der Kurve zwischen den beiden Randpunkten aus dem $\mathbb{R}^2$. Wenn y ein Minimum von J sein soll, muss wegen (3) gelten:

$$\frac{\partial f(x, y, y')}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f(x, y, y')}{\partial y'} = 0 = -\frac{d}{dx} \frac{y'}{1 + y'^2}$$

. $\Rightarrow \frac{y'}{1+y'^2} = const.$, da die Ableitung von selbigem gleich Null ist

$$\Rightarrow y' = c_1 \Rightarrow y(x) = c_1 x + c_2 \text{ mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Da $y(0) = 0$ und $y(1) = 1$ ist, gilt: $c_2 = 0, c_1 = 1$. Theoretisch muss jetzt noch das hinreichende Kriterium für die zweite Ableitung überprüft werden, in diesem einfachen Beispiel ist aber anschaulich klar, dass eine Gerade durch die Randpunkte ein Minimum von J ist. Daher ist das Minimum bei $y(x) = x$.

5 Literatur

1. Eberhard Klingbeil: 'Variationsrechnung', Mannheim; Wien; Zürich: Bibliographisches Institut, 1977

2. Bruce van Brunt: 'The Calculus of Variations', New York: Springer, 2006

3. Martin U. Schmidt: 'Analysis 1/2', Mannheim, 2013 / 2014

4. Len Seitter: 'Euler-Lagrange-Gleichungen', Mannheim, 2015

5. Marc-Daniel Mildenberger: 'Die Euler-Lagrange-Gleichungen', Mannheim, 2012

6. Martin Schmitz: 'Variationsrechnung und Euler-Lagrange Gleichung', Mannheim, 2012