Seminar zu Stabile Mannigfaltigkeiten Teil II

von Rudolf Römisch

03.11.2016

Inhaltsverzeichnis

1 Motivation

In diesem Seminar werden zunächst die wichtigsten Stabilitätsbegriffe definiert. Außerdem werden wie bei dem Seminar davor zentrale Begriffe der Stabilitätstheorie wiederholt um den von einer gewöhnlichen Differentialgleichung erzeugten Fluss genauer zu beschreiben.
So wird zunächst das Theorem der stabilen Mannigfaltigkeiten im hyperbolischen Fall wiederholt und anschließend benutzt um auf einen allgemeineren Fall hin zu arbeiten.
Zu guter Letzt werden im letzten Abschnitt einige Beispiele angeführt, wo man die Systeme auf Stabilität hin untersucht. Auch geben stabile Mannigfaltigkeiten eine formale mathematische Definition der allgemeinen Vorstellung eines Attraktors sowie Repellors(auch negativer Attraktor genannt).

2 Einführung

2.1 Definitionen

Zunächst werden einige Grundbegriffe definiert:

Definition 1. *(lokaler Fluss)*
Sei X ein topologischer Raum, $W \subset \mathbb{R} \times X$ offene Teilmenge. $\Phi : W \to X$ heißt Fluss, falls gilt:

(I) $\forall x \in X$ *ist* $\{t \in \mathbb{R} \mid (t, x) \in W\}$ *offenes Intervall, dass die Null enthält,*

(II) Sei $(s, x) \in W$ und $(t, \Phi(s, x)) \in W$, dann gilt: $(t + s, x) \in W$ und $\Phi(t, \Phi(s, x)) = \Phi(t + s, x)$

(III) $\Phi(0, x) = x \quad \forall x \in X$

Definition 2. *(globaler Fluss)*
Sei Φ lokaler Fluss, falls $W = \mathbb{R} \times X$ so ist Φ ein globaler Fluss

Definition 3. *(Fixpunkt)*
Sei $\Phi : W \to X$ ein lokaler Fluss, $x_0 \in X$ ist ein Fixpunkt vom Fluss Φ, falls gilt: $\Phi(t, x_0) = x_0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Definition 4. *Ein Fixpunkt x_0 vom lokalen Fluss $\Phi : W \to X$ heißt:*

(I) stabil, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass $\Phi(t, x) \in B(x_0, \epsilon)$ für alle $(t, x) \in [0, \infty) \times B(x_0, \delta) \cap W$ gilt.

(II) instabil, wenn dieser nicht stabil ist.

(III) attraktiv, wenn es ein $\delta > 0$ gibt, so dass $[0, \infty) \times B(x_0, \delta)$ in W liegt und es für alle $\varepsilon > 0$ ein $t_0 > 0$ gibt, so dass $\Phi(t, x) \in B(x_0, \varepsilon) \quad \forall (t, x) \in (t_0, \infty) \times B(x_0, \delta)$.

(IV) asymptotisch stabil, wenn der Fixpunkt stabil und attraktiv ist.

Definition 5. *(Orbit)*
Sei $\Phi : W \to X$ ein lokaler Fluss und für jedes $x \in X$ ist:

- $\gamma^+(x) := \{\Phi(t, x) \mid 0 \leq t < t^+(x)\}$ *der positive Halborbit*
- $\gamma^-(x) := \{\Phi(t, x) \mid t^-(x) < t \leq 0\}$ *der negative Halborbit*
- $\gamma(x) := \gamma^+(x) \cup \gamma^-(x)$ *der Orbit*

durch x.

Definition 6. *(hyperbolisch)*
Der von A erzeugte Fluss e^{tA} heißt hyperbolisch, wenn kein Eigenwert von A auf der imaginären Achse liegt, d. h.

$$\sigma(A) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$$

wobei $\sigma(A)$ das Spektrum von A ist.
Der Vektorraum V zerfällt somit in zwei Unterräume

$$V = V^{+} \oplus V^{-}$$

diese heißten stabiler bzw. instabiler Unterraum.
Ein Fixpunkt x_0 einer Differentialgleichung $\dot{x} = f(x)$ heißt hyperbolisch, wenn die Linearisierung $f'(x_0)$ keine Eigenwerte auf der imaginären Achse hat.

Definition 7. *(instabile/stabile Projektion)*
Sei V^{+} bzw. V^{-} der stabile bzw. instabile Unterraum. Dann ist

$$P^{+} : \mathbb{R} \longrightarrow V^{+}$$

definiert als Projektion auf den stabilen Unterraum. Und

$$P^{-} = (id - P^{+}) : \mathbb{R} \longrightarrow V^{-}$$

definiert.

3 Wiederholung

Nun werden einige zentrale Begriffe definiert bzw. erklärt, die für das weitere Vorgehen von zentraler Bedeutung sind. Außerdem wird das Theorem für stabile Mannigfaltigkeiten im hyperbolischen Fall vorausgesetzt.

Definition 8. *(stabile/instabile Menge)*
Sei $x_0 \in X$ ein Fixpunkt vom lokalen Fluss $\Phi : W \to X$ dann heißt die Menge

$$S^{\pm}(x_0) = \{x| \lim_{t \to \pm\infty} \mid \Phi(t,x) - x_0 \mid = 0\} \quad \textit{stabile/instabile} \quad \textit{Menge},$$

d. h. eine Menge des Fixpunktes x_0, welche für $t \to \infty$ bzw. $t \to -\infty$ gegen x_0 konvergiert.

Definition 9. *(lineare stabile/instabile Mannigfaltigkeiten)*
Sei $\alpha > 0$ und A die Jacobimatrix vom Fixpunkt x_0, dann ist

$$E^{\pm,\alpha}(e^A) = \{x \mid \lim_{t \to \pm\infty} e^{\pm\alpha t} \mid exp(tA)x \mid = 0\}$$

Äquivalent zu

$$E^{\pm,\alpha}(e^A) = \bigoplus_{\pm Re(\alpha j) > \alpha} Ker(A - \alpha_j)^{\alpha_j}$$

die lineare stabile/instabile Mannigfaltigkeit.

Definition 10. *(lokale stabile/instabile Mannigfaltigkeit)*
Die Menge aller Punkte, die mit exponentieller Rate $\alpha > 0$ mit $t \to \pm\infty$ gegen x_0 konvergieren wird definiert als

$$M^{\pm,\alpha}(x_0) = \{x \mid \gamma_{\pm}(x) \subseteq U(x_0) und \sup_{\pm t \geq 0} e^{\pm\alpha t} \mid \Phi(t,x) - x_0 \mid < \infty\}$$

und tangential zu ihrem linearen Gegenstück $E^{\pm,\alpha}$ ist. Die lokale stabile/instabile Mannigfaltigkeit ist demnach die Vereinigungen aller Mengen, welche exponentiell mit $t \to \pm\infty$ gegen den Fixpunkt x_0 konvergieren, d. h.

$$M^{\pm}(x_0) = \bigcup_{\alpha > 0} M^{\pm,\alpha}(x_0)$$

Satz 11. *Seien die Eigenwerte von A beschrieben durch α_j, $1 \leq j \leq m$, und die entsprechende algebraische und geometrische Vielfachheit als a_j und g_j. Das System $\dot{x} = Ax$ ist global stabil genau dann wenn $\Re(\alpha_j) \leq 0$ und $a_j = g_j$ wenn immer $\Re(\alpha_j) = 0$.*
Das System $\dot{x} = Ax$ ist global asymptotisch stabil genau dann wenn $\Re(\alpha_j) < 0 \forall\ j$ und instabil falls es ein $\alpha_j > 0$ gibt.

Theorem 12. *(Stabile/Instabile Mannigfaltigkeit im hyperbolischen Fall) Angenommen $f \in C_k$, $k \geq 1$, hat Fixpunkt x_0 mit entsprechender Jacobi-Matrix A. Wenn $\alpha > 0$ und $A + \alpha I$ hyperbolisch, dann gibt es eine Umgebung $U(x_0)$ und eine Funktion $h^{+,\alpha} \in C_k(E^{+,\alpha} \cap U(x_0), E^{-,\alpha})$, sodass*

$$M^{+,\alpha} \cap U(x_0) = \{x_0 + a + h(a) \mid a \in E^{+,\alpha} \cap U\} \tag{1}$$

$h^{+,\alpha}$ und dessen Jacobi-Matrix verschwinden bei 0, d. h. $M^{+,\alpha}(x_0)$ ist tangential zu dessen linearen Gegenstück $E^{+,\alpha}$ bei x_0. Außerdem haben wir $M^{+,\alpha_2}(x_0) \subseteq M^{+,\alpha_1}(x_0)$, wenn $\alpha_1 \leq \alpha_2$ und $M^{+,\alpha_2}(x_0) = M^{+,\alpha_1}(x_0)$, wenn $E^{+,\alpha_2} = E^{+,\alpha_1}$.

Den instabilen Fall erhält man durch Zeitumkehrung $t \to -\infty$.

4 Stabile Mannigfaltigkeiten

Als erste Konsequenz erhalten wir die Existenz von stabilen Mannigfaltigkeiten im nicht hyperbolischen Fall, da $M^+(x_0) = M^{+,\alpha}(x_0)$ für $\alpha > 0$ klein genug so das $E^+ = E^{+,\alpha}$.
Dies können wir behaupten, da wegen Definition

$$E^{\pm,\alpha} = E^{\pm} \quad \forall |\alpha| < |\Re(\sigma)|$$

gilt. Und somit

Theorem 13. *(Stabile/Instabile Mannigfaltigkeit)*
Angenommen $f \in C^k$, $k \geq 1$, hat einen Fixpunkt x_0 mit entsprechender Jacobi-Matrix A. Dann gibt es eine Umgebung $U(x_0)$ und Funktionen $h^{\pm} \in C_k(E^{\pm} \cap U, E^{\mp})$, sodass

$$M^{\pm}(x_0) \cap U(x_0) = \{x_0 + a + h(a) \mid a \in E^{\pm} \cap U\} \tag{2}$$

$h^{\pm}$ und deren Jacobi-Matrizen verschwinden bei 0, d. h. $M^{\pm}(x_0)$ sind tangential zu deren entsprechenden linearen Gegenstücken $E^{\pm}$ bei x_0. Außerdem gilt

$$\mid \Phi(t,x) - x_0 \mid \leq Ce^{\mp t\alpha}, \quad \pm t \leq 0, \quad x \in M^{\pm} \tag{3}$$

für jedes $\alpha < min\{\mid \Re(\alpha_j) \mid\mid \alpha_j \in \sigma(A), \Re(\alpha_j) \neq 0\}$ und $C > 0$ abhängig von α.

Außerdem können wir noch etwas mehr sagen.

Theorem 14. *Angenommen $f \in C_k, k \geq 1$, hat einen hyperbolischen Fixpunkt x_0. Dann gibt es eine Umgebung $U(x_0)$, sodass $\gamma_{\pm}(x) \subset U(x_0)$ genau dann wenn $x \in M^{\pm}(x_0) \cap U(x_0)$. Insbesondere*

$$S^{\pm}(x_0) = M^{\pm}(x_0) \tag{4}$$

Beweis. Diese Aussage folgt, da jede Lösung die ausreichend nahe an x_0 liegt die Integralformel

$$x(t)e^{tA}x_+ + \int_0^t e^{(t-r)A}g_+(x(r))dr + \int_t^{\infty} e^{(t-r)A}g_-(x(r))dr$$

löst. Wobei g_+ bzw. g_- die stabile bzw. instabile Projektion von dem inhomogenen Teil ist. Daher impliziert Eindeutigkeit der Lösung in einer ausreichend kleinen Umgebung von x_0, dass der Anfangswert in $M^+(x_0)$ liegen muss. $\square$

5 Beispiele

5.1 Vektorfeld (I)

Bei Betrachtung das Vektorfeldes

$$f(x) = (-x_1 + x_2 + 3x_2^2, x_2). \tag{5}$$

erhält man Fluss, indem man zunächst nach der zweiten Gleichung ausgehend in die erste Gleichung einsetzt und löst:

$$\begin{aligned} x_2(t) =& x_2 e^t, \\ x_1(t) =& e^{-t} + \int_0^t e^{r-t}(x_2 e^r + 3x_2 e^{2r})dr \\ =& x_1 e^{-t} + \int_0^t x_2 e^{2r-t} + 3x_2^2 e^{3r-t} dr \\ =& x_1 e^{-t} + x_2 \frac{e^t - e^{-t}}{2} + x_2^2(e^{2t} - e^{-t}) \end{aligned}$$

So kommen wir auf den Fluss:

$$\Phi(t,x) = (x_1 e^{-t} + x_2 sinh(t) + x_2^2(e^{2t} - e^{-t}), x_2 e^t). \tag{6}$$

Außerdem existiert nur ein Fixpunkt und zwar $x_0 = 0$ mit den entsprechenden stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten

$$S^+(0) = \{x \mid x_2 = 0\}, \quad S^-(0) = \{x \mid x_1 = \frac{x_2}{2} + x_2^2\}. \tag{7}$$

Die Linearisierung ist gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{8}$$

Und wie in den Theoremen erwähnt sind die stabile bzw. instabile Mannigfaltigkeit tangential zu ihren linearen Gegenstücken

$$E^+ = \{x \mid x_2 = 0\}, \quad E^- = \{x \mid x_1 = \frac{x_2}{2}\} \tag{9}$$

5.2 Vektorfeld (II)

Gegeben ist das Vektorfeld

$$f(x) = (-x_1, x_2 + x_1^2) \tag{10}$$

dessen Linearisierung ist gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{11}$$

Nun kann man den Fluss durch die Integralformel für lineare Differentialgleichungen lösen.
Intuitiv erhalten wir für die erste Gleichung

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -x_1(t) \\ \Rightarrow x_1(t) &= x_1 e^{-t} \end{aligned}$$

Nun setzen wir dies in die zweite Gleichung ein

$$\dot{x}_2(t) = x_2(t) + e^{-2t} x_1^2$$

und lösen mit unserer Integralformel

$$\begin{aligned} x_2(t) &= x_2 e^t + \int_0^t e^{\int_s^t 1dr} e^{-2s} x_1^2 ds \\ &= x_2 e^t + \int_0^t e^{t-s} e^{-2s} x_1^2 ds \\ &= x_2 e^t + [-\frac{1}{3} e^{t-3s} x_1^2]_0^t \\ &= x_2 e^t + \frac{1}{3} x_1^2 (e^t - e^{-2t}) \end{aligned}$$

Somit erhalten wir den Fluss

$$\Phi(t, x) = (x_1 e^{-t}, x_2 e^t + \frac{1}{3} x_1^2 (e^t - e^{-2t})) \tag{12}$$

Und die Mannigfaltigkeiten

$$S^+(0) = \{x \mid x_2 = -\frac{1}{3} x_1^2\} \qquad S^-(0) = \{x \mid x_1 = 0\} \tag{13}$$

5.3 Lineare stabile/instabile Mannigfaltigkeiten

Finde die Teilräume $E^{\pm,\alpha}$ von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \tag{14}$$

sowie deren Projektionen $P^{\pm}$.
Zunächst nehmen wir die Definitionen der Teilräume

$$E^{\pm,\alpha} = \{x \mid \lim_{t\to\pm\infty} e^{\pm\alpha t} \mid exp(tA)x \mid = 0\} \tag{15}$$

und setzen die entsprechenden Werte in die Formel ein für

$$\begin{aligned} E^{+,\alpha} &= \{x \mid \lim_{t\to\infty} (e^{2t\alpha}(e^{2t}x_1^2 + e^{-2t}x_2^2 + e^{-4t}x_3^2)^{\frac{1}{2}}) = 0\} \\ &= \{x \mid \lim_{t\to\infty} (e^{(1+\alpha)2t}x_1^2 + e^{(-1+\alpha)2t}x_2^2 + e^{(-2+\alpha)2t}x_3^2)^{\frac{1}{2}} = 0\}. \end{aligned}$$

sowie für

$$E^{-,\alpha} = \{x \mid \lim_{t\to-\infty} (e^{(1-\alpha)2t}x_1^2 + e^{(1+\alpha)-2t}x_2^2 + e^{(2+\alpha)-2t}x_3^2)^{\frac{1}{2}} = 0\}$$

als Ergebnis erhalten wir die lineare stabile Mannigfaltigkeit als

$$\begin{aligned} E^{+,\alpha} &= span\{(0,1,0),(0,0,1)\} \quad mit \quad \alpha \in (0,1) \\ &= span\{(0,0,1)\} \quad mit \quad \alpha \in [1,2) \\ &= \emptyset \qquad mit \quad \alpha \geq 2 \end{aligned}$$

sowie die lineare instabile Mannigfaltigkeit

$$\begin{aligned} E^{-,\alpha} &= span(1,0,0) \quad mit \quad \alpha \in (0,1) \\ &= \emptyset \quad mit \quad \alpha \geq 1 \end{aligned}$$

Somit ergeben sich für den Fall $\alpha \in (0,1)$ folgende Projektionen:

$$P^{+} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad P^{-} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5.4 Duffing Gleichung

In diesem Beispiel geht es um eine spezielle Variante der Duffing Gleichung

$$\ddot{x} = -\delta\dot{x} + x - x^3 \qquad \delta \geq 0$$

Hier soll die Stabilität der Fixpunkte durch Linearisierung bestimmt werden. Zunächst stellen wir ein Differentialgleichungssystem auf

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -x_1^3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 - x_2\delta - x_1^3 \end{pmatrix}$$

Nun setzen wir dies gegen 0 um die Fixpunkte zu bestimmen

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 - x_2\delta - x_1^3 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow Fixpunkte : (0,0), (\pm 1, 0)$

Jetzt bestimmen wir die Jacobi-Matrix um die Eigenwerte zu bestimmen

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - 3x_1^2 & -\delta \end{pmatrix}$$

Für den Fixpunkt (0,0)

$$J^{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\delta \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \lambda_{1/2}^{(0,0)} &= -\frac{\delta}{2} \pm \sqrt{\frac{\delta^2}{4} + 1} \\ &= \frac{1}{2}(-\delta \pm \sqrt{\delta^2 + 4}) \end{aligned}$$

Da $\sqrt{\delta^2 + 4} >| \delta |$ sind die Eigenwerte vom Ursprung instabil.

Für die Fixpunkte $(\pm 1, 0)$

$$J^{(\pm 1,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -\delta \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \lambda_{1/2}^{(\pm 1,0)} &= -\frac{\delta}{2} \pm \sqrt{\frac{\delta^2}{4} - 2} \\ &= \frac{1}{2}(-\delta \pm \sqrt{\delta^2 - 8}) \end{aligned}$$

Für den Fall $\delta^2 < 8$ sind die Fixpunkte $(\pm 1, 0)$ stabil.
Für $\delta^2 \geq 8$ asymptotisch stabil, da alle Realteile kleiner als Null sind.

5.5 Mathematische Pendel

In diesem Abschnitt soll ähnlich wie bei der Duffing Gleichung das mathematische Pendel

$$\ddot{x}(t) = -sin(x(t))$$

auf Stabilität der Fixpunkte durch Linearisierung untersucht werden.
Zunächst werden die Fixpunkte bestimmt, indem wir wie in 4.4 vorgehen

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -sin(x_1) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -sin(x_1) \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -sin(x_1) \end{pmatrix}$$

Daraus ergeben sich die Fixpunkte: $\quad (k\pi, 0) \quad k \in \mathbb{Z}$

Nun bestimmen wir die allgemeine Jacobi-Matrix

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -cos(x_1) & 0 \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich für die Fixpunkte $x = ((2k+1)\pi, 0)$ die Jacobi-Matrix

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

mit den Eigenwerten $\lambda_{1,2} = \pm 1$, womit die Fixpunkte instabil sind.

Und für die Fixpunkte $x = (2k\pi, 0)$ die Jacobi-Matrix

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

mit den Eigenwerten $\lambda_{1,2} = \pm i$, womit die Fixpunkte stabil sind.
Dies ist ein gutes Beispiel für bestimmte Startpunkte in einer instabilen Mannigfaltigkeit, die auch in einer stabilen Mannigfaltigkeit sind und somit für $t \to \pm\infty$ gegen den Fixpunkt konvergieren.

6 Literatur

(1) Schmidt, Martin: Dynamische Systeme, Universität Mannheim, 2016.

(2) Teschl, Gerald: Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems, 2011.