Der Poincaresche Wiederkehrsatz
Seminar "Dynamische Systeme"
bei Prof. Schmidt

Sebastian Schmidt

10.11.16

Inhaltsverzeichnis

1 Physikalischer Hintergrund und Motivation

Die Theorie dynamischer Systeme beschäftigt sich in erster Linie mit der Untersuchung des Lösungsverhaltens von gewöhnlichen Differentialgleichungen. In diesem Zusammenhang macht der Poincaresche Wiederkehrsatz eine Aussage darüber, dass die Trajektorien dieser Lösungen unter gewissen Voraussetzungen unendlich oft beliebig nahe zu einem Ausgangspunkt zurückkehren. Der Satz hat unter anderem Anwendungen in der Physik, betrachtet man beispielsweise die Situation, dass man zwei Behälter mit unterschiedlichen Gasen verbindet, so dass sich diese zunächst vermischen, so sagt der Poincaresche Wiederkehrsatz aus, dass es eine beliebig kleine Änderung des Anfangszustands gibt, sodass sich die Gase zu einem späteren Zeitpunkt von selbst wieder trennen - ein vermeintlicher Widerspruch zum zweiten Hauptsatz der Thermodynamik. Die Lösung des Problems liegt darin, diesen statistisch zu interpretieren. Die Wiederkehr ist dann in einer kurzen Zeitspanne sehr unwahrscheinlich und die erwartete Zeit bis zur Wiederkehr weit größer als die Lebenszeit des Sonnensystems.

2 Der Poincaresche Wiederkehrsatz

Zu Beginn dieses Abschnittes wollen wir den Poincareschen Wiederkehrsatzes mit allen Voraussetzungen zitieren, für den Beweis braucht man allerdings noch einige andere Resultate, die zuerst bewiesen werden.

Poincarescher Wiederkehrsatz

Sei $X \subset \mathbb{R}^m$ eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^m$ und $f \in C(X, \mathbb{R}^m)$ sei divergenzfrei. Außerdem sei $M \subset X$ eine kompakte, für den von f erzeugten Fluß invariante Menge. Sei $A \subset M$ eine beliebige, meßbare Menge. Dann existiert für fast jedes $x \in A$ eine Teilfolge $(n_k) \subset \mathbb{N}$ mit
$\Phi(n_k, x) \in A \quad \forall \quad k \in \mathbb{N}$.

Dabei ist „für fast jedes“ so zu verstehen, dass die Aussage nur auf einer Lebesgue-Nullmenge nicht gilt. Zunächst ist auch noch unklar, was mit „divergenzfrei“ gemeint ist. Die Divergenz ist ein Differentialoperator, der durch

$$div : C^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m) \to C^0(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$$
$$f \mapsto \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$$

gegeben ist, wobei f_i die jeweiligen Komponentenfunktionen sind. Dementsprechend heißt eine Funktion divergenzfrei, wenn die Divergenz überall Null wird.

Bemerkung:

Natürlich kann die Divergenz analog auch für Funktionen auf offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^m$ definiert werden.

2.1 Hilfsaussagen

Um den Poincareschen Wiederkehrsatz beweisen zu können, benötigen wir zunächst einige Hilfsaussagen:
Wie im Poincareschen Wiederkehrsatz sei X eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^m$.
Sei $D(0) \subset X$ eine kompakte Teilmenge von X.
Wir definieren

$$\begin{aligned} &D(t) = \Phi(t, D(0)) \\ &v(t) = Volumen(D(t)) = \int_{D(t)} 1 dx^m \end{aligned}$$

Satz von Liouville:

Wenn die Divergenz von F verschwindet, dann erhält der von F erzeugte Fluss Volumen:
v(t) = v(0).
Beweis: Mit Hilfe des Jacobischen Transformationssatzes gilt

$$v(t) = \int_{D(t)} 1 dx^m = \int_{D(0)} |\det(\frac{\partial \Phi(t,x)}{\partial x})| dx^m$$

wobei mit $\det(\frac{\partial \Phi(t,x)}{\partial x})$ die Determinante der entsprechenden Jacobi-Matrix gemeint ist. Mit Hilfe der Formel für die Ableitung der Determinante:

$$\frac{\mathrm{d} det(F(t))}{\mathrm{d}t} = det(F(t)) Spur(F'(t)F(t)^{-1})$$

und unter Benutzung von

$$\left.\frac{\partial \Phi(t,x)}{\partial x}\right|_{t=0} = \mathbb{1}$$

und

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \Phi(t,x)}{\partial x}\right|_{t=0} = F'(x)$$

(die beiden Gleichungen ergeben sich daraus, dass F Φ erzeugt und mit der dritten Eigenschaft des Flusses) folgt durch Einsetzen in die Gleichung für die Ableitung der Determinante, dass

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} det(\frac{\partial \Phi(t,x)}{\partial x})\bigg|_{t=0} = Spur(F'(x)) = div(F(x))$$

Für alle $t_0 \neq 0$ gilt mit der zweiten Eigenschaft bei der Definition des Flusses, dass

$$\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=t_0} = \int_{D(t_0)} \nabla \cdot F dx^n$$

Da die Divergenz überall verschwindet, ist die zeitliche Ableitung des Volumens Null, das Volumen bleibt also konstant.

Satz

Auf einem kompakten, metrischen (allgemeiner: topologischen) Raum X ist jeder Fluss global.

Beweis: siehe Skript "Dynamische Systeme"vom FSS 2016, Seite 29 (Satz 1.37)

2.2 Beweis

Nun beweisen wir den eigentlichen Satz. Mit der Kompaktheit von M können wir schließen, dass M endliches Lebesgue-Maß haben muss (da wir eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ betrachten, folgt diese Aussage aus dem Satz von Heine-Borel). Da M kompakt und für den von f erzeugten Fluss invariant ist, gilt mit dem oben zitierten Satzaus der Vorlesung, dass der entsprechende Fluss global ist. Da die Divergenz von f verschwindet, folgt mit dem Liouville'schen Satz, dass der Fluss das Maß kompakter Teilmengen $K \subset X$ erhält. Nun benutzen wir die Regularität (von Innen) des Lebesgue-Maßes, um die Eigenschaft des Flusses, das Maß von kompakten Teilmengen zu erhalten, auf beliebige, messbare Mengen übertragen zu können. Anschaulich bedeutet diese Eigenschaft, dass wir jede messbare Menge beliebig genau durch eine kompakte Menge annähern können. Formal bedeutet das:

$$\lambda_m(B) = sup\{\lambda_m(K)|K \subset B, K \quad kompakt\}$$

für jede messbare Teilmenge $B \subset \mathbb{R}^n$.

Da die Einschränkung von $\Phi(t, \cdot)$ auf M ein Homöomorphismus von M auf sich selbst ist, ist $\Phi(t, K)$ kompakt für jedes $t \in \mathbb{R}$, falls K $\subset$ M kompakt ist. Also ist K genau dann eine kompakte Teilmenge von $\Phi(t, B)$, falls $\Phi(-t, K)$ eine kompakte Teilmenge von B ist. Aus der Vorlesung wissen wir,dass $\Phi(t, \cdot) \in C^1(X, \mathbb{R}^m)$.

Da das Bild einer messbaren Menge unter einem Homöomorphismus(oder einer C^1-Abbildung) wiederum messbar ist, ist für jedes $t \in \mathbb{R}$ und jede messbare Teilmenge $B \subset \mathbb{R}^m$ die Menge $\Phi(t, B)$ wieder messbar. Somit erhalten wir mit der Regularität des Lebesgue-Maßes, dass

$$\begin{aligned}\lambda(\Phi(t,B)) &= sup\{\lambda(\Phi(t,K)) \,|K \subset B, K \quad kompakt\} \\ &= sup\{\lambda(K) \,|K \subset B, K \quad kompakt\} = \lambda(B)\end{aligned}$$

,das heißt der Fluss ist für beliebige, messbare $B \subset M$ und $t \in \mathbb{R}$ maßerhaltend.
Da für jedes $\Phi(k,x) \notin A$ offensichtlich $\Phi(k,x) \in M \backslash A$ gilt und umgekehrt, folgt, dass $\Phi(k,x)$ genau dann nicht in A liegt, wenn $x \in \Phi(-k, M\backslash A)$. Also ist

$$B_l := A \cap \bigcap_{k \geq l} \Phi(-k, M\backslash A), l \in \mathbb{N}$$

die Menge der Punkte $x \in A$, für die $\Phi(k,x) \notin A \forall k \geq l$, folglich liegen nur endlich viele der $\Phi(k,x), k \in \mathbb{N}$ in A. Alle B_l sind messbar, was daraus folgt, dass A und M messbar sind und abzählbare Schnitte, Komplemente und Bilder messbarer Mengen unter Homöomorphismen wiederum messbar sind. Damit ist

$$B := \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$$

die Menge aller Punkte, für die nur endlich viele der $\Phi(k,x)$ in A liegen. Wir müssen zeigen, dass $\lambda(B) = 0$. Dafür reicht es aus, $\lambda(B_k) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ zu zeigen, da die Vereinigung abzählbar vieler Nullmengen wiederum eine Nullmenge ist.
Aus $x \in B_l$ und $\Phi(k,x) \in A$ folgt nach Definition der B_l, dass $k < l$ sein muss. Insbesondere, da $B_l \subset A$ gilt, ist $\Phi((jl),x) \notin B$, also $\Phi((jl),B_l) \cap B_l = \emptyset$. Da die Einschränkung von $\Phi(t,\cdot)$ auf M ein Homöomorphismus ist, gilt insbesondere (mit der zweiten Eigenschaft in der Definition eines Flusses):

$$\Phi((jl),B_l) \cap \Phi(k,B_l) = \Phi((nl), \Phi((j-n)l, B_l) \cap B_l) = \emptyset \quad \text{für} \quad 0 \leq n < j.$$

Daraus folgt, dass die Mengen $\Phi((jl), B_l), j \in \mathbb{N}$ paarweise disjunkt sind. Das erzeugt mit der Sigma-Additivität einen Widerspruch den es gilt auch, da der Fluss maßerhaltend ist :

$$\lambda(\Phi((jl), B_l)) = \lambda(B_l) \quad \forall \quad j \in \mathbb{N}$$

Nimmt man nun an, dass $\lambda(B_l) = \eta > 0$ wäre, dann würde folgen

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda(\Phi((jl), B_l))) = \sum_{j=1}^{\infty} \eta = \infty$$

ein Widerspruch zur Tatsache, dass $\lambda(M) < \infty$.

2.3 Bemerkungen

Offensichtlich gilt der Satz auch dann, wenn wir voraussetzen: $M \subset X$ ist invariant für den von f erzeugten Fluss und mit messbar endlichem Lebesgue-Maß $\lambda(M) < \infty$ und für jedes $x \in M$ gilt $t^{-}(x) = -\infty$ und $t^{+}(x) = \infty$,da wir die Kompaktheit von M im Beweis des Poincareschen Wiederkehrsatzes nur dazu verwendet haben, sagen zu können, dass das Maß von M endlich ist und der Fluss auf M global ist.

3 Poisson-Stabilität

Definition:

Poisson-Stabilität Ein Punkt $x \in M$ heißt Poisson-stabil, falls $t^+(x) = \infty$ und es zu jeder Umgebung U von x und zu jedem $T > 0$ ein $t > T$ gibt, sodass $\Phi(t, x) \in U$.Ein Punkt ist also genau dann stabil, wenn er in seiner eigenen Limesmenge liegt.

Korollar:

Unter den Voraussetzungen des Poincareschen Wiederkehrsatzes ist fast jedes $x \in M$ poisson-stabil.

Beweis:
Zu jedem $k \in \mathbb{N}$ kann man offensichtlich endlich viele Kugeln $\mathbb{B}(x_j, 1/k)$ mit $x_j \in M$ für $0 \leq j \leq n_k$ wählen, die M überdecken (Man überdecke M erst, indem man zu jedem Punkt eine Kugel wählt und bekommt dann mit Hilfe der Kompaktheit eine eindliche Teilüberdeckung).
Nun wenden wir den Poincareschen Wiederkehrsatz auf jede der abzählbar vielen meßbaren Mengen $\mathbb{B}(x_j, 1/k) \cap M$,$0 \leq j \leq n_k, k = 0, 1, 2, ...$ an. Dann gibt es zu jeder dieser Kugeln eine Nullmenge, in die die Trajektorien nicht unendlich oft zurückkehren. Die abzählbare Vereinigung dieser Nullmengen ist wiederum eine Nullmenge, es gilt also auf $M \backslash N$, dass die Trajektorien, die von einem Punkt x ausgehen, unendlich oft in die Kugel,in der x liegt zurückkehren. Für jedes $x \in M \backslash N$ und jedes $k \in \mathbb{N}$ gibt es also ein $j(x)$ mit $x \in \mathbb{B}(x_{j(x)}, 1/k) =: B_k$. Da x unendlich oft nach B_k zurückkehrt, können wir eine Teilfolge $(n_k) \subset \mathbb{N}$ wählen, sodass $\Phi(n_k, x) \in B_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$.
Für eine beliebige Umgebung U von x können wir nun zunächst ein $\delta > 0$ finden, sodass $\mathbb{B}(x, \delta) \subset U$. Also gilt mit der Dreiecksungleichung $B_k \subset \mathbb{B}(x_{j(x)}, 1/k) \subset U$, falls $2/k < \delta$ gilt. Folglich liegen alle bis auf endlich viele Elemente der Folge $\Phi(n_k, x)$ in jeder Umgebung von x, insbesondere können wir also für jedes T ein $n_k > T$ finden, sodass $\Phi(n_k, x) \in U$. Damit ist x nach Definition Poisson-stabil.

4 Literaturverzeichnis

[1] Amann, Gewöhnliche Differentialgleichungen

[2] Professor Martin Schmidt, Skripte Dynamische Systeme vom FSS 2016 und HWS 2009