Ljapunovfunktionen
Seminar „Dynamische Systeme“
bei Professor Schmidt

Marvin Borsch
Universität Mannheim

29.09.2016

Inhaltsverzeichnis

1 Ljapunovfunktion und deren Eigenschaften

Es sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : \mathbb{R}_+ \times G \to \mathbb{R}^n$ stetig. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \qquad t \geq t_0 \tag{1}$$

wobei $t_0 \geq 0$ und $x_0 \in G$ ist. Ist $x(t)$ eine nichtfortsetzbare Lösung, so sei ihr Existenzintervall mit $J(x)$ bezeichnet, sowie $J_+(x) = J(x) \cap [t_0, \infty]$.

Definition 1.1. *(Ljapunovfunktion) Sei $V : \mathbb{R}_+ \times G \to \mathbb{R}$ stetig. V heißt **Ljapunovfunktion** für* (1)*, falls die Funktion*

$$\varphi(t) = V(t, x(t)), \qquad t \in J_+(x) \tag{2}$$

fallend ist, für jede Lösung $x(t)$ von (1)*.*

Sei L aus C^1, dann gilt nach der Kettenregel:

$$\begin{aligned} \dot{L}(t, x(t)) &= \partial_t L(t, x(t)) + \langle \nabla_x L(t, x(t)), \dot{x}(t) \rangle \\ &= \partial_t L(t, x(t)) + \langle \nabla_x L(t, x(t)), f(t, x(t)) \rangle \end{aligned}$$

Wir nennen $\dot{L}$ die **orbitale Ableitung** von L. Ist $L \in C^1$, dann folgt:

$$\text{L ist Ljapunovfunktion für (1)} \Leftrightarrow \dot{L}(t,x) \leq 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R}_+, x \in G$$

Da die Ljapunovfunktion allerdings nur als stetig vorausgesetzt wurde, definieren wir uns die **orbitale Ableitung** allgemeiner als:

$$\dot{L}(t, x(t)) = \limsup_{h \to 0^+} \frac{1}{h}(L(t+h, x(t)+hf(t, x(t))) - L(t, x(t))) \qquad t > 0, x \in G$$

Hier gilt allerdings nicht, dass $\dot{L}(t,x) \leq 0$ ist äquivalent zu L ist eine Ljapunovfunktion. Besser sieht es aus, wenn L lokal Lipschitz in x ist. Denn dann kann Lemma 1.2 benutzt werden.

Lemma 1.2. *Sei $L : \mathbb{R}_+ \times G \to \mathbb{R}$ stetig und lokal Lipschitz in x. Dann sind äquivalent:*

i) L ist eine Ljapunovfunktion

ii) Es gilt $\dot{L}(t,x) \leq 0 \qquad \forall t \geq 0, x \in G$

Um dieses Lemma zu beweisen, benötigen wir noch folgendes Hilfslemma.

Hilfslemma 1.3. *Sei $\omega : [a,b) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, $\varphi : [a,b) \to \mathbb{R}$ stetig und es gelte:*

$$\begin{cases} D_+\varphi(t) := \liminf\limits_{h\to 0^+} \dfrac{\varphi(t+h)-\varphi(t)}{h} \leq \omega(t,\varphi(t)) \qquad \forall t \in [a,b) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \varphi(a) \leq \rho_0 \end{cases}$$

Sei $\rho^*(t)$ die Maximallösung von $\dot{\rho} = \omega(t,\rho), \rho(a) = \rho_0$. Dann gilt $\varphi(t) \leq \rho^*(t)$ für alle $t \in [a,b)$ mit $\rho^*(t) < \infty$. [1]

Beweis. (Lemma 1.2) Sei erst einmal $\varphi(t) = L(t,x(t))$. Wir zeigen die Äquivalenz indem wir zeigen, dass folgende Gleichung gilt

$$D^+\varphi(t) := \limsup_{h\to 0^+} \frac{\varphi(t+h)-\varphi(t)}{h} = \dot{L}(t,x(t)) \qquad t \in J_+(x) \qquad (\star)$$

Wir wollen zuerst zeigen, dass die Äquivalenz aus der Gleichheit folgt.
i) $\Rightarrow$ *ii)* Da L nach Definition monoton fallend ist gilt

$$0 \geq D^+\varphi(t) = \limsup_{h\to 0^+} \frac{\varphi(t+h)-\varphi(t)}{h} \overset{(\star)}{=} \dot{L}(t,x(t))$$

ii) $\Rightarrow$ *i)* z.z. $s \geq s' \Rightarrow \varphi(s) \leq \varphi(s')$ mit $s, s' \in J_+(x)$

$$\begin{aligned} 0 \geq \dot{L}(t,x(t)) \overset{(\star)}{=} D^+\varphi(t) &= \limsup_{h\to 0^+} \frac{\varphi(t+h)-\varphi(t)}{h} \\ &\geq \liminf_{h\to 0^+} \frac{\varphi(t+h)-\varphi(t)}{h} = D_+\varphi(t) \end{aligned}$$

Sei nun $\omega(t,\varphi(t)) = 0$ dann können wir unser Hilfslemma anwenden mit

$$\begin{cases} D_+\varphi(t) \leq 0 \qquad \forall t \in [s',\infty) \\ \varphi(s') = \rho_0 \end{cases}$$

Die Maximallösung von $\dot{\rho} = 0, \rho(s') = \rho_0$ ist $\rho^*(t) = \rho_0$. Aus dem Hilfslemma folgt nun, dass $\varphi(t) \leq \rho^*(t) = \rho_0 = \varphi(s')$ für alle $t \in [s',\infty)$ und insbesondere gilt für $s \geq s' \Rightarrow \varphi(s) \leq \varphi(s')$.
Wir müssen also nur noch zeigen, dass die Gleichheit von $D^+\varphi(t) = \dot{L}(t,x(t))$ gilt. Sei $x(t)$ eine Lösung von (1) und $t \in J_+(x)$ fix. Wähle
$U = [t, t+\delta) \times B_\delta(x(t)) \subset \mathbb{R}_+ \times G$, sodass

$$\|L(s,x) - L(s,y)\| \leq \mathcal{L}\|x-y\| \qquad \forall s \in [t,t+\delta) \quad x,y \in B_\delta(x(t)) \qquad (3)$$

[1] [1] Der Beweis kann in „Gewöhnliche Differentialgleichungen und dynamische Systeme“ von Jan W. Prüss/Mathias Wilke (Lemma 6.4.1) nachgelesen werden

Wähle $h_0 > 0$, sodass $h_0 < \delta$ und $x([t, t+h_0]) \subset B_\delta(x(t))$, sowie $h_0\|f(t, x(t))\| < \delta$ erfüllt sind. Nun gilt für $h \leq h_0$:

$$\begin{aligned}\varphi(t+h) - \varphi(t) &= L(t+h, x(t+h)) - L(t, x(t)) \\ &= L(t+h, x(t) + hf(t, x(t))) - L(t, x(t)) + R(h)\end{aligned}$$

mit

$$R(h) = L(t+h, x(t+h)) - L(t+h, x(t) + hf(t, x(t)))$$

Wir wollen nun zeigen, dass $\lim_{h \to 0^+} R(h) = 0$, da dann gerade gilt, dass

$$\varphi(t+h) - \varphi(t) = L(t+h, x(t) + hf(t, x(t))) - L(t, x(t))$$

bzw.

$$\begin{aligned}D^+\varphi(t) &= \limsup_{h \to 0^+} \frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{h} \\ &= \limsup_{h \to 0^+} \frac{1}{h}(L(t+h, x(t) + hf(t, x(t))) - L(t, x(t))) = \dot{L}(t, x(t))\end{aligned}$$

Um zu zeigen, dass $R(h) = 0$ für $h \to 0$, benutzen wir die Lipschitzstetigkeit wie in (3).

$$\begin{aligned}\|R(h)\| &= \|L(t+h, x(t+h)) - L(t+h, x(t) + hf(t, x(t)))\| \\ &\leq \mathcal{L}\|x(t+h) - x(t) - hf(t, x(t))\| = o(h)\end{aligned}$$

□

Bemerkung 1.4. *Sei $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dann gilt*

$$f(h) = o(g(h))$$

falls

$$\lim_{h \to 0^+} \left| \frac{f(h)}{g(h)} \right| = 0$$

In unserem Fall ist $f(h) = R(h)$ und $g(h) = h$, sodass

$$\lim_{h \to 0^+} \left| \frac{x(t+h) - x(t)}{h} - \dot{x}(t) \right| = 0$$

2 Stabilitätsaussagen mit Ljapunovfunktionen

2.1 Ljapunovgleichung

Lemma 2.1. *Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, x^* ein Fixpunkt von $\dot{x} = Ax$. Dann sind äquivalent:*

i) *x^* ist asymptotisch stabil*

ii) *Die Ljapunovgleichung $A^TQ + QA = -I$ besitzt eine symmetrische positiv definite Lösung Q*

Beweis. „$\Rightarrow$“ Ist der Fixpunkt x^* von $\dot{x} = Ax$ asymptotisch stabil, so gibt es Konstanten $\omega > 0$ und $M \geq 1$, sodass $\|e^{At}\| \leq Me^{-\omega t}$ für $t \geq 0$.[2] Da e^{At} beschränkt ist, können wir Q definieren als

$$Q := \int_0^\infty e^{A^Tt}e^{At}dt$$

Q ist symmetrisch und es gilt mit $x \in V$, V ein Vektorraum:

$$\begin{aligned}\langle Qx, x\rangle = x^TQx &= \int_0^\infty x^Te^{A^Tt}e^{At}x\,dt = \int_0^\infty (e^{At}x)^Te^{At}x\,dt \\ &= \int_0^\infty \|e^{At}x\|_2^2\,dt > 0 \qquad \forall x \neq 0\end{aligned}$$

Q ist also positiv definit und wir können uns mit $\|\,x\|_Q := \sqrt{\langle Qx, x\rangle}$ eine Norm auf den $\mathbb{R}^n$ definieren. Weiterhin gilt

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{d}{dt}(e^{A^Tt}e^{At})\,dt &= \int_0^\infty A^Te^{A^Tt}e^{At} + e^{A^Tt}e^{At}A\,dt \\ &= A^T\int_0^\infty e^{A^Tt}e^{At}\,dt + \int_0^\infty e^{A^Tt}e^{At}\,dt\,A = A^TQ + QA\end{aligned}$$

Außerdem gilt

$$\int_0^\infty \frac{d}{dt}(e^{A^Tt}e^{At})\,dt = \left[e^{A^Tt}e^{At}\right]_0^\infty = 0 - I = -I$$

Für die vorletzte Gleichung benötigen wir $\|e^{At}\| \leq Me^{-\omega t}$.
Insgesamt erhalten wir also

$$A^TQ + QA = \int_0^\infty \frac{d}{dt}(e^{A^Tt}e^{At})\,dt = -I$$

[2] [2] Satz 2.7 aus dem Skript „Dynamische Systeme“ von Professor Schmidt

$\Rightarrow$ Q ist symmetrische positiv definite Lösung von $A^TQ + QA = -I$

„$\Leftarrow$" Sei Q eine symmetrische positiv definite Lösung von $A^TQ + QA = -I$, dann folgt aus der Normenäquivalenz im $\mathbb{R}^n$, dass es Konstanten $c_1, c_2 > 0$ gibt, mit

$$c_1\| x\|_2^2 \leq \langle Qx, x\rangle \leq c_2\| x\|_2^2 \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

Ist $x(t)$ eine Lösung von $\dot{x} = Ax$ mit Anfangswert x_0, dann gilt

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\langle Qx(t), x(t)\rangle &= \langle Q\dot{x}(t), x(t)\rangle + \langle Qx(t), \dot{x}(t)\rangle = \dot{x}(t)^T Qx(t) + x(t)^T Q\dot{x}(t) \\
&= x(t)^T(QA + A^TQ)^T x(t) = ((QA + A^TQ)x(t))^T x(t) \\
&= \langle (A^TQ + QA)x(t), x(t)\rangle = -\| x(t)\|_2^2 \\
&\leq -c_2^{-1}\langle Qx(t), x(t)\rangle < 0 \qquad t > 0
\end{aligned}$$

In der zweiten Zeile benutzen wir $\dot{x} = Ax$.
$\Rightarrow$ $L := \langle Qx, x\rangle$ ist eine strikte Ljapunovfunktion für $\dot{x} = Ax$. Weiterhin gilt

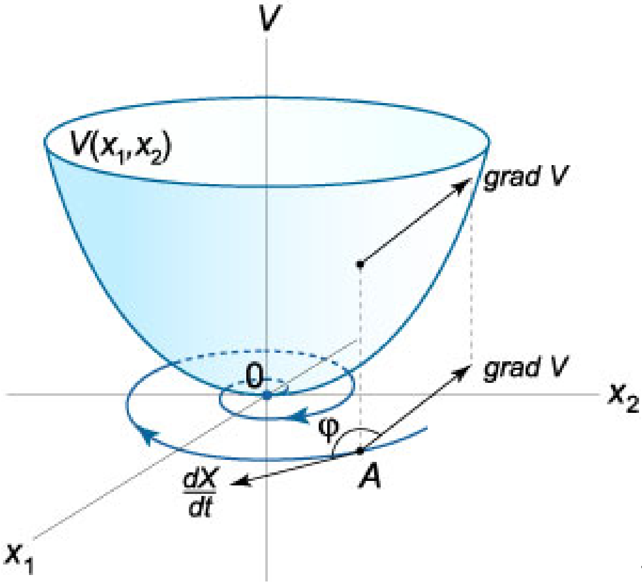
$$\| x(t)\|_2^2 \leq \frac{1}{c_1}\langle Qx(t), x(t)\rangle \overset{(\star\star)}{\leq} \frac{1}{c_1}\, e^{-\frac{t}{c_2}}\langle Qx_0, x_0\rangle \leq \frac{c_2}{c_1}\, e^{-\frac{t}{c_2}}\| x_0\|_2^2$$

□

Bemerkung 2.2. *zu (⋆⋆)*

$$\begin{aligned}
& & \frac{d}{dt}\langle Qx(t), x(t)\rangle &\leq -c_2^{-1}\langle Qx(t), x(t)\rangle \\
&\Leftrightarrow & \int_0^t \frac{\frac{d}{dt}\langle Qx(t), x(t)\rangle}{\langle Qx(t), x(t)\rangle}\, dt &\leq -\int_0^t c_2^{-1}\, dt \\
&\Leftrightarrow & \ln(\langle Qx(t), x(t)\rangle) - \ln(\langle Qx_0, x_0\rangle) &\leq -c_2^{-1}t \\
&\Leftrightarrow & \langle Qx(t), x(t)\rangle &\leq e^{-\frac{t}{c_2}}\langle Qx_0, x_0\rangle
\end{aligned}$$

Um Ljapunovfunktionen noch ein wenig zu veranschaulichen, wollen wir hier noch eine Grafik einer Ljapunovgleichung einbauen.



[3]

Wir haben hier eine Ljapunovfunktion einer asymptotisch stabilen Differentialgleichung. Wie man sieht, laufen die Trajektorien entlang einer fallenden Ljapunovfunktion V zum Fixpunkt.

2.2 Direkte Methode von Ljapunov

Wir betrachten nun das autonome System

$$\dot{x} = f(x) \tag{4}$$

mit f stetig in der offenen Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^n, x^* \in D$ und $f(x^*) = 0$. Unsere Ljapunovfunktion L ist im folgenden stetig differenzierbar und es gilt $L(t, x^*) = 0, L(t, x(t)) > 0$ für $x(t) \neq x^*$

Theorem 2.3. *Sei $D \in \mathbb{R}^n, x^* \in D$ ein Fixpunkt, $f \in C(D)$ mit $f(x^*) = 0$ und es existiere eine Ljapunovfunktion L von f, dann gilt*

a) $\dot{L} \leq 0$ *in* $D \Rightarrow$ *der Fixpunkt* x^* *ist stabil*

b) $\dot{L} < 0$ *in* $D \setminus \{x^*\} \Rightarrow$ *der Fixpunkt* x^* *ist asymptotisch stabil*

Beweis. a) Sei $\epsilon > 0$ hinreichend klein, sodass $\overline{B}_\epsilon(x^*) \subset D$. Wähle nun ein $\gamma > 0$, sodass $L(t, x) \geq \gamma$ für $\| x - x^* \| = \epsilon$ (also auf dem Rand des Epsilonballes um x^* liegt), danach wähle ein δ mit $0 < \delta < \epsilon$, sodass $L(t, x) < \gamma$ für $\| x - x^* \| < \delta$. Wenn $x(t)$ eine Lösung von (4) ist mit

[3]aus http://www.math24.net/method-of-lyapunov-functions.html

$\| x(0) - x^* \| < \delta$ und da $\dot{L}(t, x(t)) \leq 0$, gilt $L(t, x(t)) \leq L(0, x(t)) < \gamma$. Da $L(t, x)$ nur Werte $\geq \gamma$ auf $\| x - x^* \| = \epsilon$ (auf dem Rand des Epsilonballes) annimmt und $x(t)$ stetig ist und somit auch $\|x(t) - x^*\|$ stetig ist, kann $x(t)$ den Epsilonball nicht verlassen. Angenommen es existiere ein t_2 mit $\|x(t_2) - x^*\| > \epsilon$. Nach dem Zwischenwertsatz gäbe es ein $t_1 < t_2$ mit $\|x(t_1) - x^*\| = \epsilon$ und somit würde gelten, dass $L(t_1, x(t)) \geq \gamma$, was zu einem Widerspruch führen würde. Es folgt also $\| x(t) - x^* \| \leq \epsilon$ für $t > 0$. x^* ist also stabil.
b) Ist $x(t)$ eine Lösung wie in a) und $\varphi(t) = L(t, x(t))$, dann ist $\lim\limits_{t \to \infty} \varphi(t) = \beta < \gamma$. Wir zeigen, dass $\beta = 0$. Nehmen wir also erst einmal an $\beta \neq 0$ und führen dies zu einem Widerspruch. Sei dazu $M := \{x \in \overline{B}_\epsilon : \beta \leq L(t, x) < \gamma\}$ eine kompakte Untermenge von $\overline{B}_\epsilon \setminus \{0\}$ und $max\{\dot{L}(t, x) : x \in M\} = -\alpha < 0$. Da die Lösung $x(t)$ in M bleibt, aber $\dot{\varphi}(t) \leq -\alpha$ führt dies zu einem Widerspruch und es folgt $\lim\limits_{t \to \infty} \varphi(t) = 0$. Weiterhin gilt also $x(t) \to x^*(t \to \infty)$, da es für $0 < \epsilon' < \epsilon$ ein positives Minimum δ auf $\| x - x^* \| \leq \epsilon$. Daher ist $\| x(t) - x^* \| < \epsilon'$, sobald $\varphi(t) < \delta$ ab hinreichend großem t. □

3 Literaturverzeichnis

[1] Jan W. Prüss/Mathias Wilke, Gewöhnliche Differentialgleichungen und dynamische Systeme

[2] Professor Martin Schmidt, Skript „Dynamische Systeme“

[3] Wolfgang Walter, Ordinary Differential Equations