Martin Schmidt
Tobias Simon

Dynamische Systeme

7. Übung

7. April 2016

18. Lineare Unabhängigkeit von Lösungen linearer Differentialgleichungen
Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $y_1, \ldots, y_m : I \to \mathbb{R}^n$ seien linear unabhängige Lösungen der homogenen linearen gewöhnlichen Differentialgleichung $y' = A \cdot y$. Zeigen Sie, dass dann für alle $x_0 \in I$ die Vektoren $y_1(x_0), \ldots, y_m(x_0) \in \mathbb{R}^n$ ebenfalls linear unabhängig sind. *(5 Punkte)*

19. Lineare Differentialgleichungen
Finden Sie die Lösung $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des inhomogenen linearen Anfangswertproblems

$$\dot{u}(t) = t \cdot u(t) + t, \quad u(1) = 1 \,.$$

(5 Punkte)

20. Die Exponentialabbildung für Matrizen

Gegenstand dieser Aufgabe ist die *Exponentialabbildung* (für Matrizen), das heißt die Potenzreihe

$$e^A := \exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{1}{k!}\, A^k \quad \text{für Matrizen } A \in \mathbb{C}^{n\times n},$$

die wir etwa bei der Lösung von linearen Differentialgleichungssystemen mit konstanten Koeffizienten benötigen werden.

(a) Funktionalgleichung der $\exp$**-Funktion**
Für zwei Matrizen $A,B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ gilt im Allgemeinen nicht $\exp(A+B) = \exp(A)\cdot\exp(B)$. Dies gilt nur, wenn die beiden Matrizen kommutieren, d.h. $[A,B] := AB - BA = 0$.

(i) Zeigen Sie: Falls $[A,B] = 0$ gilt, so gilt die binomische Formel

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$$

(5 Punkte)

(ii) Begründen Sie kurz, an welcher Stelle bei der binomischen Formel ein Problem entsteht, wenn die Matrizen nicht kommutieren. *(1 Punkt)*

(iii) Zeigen Sie mit Teil (i) für kommutierende Matrizen die Formel

$$\exp(A+B) = \exp(A)\cdot\exp(B).$$

[Tipp: Absolute Konvergenz.] *(3 Punkte)*

Bitte wenden.

(b) Wie man $\exp(A)$ ausrechnet

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Zeigen Sie:

(i) *Basiswechsel.* Ist $C \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$, so gilt $\exp(CAC^{-1}) = C \cdot \exp(A) \cdot C^{-1}$. *(2 Punkte)*

(ii) *Diagonalmatrizen.* Ist $A = \mathrm{diag}(c_1,\dots,c_n)$ mit $c_1,\dots,c_n \in \mathbb{C}$ eine Diagonalmatrix, so gilt $\exp(A) = \mathrm{diag}(e^{c_1},\dots,e^{c_n})$. *(2 Punkte)*

(iii) *Nilpotente Matrizen.* Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

eine nilpotente Matrix in Normalform. Man berechne $\exp(t\cdot A)$ für $t \in \mathbb{R}$. *(3 Punkte)*

(iv) *Jordan-Blöcke.* Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ und

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

ein Jordan-Block zum Eigenwert λ. Berechnen Sie $\exp(t\cdot A)$ für $t \in \mathbb{R}$.
[Tipp: (a) in Verbindung mit (b)(ii),(iii).] *(3 Punkte)*

Hinweis: Die Termine der mündlichen Prüfungen sind: 8. Juni, 10. Juni, 18. Juli und 1. September 2016. Sie können sich ab sofort bei Frau Braak (Zimmer B129, braak@uni-mannheim.de) in eine entsprechende Liste eintragen.

Abgabe bis spätestens Freitag, den 15. April 2016, 11:00h, im Briefkasten Nr. 46234