

12. Übung

34. Das Mathematische Pendel.

Gegeben sei die Schwingungsgleichung des *Mathematischen Pendels mit Reibung*

$$\ddot{x} + \dot{x} + g \cdot \sin(x) = 0 \quad (1)$$

mit $g > 1$ und gesuchter Funktion $t \mapsto x(t) \in \mathbb{R}$. (Bemerkung am Rande: die physikalische Bedeutung der Konstanten g ist die Fallbeschleunigung.)

(a) Transformieren Sie das System (1) auf ein System 1. Ordnung der Form

$$\dot{y} = f(y) \quad (2)$$

mit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass zu jedem Anfangswert $y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^2$ eine (globale) Lösung $t \mapsto y(t)$ von (2) auf dem Intervall $[0, \infty)$ existiert. (3 Punkte)

(b) Bestimmen Sie alle Ruhelagen von (2) und untersuchen Sie diese auf Stabilität (stabil, instabil, asymptotisch stabil). (6 Punkte)

35. Stabilitätsuntersuchungen.

Gegeben sei das autonome System

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax + x^2 + y^2, \\ \dot{y} &= bx - y + xy.\end{aligned}$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq 0$ und gesuchter Funktion $t \mapsto (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$.

(a) Zeigen Sie, dass im Fall $a < 0$ der Nullpunkt eine asymptotisch stabile Ruhelage ist. (3 Punkte)

(b) Man beweise oder widerlege, dass die Behauptung in (a) auch im Fall $a = 0$ gilt. (3 Punkte)

36. Die Lorenz-Gleichungen.

Seien σ, r und b positive Konstanten. Die *Lorenz-Gleichungen* lauten

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x), \\ \dot{y} &= rx - y - xz, \\ \dot{z} &= xy - bz.\end{aligned}$$

mit gesuchter Funktion $t \mapsto (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie:

Für $0 < r < 1$ ist der Nullpunkt obigen Systems eine asymptotisch stabile Ruhelage und

für $r > 1$ ist der Nullpunkt eine instabile Ruhelage. (8 Punkte)

Bitte wenden.

37. Nichtlineare dynamische Systeme.

- (a) Bestimmen Sie den Fluss zu dem nichtlinearen System

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x \\ \dot{y} &= y + x^2\end{aligned}$$

mit gesuchter Funktion $t \mapsto (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$, indem Sie dieses Differentialgleichungssystem lösen. (4 Punkte)

- (b) Definiere nun die Abbildung

$$\begin{aligned}h : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto \left(x, y + \frac{x^2}{3}\right).\end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass diese Abbildung h eine topologische Flussäquivalenz zwischen dem nichtlinearen System aus (a) und dem linearen \mathbb{R}^2 -wertigen System $\dot{z} = Az$ liefert. Hierbei ist die Matrix A definiert durch $A := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. (4 Punkte)

Abgabe bis spätestens Freitag, den 20. Mai 2016, 11:00h, im Briefkasten Nr. 46234