

## 6. Übung

### 15. Diverse Differentialgleichungen.

Finden Sie die (allgemeinen bzw. ggf. eindeutigen) Lösungen der folgenden Differentialgleichungen bzw. Anfangswertprobleme:

(a)  $y'(x) = (x + y(x))^2$  (5 Punkte)

(b)  $y'(x) = \frac{y(x)}{x} - \frac{x^2}{y(x)^2}$  mit  $y(1) = 1$  (5 Punkte)

### 16. Exakte Differentialgleichungen.

(a) Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung

$$3x^2 + 4y(x) + 4(x - 2y(x)) \cdot y'(x) = 0$$

exakt ist und bestimmen Sie eine Lösung  $y$  der Differentialgleichung zum Anfangswert  $y(2) = 3$ . Ist diese Lösung eindeutig auf einer Umgebung von  $x_0 := 2$ ? (6+1 Punkte)

(b) Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung

$$(x^2 e^{y(x)} + 1) \cdot y'(x) + 2x e^{y(x)} - 1 = 0$$

exakt ist und finden Sie eine Stammfunktion. Die Lösungsfunktion  $x \mapsto y(x)$  mit  $y(1) = 0$  ist nicht explizit angebar. Bestimmen Sie jedoch ihre Umkehrfunktion  $y \mapsto x(y)$ .

(6 Punkte)

### 17. Eulersche Multiplikatoren.

(a) Es seien  $g, h : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbare Funktionen in den Variablen  $t$  und  $u$ . Zeigen Sie: Hängt  $\alpha := (\frac{\partial g}{\partial u} - \frac{\partial h}{\partial t})/h$  allein von  $t$  ab (nicht aber von  $u$ ), so ist  $M(t) := \exp(\int_{t_0}^t \alpha(s) ds)$  (mit geeignetem  $t_0 \in \mathbb{R}$ ) ein Eulerscher Multiplikator für die Differentialgleichung

$$\dot{u}(t) \cdot h(t, u(t)) + g(t, u(t)) = 0. \quad (3 \text{ Punkte})$$

[Es darf ignoriert werden, dass  $\alpha$  an eventuellen Nullstellen von  $h$  nicht definiert ist.]

(b) Finden Sie für die Differentialgleichung

$$\dot{u}(t) \cdot 2t u(t) + 4t^2 + 2u^2(t) + 3t = 0$$

einen Eulerschen Multiplikator sowie eine Funktion  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , die die Lösungen  $u(t)$  der Differentialgleichung implizit durch  $F(t, u(t)) \equiv \text{const.}$  charakterisiert. (5 Punkte)

*Bitte wenden.*

**Hinweis:** Dies ist das letzte zur Prüfungszulassung relevante Übungsblatt für diejenigen Studenten, die die Vorlesung nur zur Hälfte hören. Der entsprechende Prüfungsstoff ist das Kapitel 1 der Vorlesung. Das ist der Vorlesungsstoff bis einschließlich zum 14. April 2016 (d.h. insbesondere, dass mit den Übungsblättern 1-6 der prüfungsrelevante Stoff noch nicht abgedeckt ist!). Den betreffenden Studenten, die noch Punkte zur Zulassung brauchen, bieten wir jedoch an, das kommende 7. Blatt auch noch zu bearbeiten. Die dort erzielten Punkte werden dann als Zusatzpunkte angerechnet. [Für alle anderen Studenten, die die Vorlesung ohnehin ganz hören, gelten die Punkte des 7. Blattes freilich als reguläre Punkte. Eine entsprechende Zusatzpunkteregelung wird es dann auf dem letzten Übungsblatt des Semesters geben.]

**Abgabe bis spätestens Freitag, den 8. April 2016, 11:00h, im Briefkasten Nr. 46234**

*Frohe Ostern!*