Martin Schmidt
Tobias Simon

Dynamische Systeme

15. Februar 2016

1. Übung

1. Zeitdiskrete dynamische Systeme

Ein *zeitdiskretes dynamisches System* ist eine stetige Abbildung

$$\Phi : \mathbb{N}_0 \times M \to M,$$

wobei M ein topologischer Raum ist (hier typischerweise der $\mathbb{R}^n$), und für deren Familie von Abbildungen

$$\Phi_t : M \to M,\ \Phi_t(m) := \Phi(t, m) \ \ (t \in \mathbb{N}_0)$$

gilt, dass

$$\Phi_0 = \mathbb{1} \text{ und } \Phi_{t_2} \circ \Phi_{t_1} = \Phi_{t_1+t_2} \ \ (t_1, t_2 \in \mathbb{N}_0).$$

(a) Sei $G : M \to M$ eine stetige Abbildung. Zeigen Sie, dass die induktiv definierte Abbildung $\Phi : \mathbb{N}_0 \times M \to M$

$$\Phi(0, m) := m,\ \Phi(1, m) := G(m) \text{ und } \Phi(n + 1, m) := G(\Phi(n, m))$$

für $n \in \mathbb{N}_0, m \in M$ ein zeitdiskretes dynamisches System definiert. *(3 Punkte)*

(b) Sei $l \in \mathbb{N}$ und $f : \mathbb{R}^{l+1} \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine rekursiv definierte Folge, für die gilt:

$$a_0, \dots, a_l \text{ sind vorgegeben und } a_{n+1} := f(a_n, \dots, a_{n-l}) \text{ für } n \geq l.$$

Zeigen Sie unter Verwendung von (a), dass sich obige Rekursion als ein zeitdiskretes dynamisches System darstellen lässt.
(Tipp: Man konstruiere eine stetige Abbildung $G : \mathbb{R}^{l+1} \to \mathbb{R}^{l+1}$.) *(3 Punkte)*

(c) Gegeben sei die Fibonacci-Folge, definiert durch

$$a_0 := 0,\ a_1 := 1 \text{ und } a_{n+1} := a_n + a_{n-1},\ n \geq 1.$$

Bestimmen Sie das zugehörige zeitdiskrete dynamische System und geben Sie eine *explizite* Formel für den Zustand des Systems zum Zeitpunkt $n \in \mathbb{N}$ an, indem Sie Aufgabenteil (b) verwenden und die hier auftretende lineare Abbildung $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ diagonalisieren.

(7 Punkte)

Bitte wenden.

2. Lösungen von Differentialgleichungen.

(a) Seien $t_0, m, g, A, B \in \mathbb{R}$ mit $m > 0$. Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung $m\,u'' = -gm$ genau eine Lösung u mit $u(t_0) = A$ und $u'(t_0) = B$ besitzt *(3 Punkte)*

(b) Zeigen Sie: Für $\alpha, A, B \in \mathbb{R}$ beliebig ist $y(t) := A\,\cos(\alpha t) + B\,\sin(\alpha t)$ eine Lösung der Differentialgleichung $y'' + \alpha^2 y = 0$. *(2 Punkte)*

(c) Finden Sie eine Differentialgleichung, für die die Funktion $y(t) = A\,e^{2t} + B\,e^{t} + C$ für alle $A, B, C \in \mathbb{R}$ eine Lösung ist. *(5 Punkte)*

[Tipp: Man überlege zunächst, welche Ordnung die Differentialgleichung haben sollte. Dann berechne man $y', y'', \ldots$ und überlege, wie man die Parameter A, B, C los wird.]

(d) Sei $f(t, u, u') := 2t - 3 + 3u' - 2u$. Zeigen Sie, dass $u(t) = A\,e^{t} + B\,e^{2t} + t$ mit $A, B \in \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung $u'' = f(t, u, u')$ ist. Bestimmen Sie A und B, so dass $u(0) = u(1) = 0$ gilt. *(5 Punkte)*

Hinweise: Die Lösungen sind bis spätestens **Montag, den 22. Februar 2016, 10:00h, im Briefkasten Nr. 46234** (Eingang C-Teil, A5-Gebäude) abzugeben. Wir möchten Sie bitten, Ihre Lösungen partnerweise (d.h. **zwei Namen pro Blatt**) abzugeben. Abgaben mit drei oder mehr Namen pro Blatt sind bis auf Weiteres jedoch nicht zulässig. Die neuen Übungsblätter werden auf der Homepage des Lehrstuhls Mathe III (`http://analysis.math.uni-mannheim.de` → Lehre→ Dynamische Systeme) zur Verfügung gestellt. Hinreichend für die Zulassung zur Prüfung ist das Erreichen von mind. 50 % der Punkte in den Übungsblättern. Eine Vorbesprechung inklusive Einteilung der Übungsgruppen findet am **Mittwoch, 17.2.2016, 13:45 Uhr in A5, C012** statt. Die regulären Tutorien beginnen ab nächster Woche.

Für weitere Fragen zu den Übungen können Sie sich an Tobias Simon, Raum C105, wenden (Tel.: (0621) 181-2537, E-Mail: tsimon@mail.uni-mannheim.de).