Martin Schmidt
Tobias Simon

Dynamische Systeme

14. April 2016

8. Übung

21. Lineare Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten

Lösen Sie die folgenden linearen Anfangswertprobleme und vereinfachen Sie die Lösung so weit wie möglich.

(a) $\dot{u}(t) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot u(t)$ mit $u(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$. *(7 Punkte)*

(b) $\dot{u}(t) = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot u(t)$ mit $u(3) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. *(3 Punkte)*

(c) $\dot{u}(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot u(t)$ mit $u(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *(6 Punkte)*

[Tipp: Aufgabe 20b]

22. Lineare Systeme und Fundamentallösung

Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $t_0 \in I$ und $A : I \to \mathbb{C}^{2\times 2}$, sowie die Differentialgleichung

$$\dot{u}(t) = A(t) \cdot u(t) \tag{1}$$

gegeben. Weiter sei $F : I \to \mathbb{C}^{2\times 2}$ die zugehörige Fundamentallösung, d.h. die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{F}(t) = A(t) \cdot F(t), \quad F(t_0) = \mathbb{1}.$$

Zeigen Sie:

$$F(t) = (y_1(t), y_2(t)), \quad t \in I,$$

wobei y_1 bzw. y_2 (mit $y_1, y_2 : I \to \mathbb{C}^2$) die als Spaltenvektoren geschriebenen (eindeutigen) Lösungen von (1) mit Anfangswerten $y_1(t_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ bzw. $y_2(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind. *(2 Punkte)*

Bitte wenden.

23. Fundamentallösung von nicht-autonomen Systemen

Es sei $A : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^{2\times 2}$ definiert durch $A(t) := \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, sowie die (nicht-autonome) lineare Differentialgleichung

$$\dot{u}(t) = A(t) \cdot u(t) \tag{2}$$

gegeben.

(a) Bestimmen Sie die Fundamentallösung $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^{2\times 2}$ von (2) zum Anfangszeitpunkt $t_0 := 0$, d.h. die Lösung von

$$\dot{F}(t) = A(t) \cdot F(t), \quad F(0) = \mathbb{1}.$$

[Tipp: Zur Bestimmung von $F(t)$ betrachte man das zweidimensionale DGL-System (2) als System von zwei eindimensionalen Differentialgleichungen und löse diese separat nach den bekannten Methoden. Man beachte weiter Aufgabe 22.] *(7 Punkte)*

(b) Bestimmen Sie $\exp\left(\int_0^t A(s)\,ds\right)$ und folgern Sie mit Teil a) $F(t) \neq \exp\left(\int_0^t A(s)\,ds\right)$.
[Tipp: Aufgabe 20b]

(7 Punkte)

Bemerkung: Dies zeigt, dass $\exp\left(\int_0^t A(s)\,ds\right)$ *keine* Fundamentallösung zum DGL-System (2) ist und daher insbesondere $\frac{d}{dt}\exp\left(\int_0^t A(s)\,ds\right) \neq A(t) \cdot \exp\left(\int_0^t A(s)\,ds\right)$ gilt.

Wichtiger Hinweis: Da es einige Anfragen bzgl. der Prüfungsanmeldung gab, hier nochmals die wesentlichen Informationen: Im Modulkatalog ist die Vorlesung unter den Bezeichnungen "Dynamische Systeme" und "Dynamische Systeme und Stabilität" eingetragen. Die Unterscheidung ist wie folgt: Diejenigen Studenten, die die Vorlesung nur zur Hälfte hören (und 4 ECTS-Punkte bekommen), müssen sich bei "Dynamische Systeme" anmelden. Diejenigen, die die Vorlesung ganz hören (und entsprechend mehr, nämlich 8 ECTS-Punkte bekommen), müssen sich bei "Dynamische Systeme und Stabilität" anmelden. Studenten, die die Vorlesung ganz hören und sich im Portal bisher fälschlicherweise bei "Dynamische Systeme" eingetragen haben, mögen dies bitte umgehend ändern.

Abgabe bis spätestens Freitag, den 22. April 2016, 11:00h, im Briefkasten Nr. 46234