Kapitel 1

Gewöhnliche Differentialgleichungen

1.1 Einführung

Definition 1.1. *Ein dynamisches System ist eine Halbgruppe G zusammen mit einer stetigen Abbildung*

$$\Phi : G \times M \to M$$

auf einem metrischen Raum M die folgendes erfüllt:

(i) $\Phi(0, x) = x$ *für alle* $x \in M$

(ii) $\Phi(s, \Phi(t, x)) = \Phi(s + t, x)$ *für alle* $x \in M, s, t \in G$

Dabei ist G im zeitkontinuierlichen Fall entweder $G = \mathbb{R}$ oder $G = \mathbb{R}_0^+$ und im im zeitdiskreten Fall $G = \mathbb{Z}$ oder $G = \mathbb{N}_0$. M heißt Phasenraum.

Der Parameter aus G ist dabei typischerweise die Zeit. Im zeitdiskreten Fall betrachten wir nur den Verlauf zu einer Folge von Zeitpunkten, die voneinander durch gleichlange Zeitabstände getrennt sind. Die beiden Bedingungen (i) und (ii) bedeuten, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} G \to \; & \text{stetige Abbildungen von } M \text{ auf sich selber} \\ t \mapsto \Phi(t, \cdot) : \quad & M \to M, \quad x \mapsto \Phi(t, x). \end{aligned}$$

ein (Halb-)Gruppenhomomorphismus ist. Weil die Halbgruppe $\mathbb{N}_0$ und die Gruppe $\mathbb{Z}$ frei von 1 erzeugt werden, haben wir folgende einfach Charakterisierung von zeitdiskreten dynamischen Systemen.

Übungsaufgabe 1.2. *Ein dynamisches System* Φ *mit* $G = \mathbb{Z}$ *oder* $G = \mathbb{N}_0$ *erfüllt* $\Phi(n, x) = A^n(x)$ *für alle* $n \in \mathbb{N}_0$ *mit* $A : M \to M, \quad x \mapsto A(x) = \Phi(1, x)$*. Wenn* $G = \mathbb{Z}$*, dann ist* A *ein Homöomorphismus und es gilt* $\Phi(n, x) = A^n(x)$ *für alle* $n \in \mathbb{Z}$*. Umgekehrt definiert jede stetige Abbildung* $A : M \to M$ *ein dynamisches System mit* $G = \mathbb{N}_0$ *und jeder Homöomorphismus* $A : M \to M$ *ein dynamisches System mit* $G = \mathbb{Z}$*.*

Übungsaufgabe 1.3. *Sei* Φ *ein zeitkontinuierliches dynamisches System auf einem reellen Vektorraum* M *dessen Abbildung* Φ *partiell nach* t *differenzierbar ist. Dann ist für alle* $x \in M$ *die Bahn* $t \mapsto \Phi(t, x)$ *eine Lösung der Differentialgleichung*

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t, x) = F(\Phi(t, x)) \quad \mathit{mit} \quad F(x) = \frac{\partial}{\partial t}\Phi(0, x).$$

Wir werden später sehen, dass diese zeitkontinuierlichen dynamischen Systeme eindeutig durch eine gewöhnliche Differentialgleichung bestimmt sind und umgekehrt viele gewöhnliche Differentialgleichung ein zeitkontinuierliches System definieren. Deshalb steht die Theorie der zeitkontinuierlichen dynamischen Systeme in sehr enger Verbindung zur Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen.

Um einen gegebenen zeitlichen Verlauf zu einem dynamischen System zu machen, müssen wir zu allererst den Phasenraum richtig wählen. Von der richtigen Wahl des Phasenraumes hängt es nämlich oft ab, ob ein zeitlicher Verlauf überhaupt als dynamisches System beschrieben werden kann. Ein Beispiel, das die Entwicklung der Theorie der dynamischen Systeme ganz wesentlich angestoßen hat, sind die Newtonschen Gleichungen. In einem Kraftfeld F wird die Beschleunigung eines Punktteilchens beschrieben durch die Gleichung

$$\frac{d}{dt} m\dot{x} = m\ddot{x} = F$$

Hier ist m die Masse der Punkteteilchen und $t \mapsto x(t)$ die Funktion der Koordinaten in Abhängigkeit von der Zeit. Die zeitliche Ableitung bezeichnen wir durch einen Punkt. Wenn F von x und $\dot{x}$ und t abhängt, erhalten wir die gewöhnliche Differentialgleichung

$$m\ddot{x} = F(x, \dot{x}).$$

Die entsprechenden zeitlichen Verläufe der Koordinaten können nur dann durch ein dynamisches System beschrieben werden, wenn wir den Phasenraum so wählen, dass er neben den Koordinaten x auch die Geschwindigkeit des Punktteilchens enthält. Wenn die Kraft auch noch von der Zeit t abhängt, müssen wir sogar auch noch die Zeit zu den Freiheitsgraden des Phasenraums hinzufügen.

Ein anderes Beispiel für die Wichtigkeit der richtigen Wahl des Phasenraums sind Fibonaccis Kaninchen, oder allgemeinere Rekursionsformeln.

Fibonaccis Kaninchen 1.4. *Leonardo von Pisa hat schon 1202 ein Populationsmodell mit diskreter Zeit $n = 0, 1, 2, ...$ untersucht. Ein neugeborenes Kaninchenpaar wird in einen umzäunten Garten gesetzt. Jedes Kaninchenpaar erzeugt während seines Lebens jeden Monat ein weiteres Paar. Ein neugeborenes Paar wird nach einem Monat fruchtbar und bekommt somit nach zwei Monaten seine ersten Nachkommen. Es soll angenommen werden, dass die Kaninchen nie sterben. Bezeichnen wir mit k_n die Anzahl Kaninchenpaare nach n Monaten, dann ist $k_0 = k_1 = 1$ (das erste Paar) und $k_2 = 2$, da das erste Paar seine ersten Nachkommen nach zwei Monaten bekommt. Auch im dritten Monat bekommt nur das erste Paar neue Nachkommen, es ist also $k_3 = 3$. Im vierten Monat leben noch alle Kaninchen aus dem dritten Monat und die Paare, die nach zwei Monaten schon da waren, bekommen Nachwuchs. Es ist also $k_4 = k_3 + k_2$. Allgemein erhält man die Rekursionsgleichung*

$$k_{n+1} = k_n + k_{n-1} \quad \textit{für alle} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dabei steht der 1. Term k_n für die Anzahl der Kaninchen, die schon da sind, während der 2. Term k_{n-1} die Anzahl der im $(n+1)$-ten Monat neu geborenen Kaninchenpaare angibt. Um aus dieser Rekursionsformel ein zeitdiskretes dynamisches System zu machen, muss man den Phasenraum als die Menge aller Paare (k_n, k_{n-1}), das heißt man muß zu der Anzahl der Kaninchenpaare im jeweiligen Jahr die Anzahl im vorherigen Jahr hinzufügen. Das entsprechende dynamische System lässt sich dann einfach lösen.

Man kann dieses dynamische System mit einem generierenden Funktional lösen. Sei

$$K(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k_n}{n!} t^n.$$

Dann ist die Ableitung von $K(t)$ das generierende Funktional von

$$\dot{K}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k_n}{n!} n t^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k_{n+1}}{n!} t^n.$$

Also folgt aus der Rekursionsgleichung

$$\ddot{K}(t) = \dot{K}(t) + K(t) \quad \text{mit den Anfangswerten} \quad K(0) = 1 = \dot{K}(0).$$

Somit haben wir diese Rekursionsformal also in eine Differentialgleichung übersetzt und die Startswerte in ein sogenanntes Anfangswertproblem dieser Differentialgleichung. Weil in dieser Differentialgleichung Ableitungen bis zur zweiten Ordnung auftauchen, werden wir bei der Integration zweimal integrieren müssen und entsprechend zwei Integrationskonstanten auftauchen. Deshalb müssen wir zwei Anfangswerte vorgeben.

Ganz ähnlich wie bei den Newtonschen Gleichungen müssen wir zu der Folge k_n mit generierendem Funktional $K(t)$ die Folge k_{n+1} mit generierendem Funktional $\dot{K}(t)$ hinzufügen, um ein dynamisches System zu erhalten. Im nächsten Abschnitt lernen wir, solche Differentialgleichungen zu lösen. Wenn das entsprechende Anfangswertproblem gelöst ist, und die Lösung im Punkt $t = 0$ auch glatt ist, dann ergibt ihre Taylorreihe eine Lösung von Fibonaccis Kaninchen. Es stellt sich heraus, dass diese Lösung sogar auf ganz $t \in \mathbb{C}$ eine konvergente Potenzreihe definiert.

Diese Erweiterungen des Phasenraums im Fall der Newtonschen Gleichungen und im Fall von Fibonaccis Kaninchen sind miteinander verwandt. Ganz allgemein muss der Phasenraum groß genug gewählt werden um ein dynamisches System zu erhalten.

Man kann Fibonaccis Kanichen oder allgemeiner Rekursionsgleichungen auch mit einem anderen generierenden Funktional lösen. Wir stellen diese andere Methode hier vor, weil mit ihr auch andere Rekursionsgleichungen gelöst werden können. Sei diesmal

$$K(z) = \sum_{n=0}^{\infty} k_n z^n.$$

Dann können wir die Rekursionsformel direkt in folgende Gleichung umschreiben

$$\frac{K(z) - k_0 - k_1 z}{z} = \sum_{n=1}^{\infty} k_{n+1} z^n = \sum_{n=1}^{\infty} (k_n + k_{n-1}) z^n = K(z) - k_0 + zK(z).$$

Wenn wir diese Gleichung nach $K(z)$ auflösen erhalten wir

$$K(z) = \frac{k_0 + (k_1 - k_0)z}{1 - z - z^2}.$$

Mit den Anfangswerten $k_0 = 1 = k_1$ ergibt das

$$K(z) = \frac{1}{1 - z - z^2}.$$

Das ist offenbar eine gebrochen rationale Funktion, die auf dem Komplement der Nullstellen des Nenners analytisch ist und als konvergente Potenzreihe geschrieben werden kann. Durch Partialbruchzerlegung können wir diese Potenzreihe auch ausrechen und damit die Fibonaccis Folge lösen. Seien $z_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ und $z_2 = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ die beiden Lösungen von $z^2 + z - 1 = 0$. Dann gibt es zwei eindeutige reelle Zahlen α und β mit

$$\frac{1}{1 - z - z^2} = \frac{\alpha}{z - z_1} + \frac{\beta}{z - z_2}.$$

Durch Multiplikation mit dem Nenner erhalten wir

$$\alpha(z_2 - z_1) = -1 \quad \beta(z_1 - z_2) = -1.$$

Mithilfe der geometrischen Reihe ist die Potenzreihe $K(z)$ gegeben durch

$$K(z) = \frac{1}{(z_2 - z_1)z_1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{z_1}\right)^n + \frac{1}{(z_1 - z_2)z_2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{z_2}\right)^n.$$

Definition 1.5. *$x \in M$ heißt Fixpunkt oder Ruhelage eines dynamischen Systems $\Phi : G \times M \to M$, wenn $\Phi(g, x) = x \quad \forall g \in G$.*

Beispiel 1.6. *Der einzige Fixpunkt der Abbildung $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 2x$ ist $x = 0$.*

Definition 1.7. **(i)** *Für $x \in M$ heißt $\{\Phi(g, x) \mid g \in G\}$ Orbit oder Trajektorie (durch x), die Abbildung $\Phi(\cdot, x) : G \to M, \quad g \mapsto \Phi(g, x)$ heißt Bahnkurve (durch x).*

(ii) *Ein Orbit durch x heißt periodisch mit Periode $g \in G$, wenn $g > 0$ und $\Phi(g, x) = x$. Eine Periode heißt Minimalperiode, wenn $\Phi(\tilde{g}, x) \neq x$ für $0 < \tilde{g} < g$.*

Proposition 1.8. *Wenn G eine Gruppe ist, dann definiert die Zugehörigkeit zu einem Orbit eine Äquivalenzrelation auf dem Phasenraum.*

Beweis: Wir definieren also für $x_1, x_2 \in M$

$$x_1 \sim x_2, \text{ falls } x_2 \in \Phi(G, x_1).$$

Diese Relation ist eine Äquivalenzrelation, denn

(i) Wegen $\Phi_0 = \mathbb{1}$ ist immer $x \sim x$.

(ii) Gilt $x_2 = \Phi(t, x_1)$, dann folgt $x_1 = \Phi(-t, x_2)$ aus $\Phi(t_2, \cdot) \circ \Phi(t_1, \cdot) = \Phi(t_1 + t_2, \cdot)$ und $\Phi(0, \cdot) = \mathbb{1}_M$. Die Relation ist damit symmetrisch ($x_1 \sim x_2 \Rightarrow x_2 \sim x_1$).

(iii) Gilt $x_2 = \Phi(t_1, x_1)$ und $x_3 = \Phi(t_2, x_2)$, dann folgt $x_3 = \Phi(t_1 + t_2)(x_1)$. Die Relation ist damit transitiv ($x_1 \sim x_2, x_2 \sim x_3 \Rightarrow x_1 \sim x_3$). **q.e.d.**

Beispiel 1.9. *Sei $M = S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ und $\Phi : \mathbb{Z} \times M \to M$ gegeben durch die Drehung $\Phi(n, z) = e^{2\pi i \alpha n} \cdot z$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann ist jeder Orbit genau dann periodisch, wenn $\alpha \in \mathbb{Q}$, also $\alpha = \frac{q}{p}, q \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{N}$ teilerfremd. Die Minimalperiode ist dann p.*

Man ist nicht nur an einzelnen Orbits interessiert, sondern auch am Verhalten benachbarter Orbits. Z.B. ist es beruhigend, dass auch bei einer kleinen Veränderung der Geschwindigkeit der Erde, z.B. durch Meteroiteneinschlag, ihre neue Bahn auf Dauer in der Nähe der alten bleibt. Die Untersuchung der Stabilität von solchen Fixpunkten wird uns im zweiten Kapitel beschäftigen.

1.2 Gewöhnliche Differentialgleichungen

Wenn die Abbildung Φ eines zeitkontinuierlichen dynamischen Systems auf einem Vektorraum $M = V$ partiell nach t differenzierbar ist, dann können wir die Bedingung (ii) bei $s = 0$ nach s differenzieren und erhalten

$$\frac{\partial\Phi(t,x)}{\partial t} = F(\Phi(t,x)) \quad \text{mit} \qquad F : V \to V \qquad x \mapsto F(x) = \frac{\partial\Phi(0,x)}{\partial t}.$$

Also erfüllen alle Trajektorien durch den Anfangspunkt $x_0 \in M$ die gewöhnliche Differentialgleichung $\dot{q}(t) = F(q(t))$ mit dem Anfangswert $q(0) = q_0$. Differentialgleichungen sind Gleichungen, die Funktionen zu ihren Ableitungen in Beziehung setzen. Wenn diese Funktionen von mehreren Variablen abhängen, dann sind die Ableitungen, die in der entsprechenden Differentialgleichung mit der Funktion in Beziehung gebracht werden, partielle Ableitungen. Dann spricht man von partiellen Differentialgleichungen. Typischerweise sind Differentialgleichungen im folgenden Sinne *lokale* Gleichungen, dass sie nur die Werte einer gesuchten Funktion und endlich vieler Ableitungen für *einen* Wert der Variablen miteinender in Beziehung bringen. Mit gewöhnlichen Differentialgleichungen werden also im Allgemeinen Gleichungen von der folgenden Form bezeichnet

$$F(q^{(k)}(t), q^{(k-1)}(t), \ldots, \dot{q}(t), q(t), t) = 0.$$

Hierbei ist $t \mapsto q(t)$ die gesuchte Funktion, die auch vektorwertig sein kann.

Definition 1.10. *Differentialgleichungen von der Form*

$$F(q^{(k)}(t), q^{(k-1)}(t), \ldots, \dot{q}(t), q(t), t) = 0$$

heißen gewöhnliche Differentialgleichungen.

Historisch wurden solche Differentialgleichungen von Newton gleichzeitig mit der Entdeckung der Differentialrechnung eingeführt, um die Bewegung von massiven Teilchen im Gravitationsfeld zu beschreiben. Im einfachsten Fall eines Punktteilchens im Schwerefeld nehmen die Newton'schen Gleichungen folgende Form an:

$$m\ddot{q} = F(q, \dot{q}, t),$$

wobei $F(q, \dot{q}, t)$ die auf das Punktteilchen wirkende Kraft darstellt. Im einfachsten Fall $F = -mg$ taucht nur die zweite Ableitung der gesuchten Koordinatenfunktion von q des Teilchens in Abhängigkeit von der Zeit auf, so dass wir deren Lösung aus der Differential- und Integralrechnung schon kennen:

$$q(t) = q_0 + q_1(t - t_0) - \frac{g(t - t_0)^2}{2}.$$

Die Lösung können wir aus der Differentialgleichung durch zweimaliges Integrieren der linken und rechten Seite erhalten. Das Ziel unserer Untersuchung einer Differentialgleichung ist dabei möglichst alle Lösungen zu bestimmen und dann solche zusätzlichen Eigenschaften der Lösungen zu finden, die die Lösung eindeutig festlegen.

Definition 1.11. *Eine Lösung ist eine Funktion q, die so oft differenzierbar ist, dass alle in der Differentialgleichung vorkommenden Ableitungen existieren, und die zusammen mit diesen Ableitungen die Differentialgleichung erfüllt.*

In der Differentialgleichung

$$m\ddot{q} = -mg$$

hängen m (die Masse des Teilchens) und g (das Schwerefeld) nicht von t ab. Deshalb ist die Differentialgleichung äquivalent zu

$$\ddot{q} = -g.$$

Wenn wir die linke und die rechte Seite integrieren erhalten wir nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\dot{q}(t) - \dot{q}(t_0) = -g(t - t_0) \text{ bzw.} \quad \dot{q}(t) = \dot{q}(t_0) - g(t - t_0).$$

Nach nochmaligem Integrieren erhalten wir schließlich

$$q(t) = q(t_0) + \dot{q}(t_0)(t - t_0) - \frac{g(t - t_0)^2}{2}.$$

Die Funktion $q(t) = -\frac{g}{2}(t - t_0)^2 + q_1(t - t_0) + q_0$ ist auf $\mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar und es gilt:

$$\dot{q}(t) = -g(t - t_0) + q_1 \text{ und} \quad \ddot{q}(t) = -g.$$

Also sind alle Lösungen von der Form

$$q(t) = -\frac{g(t - t_0)^2}{2} + q_1(t - t_0) + q_0, \text{ wobei } q(t_0) = q_0 \text{ und } \frac{dq}{dt}(t_0) = q_1.$$

Damit haben wir in diesem einfachen Beispiel unser Ziel erreicht.

Zusammenfassung 1.12. *Die höchste vorkommende Ableitung der Differentialgleichung $m\ddot{q} = -gm$ ist die zweite Ableitung. Durch geeignetes zweimaliges Integrieren konnten wir die Differentialgleichung lösen. Dabei entstanden zwei Integrationskonstanten und die Lösungen waren dann eindeutig durch die Wahl dieser Integrationskonstanten bestimmt. Diese Integrationskonstanten konnten wir schließlich als die*

Werte der Lösung und ihrer ersten Ableitung zu dem Zeitpunkt t_0 interpretieren. Deshalb ist der Lösungsraum dieser Differentialgleichung zweidimensional und wird parametrisiert durch $(q(t_0), \dot{q}(t_0)) \in \mathbb{R}^2$. Zu jeder solchen Wahl eines Anfangszustandes $(q(t_0), \dot{q}(t_0)) = (q_0, q_1)$ gibt es dann genau eine Lösung, die gegeben ist durch

$$q(t) = -\frac{g}{2}(t - t_0)^2 + q_1(t - t_0) + q_0.$$

Typischerweise beschreiben solche Differentialgleichungen die zeitliche Entwicklung von veränderlichen Größen in der Natur. Diese Differentialgleichungen geben dann ein kausales Verhalten der veränderlichen Größen vor. Durch das Lösen der Differentialgleichung können wir aus der Kenntnis der veränderlichen Größen und genügend vieler Ableitungen von ihnen zu einem (Anfangs-)Zeitpunkt t_0 das Verhalten von ihnen sowohl in der Zukunft, als auch in der Vergangenheit ausrechnen und damit ihr Verhalten in der Zukunft vorhersagen und auf ihr Verhalten in der Vergangenheit zurückschließen. Die Anzahl der Ableitungen, die wir zum Zeitpunkt t_0 kennen müssen, ist gegeben durch die Anzahl der Integrationskonstanten, also die Anzahl der Integrale, die wir benötigen, um die Gleichung zu lösen. Da typischerweise auch die Funktionswerte vorgeben werden, also die Nullte-Ableitung, sollten im Allgemeinen alle Ableitungen bis zu einer Ordnung niedriger als der höchsten vorkommenden Ableitung vorgeben werden.

Definition 1.13. *Die Ordnung einer Differentialgleichung ist die höchste vorkommende Ordnung aller auftauchenden Ableitungen einer Differentialgleichung.*

Definition 1.14. *(Anfangswertproblem) Die Suche nach einer Lösung q einer gewöhnlichen Differentialgleichung der Ordnung n, die an einem Wert t_0 der Variablen t (nach der abgeleitet wird) zusammen mit den ersten $n-1$ Ableitungen die Werte*

$$q(t_0) = q_0,\ \dot{q}(t_0) = q_1,\ \ldots,\ q^{(n-1)}(t_0) = q_{n-1}$$

annimmt, heißt Anfangswertproblem.

Aufgrund unserer Vorüberlegungen erwarten wir, dass jedes solche Anfangswertproblem eine eindeutige Lösung hat. Wir werden später auch Bedingungen angeben, unter denen wir die Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen solcher Anfangswertprobleme beweisen können. Es stellt sich heraus, dass manche dieser Anfangswertprobleme viele Lösungen besitzen und andere gar keine.

Beispiel 1.15. (i) *Das Anfangswertproblem $(\dot{q})^2 = 4q$ mit $q(0) = 0$ hat die Lösungen*

$$q(t) = \begin{cases} (t-b)^2 & \text{für } b < t \\ 0 & \text{für } -a \leq t \leq b \\ (t+a)^2 & \text{für } t < -a \end{cases}$$

Hier sind a und b zwei nichtnegative reelle Zahlen, die beide auch ∞ sein können.

(ii) *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die keine Stammfunktion besitzt (z.B. die charakteristische Funktion der rationalen Zahlen). Dann hat das Anfangswertproblem $\dot{q} = f$ mit $q(0) = 0$ keine Lösung.*

Die charakteristische Funktion der rationalen Zahlen besitzt auf keinem offenen Intervall (a, b) eine Stammfunktion. Wenn nämlich F eine solche Stammfunktion wäre, dann wäre $x \mapsto F(x)$ monoton wachsend und $x \mapsto F(x) - x$ monoton fallend. Wegen dem Mittelwertsatz muss für alle $x_1, x_2 \in (a, b)$ entweder gelten

$$F(x_1) - F(x_2) = x_1 - x_2 \text{ oder } F(x_1) - F(x_2) = 0.$$

Im zweiten Fall folgt aus der Monotonie von F, dass F zwischen x_1 und x_2 konstant ist und im ersten Fall folgt aus der Monotonie von $x \mapsto F(x) - x$, dass diese Funktion zwischen x_1 und x_2 konstant ist. Also ist die Ableitung von F zwischen x_1 und x_2 entweder konstant gleich 0 oder konstant gleich 1. Damit ist F keine Stammfunktion der charakteristischen Funktion der rationalen Zahlen.

1.3 Gewöhnliche Differentialgleichungssysteme

Im einfachsten Fall sind die Funktionen, die mit ihren Ableitungen die Differentialgleichung erfüllen soll, reelle Funktionen. In diesem Fall hat eine gewöhnliche Differentialgleichung der Ordnung n die Form

$$f(t, q(t), \dot{q}(t), \ldots, q^{(n)}(t)) = 0, \quad \text{wobei} \quad f : \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$$

eine reelle Funktion ist. Hierbei werden nur die Werte einer reellen Funktion und aller ihrer Ableitungen bis zur Ordnung n zu einem Zeitpunkt t mit einander in Beziehung gebracht werden. Wenn wir zusätzlich noch annehmen, dass sich die Differentialgleichung nach der höchsten Ableitung auflösen lässt, dann nimmt sie die Form

$$q^{(n)}(t) = f(t, q(t), \dot{q}(t), \ldots, q^{(n-1)}(t)) \text{ an, mit einer Funktion} \quad f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}.$$

Wenn wir $\mathbb{R}^m$-wertige Funktionen q betrachten, dann nimmt sie die Form

$$q^{(n)}(t) = f(t, q(t), \dot{q}(t), \ldots, q^{(n-1)}(t)) \text{ an, mit einer Funktion} \quad f : \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^m)^n \to \mathbb{R}^m.$$

Solche Differentialgleichungen heißen Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen oder gewöhnliche Differentialgleichungssysteme. Um die folgende Untersuchung zu vereinfachen, machen wir von folgender Beobachtung Gebrauch.

Satz 1.16. *Jedes gewöhnliche Differentialgleichungssystem von obiger Form lässt sich durch Vergrößerung von m auf $m \cdot n$ in ein gewöhnliches Differentialgleichungssystem erster Ordnung verwandeln. Wenn außerdem t zu einer zusätzlichen Komponente von q gemacht wird, also m auf $m \cdot n + 1$ erhöht wird, dann hängt f nicht mehr von t ab.*

Beweis: Fassen wir die Funktionen $(q, \dot{q}, \ldots, q^{(n-1)})$ zu einer $\mathbb{R}^{n \cdot m}$-wertigen Funktion zusammen, so ist die gewöhnliche Differentialgleichung

$$q^{(n)}(t) = f(t, q(t), \dot{q}(t), \ldots, q^{(n-1)}(t))$$

offenbar äquivalent zu

$$\frac{d}{dt}(q(t), \dot{q}(t), \ldots, q^{(n-1)}(t)) = (\dot{q}(t), \ldots, q^{n-1}(t), f(t, q(t), \dot{q}(t), \ldots, q^{(n-1)}(t))).$$

Hierbei geht das entsprechende Anfangswertproblem

$$q(t_0) = q_0, \ldots, q^{(n-1)}(t_0) = q_{n-1}$$

über in

$$(q, \dot{q}, \ldots, q^{(n-1)})(t_0) = (q_0, \ldots, q_{n-1}).$$

Wenn wir q auch noch um die Funktion t erweitern, dann ist die ursprüngliche Differentialgleichung offenbar äquivalent zu

$$\frac{d}{dt}(t, q, \dot{q}, \ldots, q^{(n-1)}) = (1, \dot{q}, \ldots, q^{n-1}, f(t, q, \dot{q}, \ldots, q^{(n-1)})).$$

Hierbei geht das entsprechende Anfangswertproblem

$$q(t_0) = q_0, \; \ldots, \; q^{(n-1)}(t_0) = q_{n-1}$$

über in

$$(t, q, \dot{q}, \ldots, q^{(n-1)})(t_0) = (t_0, q_0, \ldots, q_{n-1}).$$

q.e.d.

Die Ableitung von zeitkontinuierlichen Systemen werden durch solche Differentialgleichungssysteme beschrieben. Im nächsten Abschnitt untersuchen wir, unter welchen Bedingungen diese Differentialgleichungen die Abbildung Φ eindeutig bestimmen.

Beispiel 1.17. *Die Differentialgleichung $m\ddot{q} = -gm$ ist äquivalent zu dem Differentialgleichungssystem*

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} q \\ \dot{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{q} \\ -g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q \\ \dot{q} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix}.$$

1.4 Existenz und Eindeutigkeit

Das wichtigste mathematische Mittel um die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen von Differentialgleichungen zu beweisen ist der Banachsche Fixpunktsatz.

Satz 1.18. *(**Banachscher Fixpunktsatz**) Sei X ein vollständiger metrischer Raum und f eine lipschitzstetige Abbildung von X nach X mit Lipschitzkonstante $L < 1$, d.h. für alle $x, y \in X$ gilt $d(f(x), f(y)) \leq Ld(x, y)$. Dann besitzt f genau einen Fixpunkt und für jedes $x_0 \in X$ konvergiert die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_{n+1} = f(x_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gegen den Fixpunkt.*

Beweis: Aus der Lipschitz-Stetigkeit von f folgt für jedes $n \in \mathbb{N}$ und alle $x, y \in X$:

$$d(f^n(x), f^n(y)) \leq L^n d(x, y).$$

Hier bezeichnet f^n die n-fache Verknüpfung von f mit sich selber. Also folgt aus der Dreiecksungleichung für alle $m > n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} d(f^m(x_0), f^n(x_0)) &\leq \sum_{l=n}^{m-1} d(f^{l+1}(x_0)), f^l(x_0)) && \leq \sum_{l=n}^{m-1} L^l d(f(x_0), x_0) \\ &= (1 - L^{m-n}) \frac{L^n}{1-L} d(f(x_0), x_0) && \leq \frac{L^n}{1-L} d(f(x_0), x_0). \end{aligned}$$

Wegen $0 < L < 1$ konvergiert $\frac{L^n}{1-L} d(f(x_0), x_0)$ gegen Null und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge. Wegen der Vollständigkeit konvergiert sie. Wegen der Stetigkeit von f gilt

$$f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Also ist der Grenzwert ein Fixpunkt von f. Wegen der Lipschitzstetigkeit von f ist der Abstand von zwei Fixpunkten kleiner oder gleich als L mal dem Abstand. Also ist $(1 - L)$ mal dem Abstand kleiner oder gleich Null. Dann ist wegen $L < 1$ der Abstand nicht positiv, also gleich Null und beide Fixpunkte stimmen überein. **q.e.d.**

Um die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen von Differentialgleichungssytemen in normierten Vektorräumen zu zeigen, müssen wir Funktionen von Intervallen in normierte Vektorräume integrieren. Dafür wollen wir das Riemannintegral auf solche Funktionen ausdehnen. Für jedes Teilintervall $I \subset [a, b]$ eines kompakten Intervalles $[a, b]$ und jedes Element v eines normierten Vektorraumes V über $\mathbb{K}$ definiert

$$v\chi_I : [a, b] \to V, \qquad t \mapsto \begin{cases} v & \text{falls } t \in I \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

eine Funktion in $B([a,b],V)$. Dabei kann I auch aus einem Punkt bestehen. Die endlichen Linearkombinationen solcher Funktionen heißen Treppenfunktionen. Sie bilden einen Untervektorraum von $B([a,b],V)$. Wir definieren das Integral $\int_a^b v\chi_I(t)dt$ als v mal der Intervalllänge $|I|$, und setzen es linear auf alle Treppenfunktionen fort. Wir zeigen jetzt, dass diese lineare Fortsetzung eindeutig ist. Für jedes Teilintervall $I \subset [a,b]$ ist $[a,b] \setminus I$ die Vereinigung von einem oder von zwei schnittfremden Intervallen, und entsprechend $[a,b]$ die Vereinigung von zwei oder drei schnittfremden Intervallen, von denen eines I ist. Die Schnittmengen I_i von jeweils einem Intervall aus allen solchen Zerlegungen von endlich vielen J_j zerlegen $[a,b] = \bigcup_i I_i$ in endlich viele schnittfremde Teilintervalle, so dass jedes J_j eine Vereinigung von endlich vielen I_i ist. Dann gilt für

$$f = \sum\nolimits_j \chi_{J_j} v_j = \sum\nolimits_i \chi_{I_i} \sum\nolimits_{\{j|I_i\subset J_j\}} v_j \quad \text{mit} \quad v_j \in V,$$
$$\int_a^b f(t)dt = \sum_j |J_j|v_j = \sum_{\{i,j|I_i\subset J_j\}} |I_i|v_j = \sum_i |I_i| \sum_{\{j|I_i\subset J_j\}} v_j = \int_a^b \sum_i \chi_{I_i}(t) \sum_{\{j|I_i\subset J_j\}} v_j dt.$$

Also ist das Intgeral der Treppenfunktion f unabhängig von der Zerlegung in eine Linearkombination von $\chi_{J_j} v_j$. Es folgt

$$\left\|\int_a^b f(t)dt\right\| = \left\|\sum\nolimits_{\{i,j|I_i\subset J_j\}} |I_i|v_j\right\| \le \sum\nolimits_i |I_i| \left\|\sum\nolimits_{\{j|I_i\subset J_j\}} v_j\right\| = \int_a^b \|f(t)\|dt$$
$$\le \sum\nolimits_i |I_i| \max_i \left\|\sum\nolimits_{\{j|I_i\subset J_j\}} v_j\right\| = (b-a)\|f\|_\infty.$$

Also definiert das Integral eine lipschitzstetige lineare Abbildung von dem normierten Unterrvektorraum aller Treppenfunktionen in $B([a,b],V)$ nach V mit Lipschitzkonstante $(b-a)$. Die Elemente des Abschlusses dieses Unterraumes heißen einfache Funktionen (siehe Dieudonne: Grundzüge der modernen Analysis 1 Abschnitt 7.6).

Satz 1.19. *In einem Banachraum V ist $f \in B([a,b],V)$ genau dann einfach, wenn es für jedes $x \in [a,b]$ Elemente $v,w \in V$ gibt, und für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass $\|f(y)-v\| < \epsilon$ für alle $y \in (x-\delta,x)\cap[a,b]$ und $\|f(y)-w\| < \epsilon$ für alle $y \in (x,x+\delta)\cap[a,b]$ gilt. Jede einfache Funktion hat höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen.*

Beweis: Wenn f die obige Bedingung erfüllt, dann ist für jedes $\epsilon > 0$ jedes $x \in [a,b]$ in einem in $[a,b]$ offenen Teilintervall $I_x \subset [a,b]$ enthalten, so dass die Abstände zwischen Funktionswerten von f an zwei Punkten von $I_x\cap(-\infty,x)$ oder von $I_x\cap(x,\infty)$ jeweils kleiner als ϵ sind. Die offene Überdeckung $\bigcup_{x\in[a,b]} I_x$ der kompakten Menge $[a,b]$ besitzt eine endliche Teilüberdeckung. Wir ordnen die Randpunkte und Indexpunkte der entsprechenden Intervalle I_x zusammen mit a und b der Größe nach an. Dann gibt es eine Treppenfunktion in $B(f,\epsilon) \subset B([a,b],V)$, die zwischen zwei aufeinanderfolgenden Punkten jeweils konstant ist. Das gilt für alle $\epsilon > 0$, und f ist eine einfache Funktionen.

Wenn umgekehrt f einfach ist, dann gibt es für jedes $\epsilon > 0$ eine Treppenfunktion $g \in B(f,\epsilon/2)$. Für jedes $x \in [a,b]$ wählen wir $\delta > 0$ so, dass g auf $(x-\delta,x) \cap [a,b]$ und $(x,x+\delta) \cap [a,b]$ konstant ist. Der Abstand zwischen Funktionswerten von f an zwei Punkten in $(x-\delta,x)\cap[a,b]$ oder in $(x,x+\delta)\cap[a,b]$ ist also jeweils kleiner als ϵ. Das gilt für jedes $\epsilon > 0$ mit einem geeignet gewählten $\delta > 0$. Für streng monotone wachsende bzw. fallende gegen x konvergierende Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolgen mit Grenzwerten v bzw. w. Dann erfüllt f die Bedingung des Satzes. Wenn x nicht zu den abzählbar vielen Unstetigkeitsstellen einer in $B([a,b],V)$ gegen f konvergierenden Folge von Treppenfunktionen gehört, dann gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so dass die Abstände zwischen den Funktionswerte von f an zwei Punkten in $(x-\delta,x+\delta) \cap [a,b]$ kleiner als ϵ sind. Deshalb ist f an höchstens abzähbar vielen Punkten unstetig.**q.e.d.**

Die Summe der charakteristischen Funktionen der Intervalle $(\frac{1}{2n+1},\frac{1}{2n})$ ist auf $[0,1]$ riemannintegrable mit abzählbar vielen Unstetigkeitsstellen, aber nicht einfach.

Für einen Banachraum V ist der Abschluss des Unterraumes der Treppenfunktionen in $B([a,b],V)$ auch ein Banachraum. Das Integral setzt sich zu einer stetigen linearen Abbildung von den einfachen Funktionen nach V fort. Aus der Lipschitzstetigkeit von $f \mapsto \int_a^b f(t)dt$, $f \mapsto \|f\|$ und $\|f\| \mapsto \int_a^b \|f(t)\|dt$ folgt für einfache Funktionen f

$$\left\|\int_a^b f(t)dt\right\| \leq \int_a^b \|f(t)\|dt \leq (b-a)\|f\|_\infty.$$

Satz 1.20. *Für eine einfache Funktion $f \in B([a,b],V)$ ist $F : [a,b] \to V$ mit $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ stetig und überall dort, wo f stetig ist, differenzierbar mit $F'(t) = f(t)$.*

Beweis: Für $t,t_0 \in [a,b]$ gilt $\|F(t)-F(t_0)\| \leq \int_{t_0}^t \|f(s)\|ds \leq |t-t_0| \cdot \|f\|_\infty$. Also ist F lipschitzstetig. Aus $\|f(s)-f(t_0)\| < \epsilon$ für $s \in [t_0,t] \cap [a,b]$ bzw. $[t,t_0] \cap [a,b]$ folgt

$$\left\|\frac{F(t)-F(t_0)}{t-t_0} - f(t_0)\right\| \leq \frac{1}{|t-t_0|}\int_{t_0}^t \|f(s)-f(t_0)\|ds < \epsilon.$$

Insbesondere ist F überall dort, wo f stetig ist, differenzierbar mit $F'(t) = f(t)$.**q.e.d.**

Aus dem Mittelwertsatz 8.5.1. (Dieudonne: Grundzüge der modernen Analysis 1 Abschnitt 8.5) folgt, dass eine stetige Funktion $F : [a,b] \to V$, die außerhalb einer abzählbaren Teilmenge differenzierbar ist, und deren Ableitung dort mit einer einfachen Funktion f übereinstimmt, sich nur um eine Konstante von $\int_a^x f(t)dt$ unterscheidet.

Wir zeigen jetzt die Existenz und Eindeutigkeit von gewöhnlichen Differentialgleichungen. Wir müssen an die Nichtlinearität allerdings Bedingungen knüpfen.

Definition 1.21. *Eine Funktion f von einem metrischen Raum X in den metrischen Raum Y heißt lokal lipschitzstetig, wenn es für jedes $x_0 \in X$ eine Umgebung $U \subset X$ von x_0 gibt und eine Lipschitzkonstante $L > 0$, so dass für alle $x, x' \in U$ gilt*

$$d(f(x), f(x')) \leq Ld(x, x').$$

Satz 1.22. *(von Picard Linedlöf) Sei I ein offenes Intervall, $U \subset V$ eine offene Teilmenge eines Banachraums V und $f : I \times U \to V$ eine stetige Abbildung, die bezüglich der zweiten Variablen lokal lipschitzstetig ist, d.h. für jedes $(t_0, q_0) \in I \times U$ gibt es ein $\delta > 0$ und ein $L > 0$, so dass für alle $(t, q), (t, \tilde{q}) \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \times B(q_0, \delta)$*

$$\|f(t, q) - f(t, \tilde{q})\| \leq L\|q - \tilde{q}\|$$

gilt. Dann gibt es für jedes $(t_0, q_0) \in I \times U$ ein $\epsilon > 0$, so dass das Anfangswertproblem $\dot{q}(t) = f(t, q(t))$ mit $q(t_0) = q_0$ auf $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$ genau eine Lösung besitzt.

Beweis: Wegen der lokalen Lipschitzstetigkeit gilt $\|f(t, q) - f(t, \tilde{q})\| \leq L\|q - \tilde{q}\|$ für alle $(t, q), (t, \tilde{q}) \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times \overline{B(q_0, \delta)}$ mit geeigneten $\delta > 0$ und $L > 0$. Wegen der Stetigkeit von f ist $\quad F : q \mapsto F(q) \quad \text{mit} \quad F(q)(t) = q_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, q(s))ds$ eine stetige Abbildung von $C([t_0 - \delta, t_0 + \delta], \overline{B(q_0, \delta)})$ nach $C([t_0 - \delta, t_0 + \delta], V)$. Sei

$$\|f(\cdot, q_0)\|_\infty = \sup_{s \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]} \|f(s, q_0)\|.$$

Wenn $\epsilon \leq \delta$ und $\epsilon\,(\|f(\cdot, q_0)\|_\infty + L\delta) \leq \delta$, dann ist für alle $q \in C([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], \overline{B(q_0, \delta)})$

$$\|F(q) - q_0\|_\infty \leq \left\| \int_{t_0}^{t} (f(s, q_0) + f(s, q(s)) - f(s, q_0))ds \right\| \leq \epsilon\,(\|f(\cdot, q_0)\|_\infty + L\delta) \leq \delta.$$

Also bildet F den vollständigen metrischen Raum $C([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], \overline{B(q_0, \delta)})$ auf sich selber ab. Für $q, \tilde{q} \in C([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], \overline{B(q_0, \delta)})$ gilt

$$\|F(q) - F(\tilde{q})\|_\infty \leq \int_{t_0}^{t} \|f(s, q(s) - f(s, \tilde{q}(s))\|\, ds \leq \epsilon L\|q - \tilde{q}\|_\infty.$$

Sei also ϵ kleiner als $\quad \epsilon < \min\left\{\delta, \frac{\delta}{\|f(\cdot, q_0)\|_\infty + L\delta}, \frac{1}{L}\right\} = \min\left\{\delta, \frac{\delta}{\|f(\cdot, q_0)\|_\infty + L\delta}\right\}.$

Die Abbildung F von dem vollständigen metrischen Raum $C([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], \overline{B(q_0, \delta)})$ auf sich selber ist lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante $\epsilon \cdot L < 1$. Jeder Fixpunkt ist auf $t \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$ wegen Satz 1.20 differenzierbar und löst das obige Anfangswertproblem mit $q(t_0) = q_0$. Wenn q umgekehrt auf $(t_0-\epsilon, t_0+\epsilon)$ das Anfangswertproblem löst, dann haben $F(q)$ und q die gleichen Ableitungen und die gleichen Funktionswerte bei $t = t_0$. Also stimmen diese Funktionen überein und jede Lösung des Anfangswertproblems ist ein Fixpunkt von F. Die Existenz und Eindeutigkeit dieses Anfangswertproblems auf $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$ folgt also aus dem Banachschen Fixpunktsatz. **q.e.d.**

Wegen Satz 1.16 können wir annehmen, dass f nicht von t abhängt. Eine solche autonome gewöhnliche Differentialgleichung ist durch ein Vektorfeld $F : U \to V$ auf einer offenen Teilmenge $U \subset V$ eines Banachraumes gegeben. Wir nennen dann für $x \in U$ die Lösungen der Anfangswertprobleme

$$\dot{q}(t) = F(q(t)) \quad \text{mit} \qquad\qquad q(0) = x$$

Integralkurven durch x. Wegen Übungsaufgabe 1.3 sind diese Integralkurven Kandidaten für die Bahnen eines dynamischen Systems.

Wir wollen jetzt untersuchen, wie die Lösungen der Anfangswertprobleme, also die Fixpunkte von F, von t_0, q_0 und f abhängen. Wegen Satz 1.16 können wir das Anfangswertproblem in ein solches verwandeln, in dem f nicht von t abhängt. Weil solche Anfangswertprobleme bezüglich t translationsinvariant sind, können wir dann den Anfangspunkt 0 wählen. Deshalb untersuchen wir im Folgenden nur die Abhängigkeit der Lösung des Anfangswertproblems von q_0 und f.

Jede Lösung q der Differentialgleichung $\dot{q}(t) = f(t, q(t))$ mit einer differenzierbaren Funktion f erfüllt auch

$$\ddot{q}(t) = \frac{d}{dt} f(t, q(t)) = \frac{\partial f(t, q(t))}{\partial t} + \frac{\partial f(t, q(t))}{\partial q} \dot{q}(t) = \frac{\partial f(t, q(t))}{\partial t} + \frac{\partial f(t, q(t))}{\partial q} f(t, q(t)).$$

Indem wir immer höhere Ableitungen bilden sehen wir, dass für r mal (stetig) differenzierbare Funktionen f, jede Lösung auch $(r + 1)$ mal (stetig) differenzierbar ist. Wir werden gleich sehen, dass in diesem Fall die Lösung der entsprechenden Anfangswerte auch r mal (stetig) differenzierbar von q_0 abhängt.

Satz 1.23. *Sei I ein offenes Intervall, $U \subset V$ eine offene Teilmenge eines Banachraums V und $f : I \times U \to V$ eine stetige Abbildung, die partiell nach q r mal stetig differenzierbar ist mit $r \in \mathbb{N}$. Dann gibt es für alle $(t_0, q_0) \in I \times U$ eine offene Umgebung W von q_0 in V, $\epsilon > 0$ und eine r mal stetig differenzierbare Funktion $g : W \to C([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], V)$, so dass für $q_1 \in W$ die Funktion $g(q_1)$ die eindeutige Lösung des folgenden Anfangswertproblems ist*

$$\frac{dq}{dt}(t) = f(t, q(t)) \text{ für alle } t \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \text{ mit } \quad q(t_0) = q_1.$$

Beweis: Wir benutzen den Satz der impliziten Funktion. Weil $\frac{\partial f}{\partial q}$ stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$, so dass U den abgeschlossenen Ball $[t_0-\delta, t_0+\delta] \times \overline{B(q_0,\delta)}$ enthält und $\frac{\partial f}{\partial q}$ auf $[t_0-\delta, t_0+\delta] \times \overline{B(q_0,\delta)}$ durch L beschränkt ist. Wegen dem Schrankensatz ist dann f auf $[t_0-\delta, t_0+\delta] \times \overline{B(q_0,\delta)}$ für festes t in q lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante $L > 0$. Sei also $0 < \epsilon < \min\left\{\delta, \frac{1}{L}\right\}$ ähnlich gewählt wie in dem Beweis des Satzes von Picard-Lindelöf. Dann definiert

$$F : V \times C([t_0-\epsilon, t_0+\epsilon], \overline{B(q_0,\delta)}) \to C([t_0-\epsilon, t_0+\epsilon], V), \qquad (q_1, q) \mapsto F(q_1, q)$$
$$\text{mit} \quad F(q_1, q)(t) = q_1 + \int_{t_0}^{t} f(s, q(s))ds$$

eine stetige Abbildung. Die partielle Ableitung $\frac{\partial F(q_1,q)}{\partial q}$ ist gegeben durch

$$\frac{\partial F(q_1,q)}{\partial q} : \qquad C([t_0-\epsilon, t_0+\epsilon], V) \to C([t_0-\epsilon, t_0+\epsilon], V), \qquad z \mapsto \frac{\partial F(q_1,q)}{\partial q}(z)$$
$$\text{mit} \qquad \frac{\partial F(q_1,q)}{\partial q}(z)(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{\partial f(s,q(s))}{\partial q}(z(s))ds.$$

Weil die Ableitungen $\frac{\partial f(s,q(s))}{\partial q}$ beschränkt sind durch L, ist die Ableitung $\frac{\partial F(q_1,q)}{\partial q}$ beschränkt durch $L\epsilon < 1$. Also konvergiert für $q_1 \in V$ und $q \in C([t_0-\epsilon, t_0+\epsilon], B(q_0,\delta))$ die Neumannsche Reihe

$$\left(\mathbb{1}_{C([t_0-\epsilon,t_0+\epsilon],V)} - \frac{\partial F(q_1,q)}{\partial q}\right)^{-1} = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{\partial F(q_1,q)}{\partial q}\right)^{l}$$

in $\mathcal{L}(C([t_0-\epsilon, t_0+\epsilon], V))$ gegen den inversen Operator von $\mathbb{1}_{C([t_0-\epsilon,t_0+\epsilon],V)} - \frac{\partial F(q_1,q)}{\partial q}$. Offenbar ist für $q_1, q_2 \in V$ die punktweise Differenz der entsprechenden Abbildungen eine konstante Abbildung: $F(q_1,q) - F(q_2,q) = q_1 - q_2$.
Deshalb ist für jedes $q \in C([t_0-\epsilon, t_0+\epsilon], B(q_0,\delta))$ die Abbildung $q_1 \mapsto F(q_1,q)$ eine glatte Abbildung von V nach $C([t_0-\epsilon, t_0+\epsilon], V)$. Also ist die Abbildung

$$G : V \times C([t_0-\epsilon, t_0+\epsilon], B(q_0,\delta)) \to C([t_0-\epsilon, t_0+\epsilon], V),$$
$$(q_1, q) \mapsto \left(\mathbb{1}_{C([t_0-\epsilon,t_0+\epsilon],B(q_0,\delta))} - F(q_1,q)\right) = q - F(q_1,q)$$

eine stetig differenzierbare Abbildung und besitzt auf dem gesamten Definitionsbereich eine invertierbare partielle Ableitung nach $q \in C([t_0-\epsilon, t_0+\epsilon], B(q_0,\delta))$. Das Urbild der $0 \in C(I,V)$ besteht genau aus den Fixpunkten der Abbildungen $q \mapsto F(q_1,q)$. Aus dem Satz der impliziten Funktion folgt, dass es eine stetig differenzierbare Abbildung g von einer Umgebung W von $q_0 \in V$ auf die entsprechenden Fixpunkte der Abbildungen

$q \mapsto F(q_1, q)$ gibt. Diese Abbildung ist genauso oft stetig differenzierbar, wie G. Weil das Integral von t_0 nach t eine lineare stetige und damit glatte Abbildung von $C([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], V)$ auf sich selber ist, sind die partiellen Ableitungen von G nach q bis zur selben Ordnung stetig, bis zu der auch die partiellen Ableitungen von f nach q stetig sind. Also ist G und damit auch die Abbildung g auf die Lösung des entsprechenden Anfangswertproblems r mal stetig differenzierbar. **q.e.d.**

Der Beweis zeigt auch, dass die Lösung des Anfangswertproblems unter den gleichen Voraussetzungen stetig differenzierbar von t_0 und von f abhängt, wenn auf dem Raum der Funktionen $f \in C(I \times U, V)$ die Supremumsnorm von f und von $\frac{\partial f}{\partial q}$ benutzt wird. Wenn in diesem Satz die Funktion f nicht von t abhängt, dann lassen sich die ersten $r + 1$ Ableitungen $\dot{q}(t), \ldots, q^{(r+1)}(t)$ der Lösung durch die ersten r Ableitungen der Funktion f nach q bei $q(t)$ ausdrücken. Deshalb sind die entsprechenden Lösungen des Anfangswertproblems sogar $(r + 1)$ mal stetig nach t differenzierbar. Für glatte f, die nicht von t abhängen, hängen die Lösungen des Anfangswertproblems glatt von q_0 und t ab. Die Abhängigkeit von t_0 ist wenn f nicht von t abhängt trivial. Höhere Ableitungen nach t_0 können wir mit dem oben beschriebenen Trick für differenzierbare Funktionen f kontrollieren. Jetzt setzten wir die Lösungen auf möglichst große Intervalle fort.

Satz 1.24. *(Globale Existenz und Eindeutigkeit) Sei $O \subset \mathbb{R} \times V$ eine offene Teilmenge und $f : O \to V$ eine stetige Abbildung, die wie bei der lokalen Existenz und Eindeutigkeit lokal lipschitzstetig ist. Dann gibt es für jedes $(t_0, q_0) \in O$ genau ein maximales Intervall $(a, b) \subset \mathbb{R}$, das t_0 enthält, und auf dem das Anfangswertproblem*

$$\dot{q}(t) = f(t, q) \quad \textit{mit} \quad q(t_0) = q_0$$

genau eine Lösung q enthält. Das Intervall ist in dem Sinne maximal, dass an beiden Rändern, also bei a und b, eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(i) $a = -\infty$ *(bzw. $b = \infty$).*

(ii) $t \mapsto \|f(t, q(t))\|$ *ist für alle $\epsilon > 0$ auf $(a, a + \epsilon)$ (bzw. $(b - \epsilon, b)$) unbeschränkt.*

(iii) *Die Lösung q lässt sich stetig auf $[a, b)$ (bzw. $(a, b]$) fortsetzen, der Graph der Fortsetzung liegt aber nicht in O, d.h. $\lim_{t \downarrow a}(t, q(t)) \notin O$ (bzw. $\lim_{t \uparrow b}(t, q(t)) \notin O$).*

Beweis: Für jedes Intervall (a, b), das t_0 enthält, und auf dem das Anfangswertproblem

$$\dot{q}(t) = f(t, q(t)) \text{ mit} \qquad q(t_0) = q_0$$

eine Lösung $\tilde{q}$ besitzt, so dass sich $\tilde{q}$ auf $[a, b)$ oder $(a, b]$ stetig fortsetzen lässt, und der Graph der Fortsetzung in O liegt, besitzt das neue Anfangswertproblem

$$\dot{q}(t) = f(t, q(t)) \text{ mit} \qquad q(a) = \lim_{t \to a+} \tilde{q}(t) \text{ bzw.} \qquad q(b) = \lim_{t \to b-} \tilde{q}(t)$$

wegen des Satzes von Picard-Lindelöf eine Lösung in einer Umgebung von a bzw. b. Der Beweis des Satzes von Picard-Lindelöf zeigt, dass auf $[a, a+\epsilon)$ bzw. $(b-\epsilon, b]$ dieses Anfangswertproblem eindeutig lösbar ist und mit $\tilde{q}$ übereinstimmt. Also existiert ein maximales Intervall (a, b), auf dem das Anfangswertproblem eine eindeutige Lösung besitzt. Wenn bei a bzw. b die Bedingungen (i) und (ii) nicht erfüllt sind, dann ist die Ableitung der Lösung auf einer Menge $(a, a+\epsilon)$ bzw. $(b-\epsilon, b)$ beschränkt und die Lösung ist dort lipschitzstetig. Für jede Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegen a bzw. b konvergiert, konvergiert $((t_n, q(t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}\times V$. Der Grenzwert liegt nicht in O liegen, weil sonst die Lösung eine Fortsetzung auf eine Umgebung von a bzw. b hat. **q.e.d.**

Bemerkung 1.25. **(i)** *Wenn (ii) erfüllt ist, kann $t \mapsto f(t, q(t))$ nicht stetig auf $[a, a+\epsilon)$ bzw. $(b-\epsilon, b]$ fortgesetzt werden. Also können q und f nicht so stetig auf größere Definitionsbereiche fortgesetzt werden, dass a (bzw. b) im Definitionsbereich von q und $(a, q(a))$ (bzw. $(b, q(b))$) im Definitionsbereich von f liegt.*

(ii) *Jede in q stetig differenzierbare Funktion f ist in q lokal lipschitzstetig, weil für stetig differenzierbare Funktionen die Ableitungen lokal beschränkt sind und nach dem Schrankensatz lokal lipschitzstetig sind. Wegen dem Schrankensatz gilt für $f(t, q) = A(t)q$ auch $|\ln(\|q(t)\|)-\ln(\|q(t_0)\|)| \leq \int_{t_0}^{t} \|A(s)\|ds$. In diesem Fall kann $f(t, q)$ nur am Rand des Definitionsbereichs von A unbeschränkt sein. Dann ist auch (ii) nur am Rand des Definitionsbereichs von A möglich.*

Wenn $\dim V < \infty$ kann man die Existenz, aber nicht die Eindeutigkeit (wir kennen schon ein Gegenbeispiel), auf stetige Funktionen f verallgemeinern. Anstatt dem Banachschen Fixpunktsatz verwenden wir dann den Satz von Arzela Ascoli.

Satz 1.26. *(Arzela-Ascoli) Sei K ein kompakter metrischer Raum und V ein endlichdimensionaler Banachraum. Eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $C(K, V)$ besitzt eine konvergente Teilfolge, wenn*

(i) *für jedes $x \in K$ die Folge $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist und*

(ii) *für jedes $x \in K$ die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichgradig stetig ist in x, d.h. für jedes $x \in K$ und jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass $f_n(x') \in B(f_n(x), \epsilon) \subset V$ für alle $x' \in B(x, \delta) \subset K$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.*

Beweis: Wir zeigen zunächst, dass die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sogar auf K gleichgradig stetig ist. Für jedes $\epsilon > 0$ und $y \in K$ gibt es wegen (ii) ein $\delta_y > 0$, so dass $\|f_n(x) - f_n(y)\| < \frac{\epsilon}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ aus $d(x, y) < 2\delta_y$ folgt. Wegen der Kompaktheit von K hat die Überdeckung $\{B(y, \delta_y)|y \in K\}$ eine endliche Teilüberdeckung $K = B(y_1, \delta_1) \cup \ldots \cup B(y_N, \delta_N)$. Sei δ das Minimum von $\delta_1, \ldots, \delta_N$. Dann enthält für alle Paare $x, x' \in K$ mit $d(x, x') < \delta$ einer der Bälle $B(y_1, \delta_1), \ldots, B(y_N, \delta_N)$ den einen Punkt x. Damit sind beide in einem der Bälle $B(y_1, 2\delta_1), \ldots, B(y_N, 2\delta_N)$ enthalten. Daraus folgt $\|f_n(x)-f_n(x')\| < \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2} = \epsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also ist die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichgradig stetig auf ganz K.

Sei $(x_l)_{l\in\mathbb{N}}$ eine Folge, die in K dicht liegt. Wegen (i) ist dann für alle $l \in \mathbb{N}$ der Abschluss A_l der Menge der Folge $(f_n(x_l))_{n\in\mathbb{N}}$ eine kompakte Teilmenge von V. Wir definieren induktiv eine Teilfolge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und eine Folge $(a_l)_{l\in\mathbb{N}}$ in V, so dass $\|g_n(x_l) - a_l\| < \frac{1}{n}$ für alle $l \in \mathbb{N}$ und $n \geq l$ gilt. Dafür wählen wir zuerst einen Häufungspunkt a_1 von $(f_n(x_1))_{n\in\mathbb{N}}$ und eine Teilfolge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\|g_n(x_1) - a_1\| \leq \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Induktiv wählen wir danach für jedes $L \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ einen Häufungspunkt a_L von $(g_n(x_L))_{n\in\mathbb{N}}$, und ersetzen die Folgenglieder von $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Indizes größer als $L-1$ durch eine Teilfolge von $(g_n)_{n\geq L}$, so dass $\|g_n(x_L)-a_L\| < \frac{1}{n}$ für alle $n \geq L$ gilt. Dann gilt $\|g_n(x_l) - a_l\| < \frac{1}{n}$ für alle $l = 1, \ldots, L$ und $n \geq l$.

Dann gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass $\|g_n(x)-g_n(x')\| < \frac{\epsilon}{3}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ aus $x, x' \in K$ mit $d(x, x') < \delta$ folgt. Also gibt es ein $M \in \mathbb{N}$, so dass $\|g_m(x_l) - g_n(x_l)\| < \frac{\epsilon}{3}$ für alle $m, n \geq M$ an den Zentren der Bälle einer endlichen Teilüberdeckung von K durch $(B(x_l, \delta))_{l\in\mathbb{N}}$ gilt. Es folgt für alle $x \in K$ und $n, m \geq M$

$$\|g_m(x)-g_n(x)\| \leq \|g_m(x)-g_m(x_l)\|+\|g_m(x_l)-g_n(x_l)\|+\|g_n(x_l)-g_n(x)\| < \frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

Also ist $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge und konvergiert in $C(K, V)$. **q.e.d.**

Satz 1.27. *(Satz von Peano) Sei I ein offenes Intervall und $U \subset V$ eine offene Teilmenge eines endlichdimensionalen Banachraums und f eine stetige Abbildung $f : I \times U \to V$. Dann gibt es für jedes $(t_0, q_0) \in I \times U$ ein $\epsilon > 0$ und auf $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \subset I$ eine Lösung des Anfangswertproblems* $\quad \dot{q}(t) = f(t, q(t)) \quad$ *mit* $\quad q(t_0) = q_0.$

Beweis: Für jedes $(t_0, q_0) \in I \times U$ gibt es ein $\epsilon > 0$ und $\delta > 0$, so dass

$$[t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon] \times \overline{B(q_0, \delta)} \subset I \times U.$$

Auf dieser kompakten Menge ist dann f beschränkt durch $\|f\|_\infty < \infty$. Verkleinere also gegebenenfalls ϵ, so dass $\|f\|_\infty \cdot \epsilon \leq \delta$ gilt. Für jede Partition P

$$[t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon] = [t_{-M}, t_{1-M}] \cup \ldots \cup [t_{-1}, t_0] \cup [t_0, t_1] \cup \ldots \cup [t_{N-1}, t_N]$$

mit $t_0 - \epsilon = t_{-M} < t_{1-M} < \ldots < t_{-1} < t_0 < t_1 < \ldots < t_{N-1} < t_N = t_0 + \epsilon$ des Intervalls $[t_0-\epsilon, t_0+\epsilon]$, die t_0 als den Anfangs- und Endpunkt eines Teilintervalls enthält, definieren wir folgendermaßen eine Näherungslösung q_P der Differentialgleichung. Auf den Intervallen $[t_{-m}, t_{1-m}]$ definieren wir q_p induktiv für $m = 1, \ldots, m = M$ dadurch, dass jeweils der Wert bei t_{1-m} für $m = 1$ gleich q_0 ist und für $m > 1$ gleich dem Wert $q_P(t_{1-m})$ von dem schon konstruierten q_p bei t_{1-m} ist, und die Ableitung jeweils konstant gleich $f(t_{m-1}, q_P(t_{1-m}))$ ist. Entsprechend definieren wir die Lösung auch indukltiv auf den Intervallen $[t_{n-1}, t_n]$ für $n = 1, \ldots, n = N$ dadurch, dass jeweils der Wert bei t_{n-1} für $n = 1$ gleich q_0 ist und für $n > 1$ gleich dem Wert $q_P(t_{n-1})$ von dem schon konstruierten q_P bei t_{n-1} ist, und die Ableitung jeweils konstant gleich $f(t_{n-1}, q_P(t_{n-1}))$ ist. Wegen $\|f\|_\infty \cdot \epsilon \leq \delta$ und weil f auf $[t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon] \times \overline{B(q_0, \delta)}$ beschränkt ist durch $\|f\|_\infty$, liegen dann alle Werte von q_P in $\overline{B(q_0, \delta)}$.

Sei nun $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Partitionen, deren maximale Intervalllängen eine Nullfolge bilden. Wir zeigen jetzt, dass eine Teilfolge der entsprechenden Folge $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Näherungslösungen gegen eine Lösung des Anfangswertproblems konvergiert. Offenbar erfüllt die Folge $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Voraussetzungen des Satzes von Arzela-Ascoli. Deshalb konvergiert eine Teilfolge von $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $[t_0-\epsilon, t_0+\epsilon]$ gegen eine stetige Funktion q, die bei t_0 gleich q_0 ist. Weil die stetige Funktion f auf der kompakten Teilmenge $[t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon] \times \overline{B(q_0, \delta)}$ stetig und damit auch gleichmäßig stetig ist, konvergiert auch die Folge von Funktionen $t \mapsto f(t, q_n(t))$ auf $[t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$ gleichmäßig gegen die stetige Funktion $t \mapsto (f(t, q(t))$, die dann auch Riemann integrabel ist. Indem wir für alle $t \in [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$ die Endpunkte der Intervalle einer solchen Partition zwischen t_0 und t auswählen definiert jedes P auch eine Partition des Intervalls $[t_0, t]$ bzw. $[t, t_0]$. Dann ist $q_P(t) - q_0$ gerade eine entsprechende Riemannsumme von dem Integral $\int_{t_0}^t f(s, q_P(s))ds$. Offenbar ist die Differenz der Riemannsummen zweier stetiger Funktionen auf $[t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$, beschränkt durch die Supremumsnorm der Differenz mal 2ϵ. Wegen dem Kriterium von Riemann und der gleichmäßigen Konvergenz von $t \mapsto f(t, q_n(t))$ gegen $t \mapsto f(t, q(t))$ konvergiert $(q_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen

$$q_0 + \int_{t_0}^t f(s, q(s))ds = \lim_{n\to\infty} q_n(t) = q(t) \quad \text{für alle} \quad t \in [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon].$$

Wegen Satz 1.20 ist dann q differenzierbar mit $\dot{q}(t) = f(t, q(t))$. Also löst q das Anfangswertproblem mit $q(t_0) = q_0$. **q.e.d.**

Eine Lösung einer Differentialgleichung auf einem abgeschlossenen Intervall ist eine stetige Funktion, die im Inneren stetig differenzierbar ist, und deren Ableitung sich stetig auf das abgeschlossene Intervall fortsetzen lässt. Weil eine Funktion auf der Vereinigung von zwei Intervallen genau dann stetig ist, wenn sie auf beiden Intervallen stetig ist und auf der Schnittmenge übereinstimmt, können wir solche Lösungen zusammensetzen: Wenn q_1 eine Lösung des Anfangswertproblems $\dot{q}(t) = f(t, q(t))$ mit $q(t_1) = q_0$ auf $[t_1 - \epsilon, t_1]$ ist und q_2 auf $[t_1, t_1 + \epsilon]$. Dann ist

$$q(t) = \begin{cases} q_1(t) & \text{für } t \in [t_1 - \epsilon, t_1] \\ q_2(t) & \text{für } t \in [t_1, t_1 + \epsilon] \end{cases}$$

eine Lösung auf $[t_1 - \epsilon, t_1 + \epsilon]$. Also können wir Lösungen wieder nach links bzw. rechts fortsetzen. Für jede total geordnete Familie von offenen Intervallen, auf denen jeweils eine Lösung existiert und jeweils auf der Schnittmenge von zwei solchen Intervallen übereinstimmt, ist die Vereinigung auch das Intervall einer Lösung. Wegen dem Zornschen Lemma existiert dann für jede Lösung ein maximales offenes Intervall, auf das wir sie fortsetzen können. Wir erhalten also wie im Satz 1.24:

Satz 1.28. *(Globale Existenz) Sei V ein endlichdimensionaler Banachraum, $O \subset \mathbb{R}\times V$ offen und $f : O \to V$ eine stetige Abbildung. Dann gibt es für jedes $(t_0, q_0) \in O$ eine (nicht notwendiger Weise eindeutige) maximale Lösung des Anfangswertproblems*

$$\dot{q}(t) = f(t, q(t)) \text{ mit } \qquad q(t_0) = q_0$$

auf einem Intervall (a, b), das t_0 enthält. Die Lösung ist in dem Sinne maximal, dass an beiden Rändern, also bei a und b, eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(i) $a = -\infty$ *(bzw.* $b = \infty$*)*

(ii) $t \mapsto \|f(t, q(t))\|$ *ist für alle* $\epsilon > 0$ *auf* $(a, a + \epsilon)$ *(bzw.* $(b - \epsilon, b)$*) unbeschränkt.*

(iii) *Die Lösung q lässt sich stetig auf $[a, b)$ (bzw. $(a, b]$) fortsetzen, der Graph der Fortsetzung liegt aber nicht in O.* **q.e.d.**

Jede maximale Lösung kann also nicht als Lösung auf ein größeres Intervall fortgesetzt werden. Aber es kann mehrere solcher maximaler Lösungen geben, und zwei verschiedene maximale Lösungen können auf unterschiedlichen Intervallen definiert sein und auf Teilintervallen übereinstimmen.

Korollar 1.29. *Sei F ein stetiges und beschränktes Vektorfeld auf einem (endlichdimensionalen) Banachraum V. Dann sind alle Integralkurven auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.*

Beweis: Weil F auf ganz V definiert ist, kann (iii) nicht erfüllt sein. Weil F beschränkt ist, kann (ii) nicht erfüllt sein. Also muss am Rand (i) gelten. **q.e.d.**

Korollar 1.30. *Sei $F : X \to V$ ein stetiges Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge X eines Banachraumes V. Wenn für ein $x \in X$ die Integralkurve durch x nicht für alle $t \in \mathbb{R}$ definiert ist, dann ist sie in keiner kompakten Teilmenge von X enthalten.*

Beweis: Auf jeder Integralkurve, die in einer kompakten Teilmenge von X enthalten ist, ist das Vektorfeld F beschränkt. Also kann für solche Integralkurven die Bedingung (ii) im Satz 1.28 nicht gelten. **q.e.d.**

Insbesondere sind alle Integralkurven von stetigen Vektorfeldern auf einer offenen Teilmenge eines endlichdimensionalen Banachraumes, die sich nicht auf ganz $\mathbb{R}$ fortsetzen lassen, entweder in keiner beschränkten Teilmenge enthalten, oder sie kommen dem Rand von X beliebig nahe.

1.5 Flüsse und Vektorfelder

In der Übungsaufgabe 1.3 haben wir gesehen, dass ein zeitkontinuierliches partiell nach t differenzierbares dynamisches System ein Vektorfeld F definiert. In diesem Abschnitt konstruieren wir aus dem Vektorfeld F das dazugehörige dynamische System Φ. Zunächst wollen wir alle maximalen Integralkurven aus dem vorangehenden Satz zu Abbildungen von offenen Teilmengen von $\mathbb{R} \times M$ nach M zusammensetzen.

Definition 1.31. *Sei X ein metrischer Raum. Eine Abbildung $\Phi : W \to X$ auf einer offenen Teilmenge $W \subset \mathbb{R} \times X$ heißt lokaler Fluss, wenn folgende Bedingungen gelten:*

(i) *Für alle $x \in X$ ist $\{t \in \mathbb{R} \mid (t, x) \in W\}$ ein offenes Intervall, das die Null enthält.*

(ii) *Sei $(s, x) \in W$ und $(t, \Phi(s, x)) \in W$, dann ist auch $(t + s, x) \in W$ und es gilt*

$$\Phi(t, \Phi(s, x)) = \Phi(t + s, x).$$

(iii) *Für alle $x \in X$ gilt $\Phi(0, x) = x$.*

Lemma 1.32. *Für $\Phi : W \to X$, stetiger lokaler Fluss auf metrischem Raum X gilt:*

(i) *Für alle $t \in \mathbb{R}$ sei $V_t = \{x \in X \mid (t, x) \in W\}$. Dann ist für alle $t \in \mathbb{R}$ die Menge V_t offen. Für alle $x \in V_t$ ist auch $\Phi(t, x) \in V_{-t}$ und die Abbildung*

$$\Phi(t, \cdot) : \quad V_t \to V_{-t}, \quad x \mapsto \Phi(t, x)$$

ein Homöomorphismus mit der inversen Abbildung $\Phi(-t, \cdot)$.

(ii) *Für jedes $x \in X$ gibt es ein $\epsilon > 0$ und eine offene Umgebung $U \subset X$ von x, so dass W die Menge $(-\epsilon, \epsilon) \times U$ enthält. Für alle $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ sind insbesondere V_t und V_{-t} offene Umgebungen von x und $\Phi(t, \cdot)$ ein Homöomorphismus von der offenen Umgebung V_t von x auf die offene Umgebung V_{-t} von x.*

Beweis: Für alle $(t_0, x_0) \in W$ ist W eine offene Umgebung von $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times X$. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$ und eine offene Umgebung $U \subset X$ von x_0, so dass $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \times U$ in W enthalten ist. Also sind für alle $t \in \mathbb{R}$ die Mengen V_t offen.

Sei $t \in \mathbb{R}$ und $x \in V_t$. Wir führen den Beweis für $t > 0$. Für $t < 0$ geht er analog. Wegen der Bedingung (i) liegt (s, x) für alle $s \in [0, t]$ in W. Die kompakte Teilmenge $\{(0, \Phi(s, x)) \mid s \in [0, t]\}$ von W besitzt eine endliche Überdeckung von Mengen der Form $(-\epsilon, \epsilon) \times U$ mit $\epsilon > 0$ und offenen Teilmengen $U \subset X$. Deshalb enthält W für ein $\epsilon > 0$ das kartesische Produkt von $(-\epsilon, \epsilon)$ mit einer offenen Umgebung von $\{\Phi(s, x) \mid s \in [0, t]\}$. Wegen der Bedingung (ii) gilt für alle $s \in [-t, 0]$

$$(r, \Phi(t + s, x)) \in W \quad \text{und} \quad \Phi(r, \Phi(t + s, x)) = \Phi(t + s + r, x) \quad \text{für alle } r \in (-\epsilon, \epsilon).$$

Wegen der Bedingung (ii) folgt aus $(s, \Phi(t, x)) \in W$ und $(r, \Phi(s, \Phi(t, x))) \in W$ auch $(s+r, \Phi(t, x)) \in W$ und $\Phi(r, \Phi(s, \Phi(t, x))) = \Phi(s+r, \Phi(t, x))$. Für alle $s \in [-t, 0]$ folgt dann induktiv $(s, \Phi(t, x)) \in W$ und $\Phi(s, \Phi(t, x)) = \Phi(t+s, x)$. Also liegt $\Phi(t, x)$ in V_{-t} und $\Phi(-t, \cdot)$ ist die Umkehrabbildung von $\Phi(t, \cdot)$. Weil Φ stetig ist, sind dann $\Phi(t, \cdot)$ und $\Phi(-t, \cdot)$ Homöomorphismen. Jetzt folgt (ii) aus dem Beweis von (i). **q.e.d.**

Satz 1.33. *Sei $F : X \to V$ ein lokal lipschitzstetige Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge X eines Banachraumes V. Dann gibt es genau eine offene Teilmenge $W_F \subset \mathbb{R} \times X$ und einen lokalen Fluss $\Phi_F : W_F \to X$, so dass für jedes $x \in X$*

$$\{t \in \mathbb{R} \mid (t, x) \in W_F\} \to X, \qquad t \mapsto \Phi(t, x)$$

die maximale Integeralkurve aus dem Satz 1.24 mit Anfangswert $\Phi(0, x) = x$ ist. Wenn F $r \in \mathbb{N}$ mal stetig differenzierbar ist, dann ist Φ_F ein r mal stetig differenzierbar Fluss mit r mal stetig differenzierbarer partieller Ableitung $\frac{\partial \Phi_F}{\partial t}$.

Umgekehrt ist ein partiell nach t differenzierbarer lokaler Fluss Φ mit lokal lipschitzstetigem $F(x) = \frac{\partial \Phi(0,x)}{\partial t}$ die Einschränkung von Φ_F auf eine offene Menge $W \subset W_F$.

Beweis: Sei $F : X \to V$ ein lokal lipschitzstetiges Vektorfeld auf X. Sei W_F die Vereinigung in $\mathbb{R} \times X$ aller kartesischen Produkte der Definitionsbereiche der eindeutigen maximalen Integralkurven aus Satz 1.24 mit Anfangswert $q(0) = x \in X$ mit den Mengen $\{x\}$. Sei $\Phi_F : W_F \to X$ für jedes $x \in X$ definiert durch die entsprechende Integralkurve. Wenn $(s, x) \in W_F$ und $(t, \Phi_F(s, x)) \in W_F$ liegt, dann stimmen die beiden Integralkurven mit Anfangswert $q(0) = x$ und $q(s) = \Phi_F(s, x)$ wegen der Eindeutigkeit von Integralkurven auf der Schnittmenge der Definitionsbereich überein. Also bilden sie zusammen eine Integralkurve auf einem Intervall das sowohl 0, als auch s und $t+s$ enthält, und $q(0) = x$, $q(s) = \Phi_F(s, x)$ und $q(t+s) = \Phi_F(t, \Phi_F(s, x))$ erfüllt. Also folgt

$$(t+s, x) \in W_F \text{ und } \Phi_F(t+s, x) = \Phi_F(t, \Phi_F(s, x)).$$

Weil im Beweis der Existenz des Anfangswertproblems im Satz von Picard-Lindelöf das Intervall, auf dem die Integralkurve durch $x \in X$ definiert ist, nur von einem $\delta > 0$ mit $\overline{B(x, \delta)} \subset X$ und der Lipschitzkonstanten L und dem Supremum von $\|F\|$ auf dieser kompakten Menge $\overline{B(x, \delta)}$ abhängt, enthält W_F für alle $x \in X$ eine offene Umgebung von $(0, x) \in \mathbb{R} \times X$. Dann enthält W_F für alle $(s, x) \in W_F$ mit einer offenen Umgebung um $(0, \Phi_F(s, x))$ auch eine offene Umgebung von (s, x). Also ist W_F offen.

Wenn $F : X \to V$ r mal stetig differenzierbar ist, dann ist wegen Satz 1.23 auch Φ_F r mal stetig differenzierbar. Weil in diesem Fall f nicht von t abhängt, lassen sich die ersten $r+1$ Ableitungen $\dot{q}(t), \ldots, q^{(r+1)}(t)$ der Lösung durch die ersten r Ableitungen der Funktion f nach q bei $q(t)$ ausdrücken. Deshalb sind die entsprechenden Lösungen des Anfangswertproblems sogar $(r+1)$ mal stetig partiell nach t differenzierbar.

Sei jetzt $\Phi : W \to X$ ein partiell nach t stetig differenzierbarer Fluss auf X, dessen partielle Ableitung nach t lokal lipschitzstetig ist. Wegen der Bedingung (ii) gilt

$$\frac{\partial\Phi(t+s,x)}{\partial t} = \frac{\partial\Phi(t+s,x)}{\partial s} = \frac{\partial\Phi(s,\Phi(t,x))}{\partial s} \text{ für alle } (t,x) \in W \text{ und } (s,\Phi(t,x)) \in W.$$

Dann ist die partielle Ableitung $\frac{\partial\Phi(s,\Phi(t,x))}{\partial s}$ bei $s = 0$ gleich der partiellen Ableitung $\frac{\partial\Phi(t,x)}{\partial t}$. Also ist $t \mapsto \Phi(t,x)$ die eindeutige Integralkurve durch x des lokal lipschitzstetigen Vektorfeldes $F : X \to V$ mit $F(x) = \frac{\partial\Phi(0,x)}{\partial t}$. Aus der Eindeutigkeit von Integralkurven folgt, dass für jedes $x \in X$ die Bahn $t \mapsto \Phi(t,x)$ eine Einschränkung der maximalen Integralkurve $t \mapsto \Phi_F(t,x)$ des Vektorfeldes F durch x ist. Also ist W eine offene Teilmenge von W_F und Φ die Einschränkung von Φ_F auf W. **q.e.d.**

Aus Lemma 1.32 und Satz 1.33 folgt

Korollar 1.34. *Sei $F : X \to V$ ein lokal lipschitzstetiges Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge X eines Banachraumes V. Dann ist für alle $t \in \mathbb{R}$ die Menge $V_t = \{x \in X | (t,x) \in W_F\}$ eine offene Teilmenge von X und die Abbildung $x \mapsto \Phi_F(t,x)$ ist ein Homöomorphismus von V_t nach V_{-t} mit Umkehrabbildung $x \mapsto \Phi_F(-t,x)$. Wenn F r mal stetig differenzierbar ist, dann sind diese Abbildungen auch r mal stetig differenzierbar. Außerdem gibt es für alle $x \in X$ ein $\epsilon > 0$, so dass für alle $t \in (-\epsilon,\epsilon)$ die Mengen V_t und V_{-t} offene Umgebungen von x sind.* **q.e.d.**

Definition 1.35. **(i)** *Ein lokaler Fluss $\Phi : W \to X$ mit $W = \mathbb{R} \times X$ heißt global.*

(ii) *Ein lokal lipschitzstetiges Vektorfeld $F : X \to V$ auf einer offene Teilmenge eines Banachraumes V heißt vollständig, wenn der entsprechende Fluss Φ_F global ist.*

Offenbar definieren stetige globale Flüsse und vollständige lokal lipschitzstetige Vektorfelder zeitkontinuierliche dynamische Systeme. Allerdings definieren nicht alle stetigen Vektorfelder, deren Integralkurven alle auf ganz $\mathbb{R}$ definiert sind, auch ein zeitkontinuierliches dynamisches System mit $G = \mathbb{R}$

Beispiel 1.36. *Sei F folgendes stetige Vektorfeld auf $\mathbb{R}$:*

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto F(x) = \begin{cases} \frac{2x}{|x|}\sqrt{|x|} & \textit{für} \quad x \neq 0 \\ 0 & \textit{für} \quad x = 0. \end{cases}$$

Offenbar ist F auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ lokal lipschitzstetig. Die Integralkurven durch $x > 0$ sind für $t \in [-\sqrt{|x|}, \infty)$ gegeben durch $\Phi(t,x) = (\sqrt{|x|} + t)^2$ und für $t > -\sqrt{|x|}$ auch eindeutig. Die Integralkurven durch $x < 0$ sind für $t \in [-\sqrt{|x|}, \infty)$ gegeben durch $\Phi(t,x) = -(\sqrt{|x|} + t)^2$ und für $t > -\sqrt{|x|}$ eindeutig. Für $t > 0$ bildet $\Phi(t,\cdot)$ die Menge

$\mathbb{R} \setminus \{0\}$ *also auf die Menge* $(-\infty, -t^2) \cup (t^2, \infty)$ *ab. Wegen den Bedingungen (i) und (ii) kann* $\Phi(-t, \cdot)$ *dann alle Punkte in* $[-t^2, t^2]$ *nur auf* 0 *abbilden. Dann müsste* $\Phi(t, 0)$ *gleich allen Punkten in* $[-t^2, t^2]$ *sein. Also gibt es kein dynamisches System zu* F.

Satz 1.37. *Auf einem kompakten metrischen Raum* X *sind alle lokalen Flüsse global.*

Beweis: Wegen Lemma 1.32 gibt es für jedes $x \in X$ ein $\epsilon_x > 0$ und eine offene Umgebung U_x von $x \in X$, so dass der Definitionsbereich W die Menge $(-\epsilon_x, \epsilon_x) \times U_x$ enthält. Die Überdeckung $(U_x)_{x\in X}$ von X, hat eine endliche Teilüberdeckung. Sei ϵ das Minimum der entsprechenden ϵ_x. Dann folgt aus der Bedingung (i) des Flusses, dass für jedes $(t, x) \in W$ die Menge W auch $\{(t + s, x) \in \mathbb{R} \times X | s \in (-\epsilon, \epsilon)\}$ enthält. Aus $\{(0, x) | x \in X\} \subset W$ folgt induktiv für alle $l \in \mathbb{N}$, dass W auch die Menge

$$(-(l + 1)\epsilon, (l + 1)\epsilon) \times X = \{(t + s, x) \in \mathbb{R} \times X \mid (t, x) \in (-l\epsilon, l\epsilon) \times X, s \in (-\epsilon, \epsilon)\}$$

enthält. Also ist W gleich $\mathbb{R} \times X$. **q.e.d.**

Wir haben in dem Beweis nur benutzt, dass es ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass der Definitionsbereich W des Flusses Φ von F die Menge $(-\epsilon, \epsilon) \times X$ enthält, bzw. die Integralkurven von F mit allen Anfangswerten $x(0) \in X$ auf $(-\epsilon, \epsilon)$ definiert sind.

Korollar 1.38. **(i)** *Ein lokaler Fluss auf einem metrischen Raum* X *ist genau global, wenn* W *für ein* $\epsilon > 0$ *die Menge* $(-\epsilon, \epsilon) \times X$ *enthält.*

(ii) *Der Fluss eines auf einer offenen Menge* X *eines Banachraumes lokal lipschitzstetigen Vektorfeldes* F *ist genau dann global, wenn für ein* $\epsilon > 0$ *die Integralkurven von* F *mit beliebigen Anfangswerten auf* $(-\epsilon, \epsilon)$ *definiert sind.*

(iii) *Der Fluss eines auf einer offenen Teilmenge eines Banachraumes lokal lipschitzstetigen Vektorfeldes, das außerhalb einer kompakten Menge Null ist, ist global.*

(iv) *Auf einem Banachraum definieren beschränkte und lokal lipschitzstetige Vektorfelder globale Flüsse.*

(v) *Auf einem Banachraum definieren lipschitzstetige Vektorfelder globale Flüsse.*

Beweis: (i)-(ii) haben wir schon gezeigt und (iv) folgt aus Korollar 1.29. Weil es für jedes $x \in X$ ein $\epsilon > 0$ und eine Umgebung U von x gibt, so dass der entsprechende lokale Fluss auf $(-\epsilon, \epsilon) \times U$ definiert ist, und die Integralkurven durch Nullstellen auf ganz $\mathbb{R}$ konstant sind, erfüllt ein Vektorfeld, das (iii) erfüllt, auch (ii).

Sei $F : V \to V$ ein lipschitzstetiges Vektorfeld auf einem Banachraum V mit Lipschitzkonstante L. Im Satz von Picard-Lindelöff haben wir gezeigt, dass die Integralkurve durch $x \in X$ in dem Ball $B(x, \delta)$ mit $\delta > 0$ auf $(-\epsilon, \epsilon)$ mit

$$\epsilon < \min\left\{\delta, \frac{\delta}{\|F(x)\| + L\delta}\right\}$$

definiert ist. Mit $\delta = \|F(x)\| + 1$ wählen wir $\epsilon = \frac{1}{1+L}$. Also folgt (v) aus (ii). **q.e.d.**

Korollar 1.39. (i) *Für einen globalen stetigen Fluss auf dem metrischen Raum X ist*

$$\Phi(\cdot,\cdot): \quad \mathbb{R} \to C(X,X), \quad t \mapsto \Phi(t,\cdot)$$

ein Homomorphismus von $\mathbb{R}$ in die Gruppe der Homöomorphismen von X.

Umgekehrt definiert jeder Gruppenhomomorphismen von $\mathbb{R}$ in die Gruppe der bijektiven Abbildungen von X einen globalen Fluss.

(ii) *Sei $F : X \to V$ ein vollständiges lokal lipschitzstetiges Vektorfeld auf einer offene Menge X eines Banachraumes V. Dann definiert der entsprechende Fluss $\Phi_F : \mathbb{R} \times X \to X$ einen Gruppenhomomorphismus von $\mathbb{R}$ in die Gruppe der Homöomorphismen von X.*

Beweis: (i) Offenbar ist $W = \mathbb{R} \times X$ dazu äquivalent, dass für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt $V_t = X$. Die Bedingung (ii) besagt genau, dass $t \mapsto \Phi(t,\cdot)$ ein Gruppenhomomorphismus ist. Also folgt die Aussage aus dem Lemma 1.32.

(ii) folgt aus (i) und und Satz 1.33. **q.e.d.**

Übungsaufgabe 1.40. *Sei $F : X \to V$ ein lokal lipschitzstetiges Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge X eines Banachraumes und $f : X \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion.*

(i) *Zeige, dass für $C < f < C^{-1}$ mit $0 < C < 1$ alle maximalen Integralkurven von fF die Verkettung von den entsprechenden Integralkurven von F mit bijektiven Abbildungen von den entsprechenden maximalen Intervallen aufeinander sind.*

(ii) *Zeige dass fF lokal lipschitzstetig ist, wenn f lokal lipschitzstetig ist.*

(iii) *Sei $f > C > 0$ lokal lipschitzstetig und F und fF vollständig. Zeige, dass dann die beiden entsprechenden dynamischen Systeme die gleichen Trajektorien (als Mengen) haben, aber als dynamische Systeme im Allgemeinen verschieden sind.*

(iv) *Zeige, dass im Fall $X = V$ das Vektorfeld $\frac{F}{1+\|F\|}$ vollständig ist, und die Mengen der Integralkurven mit denen von F übereinstimmen.*

Hinweis zu (i): Nimm an, dass sich die Integralkurven von fF schreiben lassen als die Verkettung einer reellen Funktion mit den Integralkurven von F und leite eine Differentialgleichung für diese reelle Funktion her. Diese Differentialgleichung läßt sich dann einfach lösen.