1.6 Elementare Lösungsverfahren

In diesem Abschnitt wollen wir uns auf gewöhnliche Differentialgleichungen beschränken, in denen die gesuchte Funktion eine reelle Funktion ist. Die Differentialgleichungen erster Ordnung haben also die Form

$$\dot{q}(t) = f(t, q(t)).$$

Wenn es uns gelingt, die Funktion f als einen Quotienten zu schreiben

$$f(t, q) = \frac{g(t)}{h(q)}$$

dann können wir die Differentialgleichung umformen zu

$$\dot{q}(t)h(q(t)) = g(t).$$

Wenn H eine Stammfunktion von h ist und G eine Stammfunktion von G, dann gilt

$$\frac{d}{dt}H(q(t)) = \frac{d}{dt}G(t).$$

Also folgt dann für die Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{q}(t) = \frac{g(t)}{h(q(t))} \text{ mit } q(t_0) = q_0$$

$$H(q(t)) - H(q_0) = G(t) - G(t_0).$$

Wenn wir jetzt noch annehmen, dass H eine Umkehrfunktion besitzt, was natürlich auf allen Intervallen gilt, auf denen h positiv bzw. negativ ist, dann erhalten wir also als Lösung des Anfangswertproblems

$$q(t) = H^{-1}(G(t) - G(t_0) + H(q_0)).$$

Satz 1.41. *(Trennung der Variablen) Seien g und h stetige Funktionen auf einem offenen Intervall I und h sei entweder positiv oder negativ. Dann sind sowohl g als auch h auf allen kompakten Teilintervallen von I Riemann-integrabel. Seien G und H Stammfunktionen von g bzw. h. Dann ist H entweder streng monoton wachsend oder streng monoton fallend, besitzt also eine Umkehrabbildung $H^{-1} : I' \to I$ von einem offenen Intervall I' auf I. Dann ist die eindeutige Lösung der Anfangswertprobleme*

$$\dot{q}(t) = \frac{g(t)}{h(q(t))} \textit{ mit } q(t_0) = q_0$$

gegeben durch $$q(t) = H^{-1}(G(t) - G(t_0) + H(q_0)).$$

Sie ist auf dem Intervall definiert, auf dem $G(t) - G(t_0) + H(q_0)$ in I' liegt. **q.e.d.**

Wenn es uns gelingt eine Funktion $F(t,q)$ zu finden, so dass gilt

$$f(t,q) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial t}(t,q)}{\frac{\partial F}{\partial q}(t,q)},$$

dann können wir die Differentialgleichung umformen zu

$$\frac{d}{dt}F(t,q(t)) = \frac{\partial F(t,q(t))}{\partial t} + \frac{dq(t)}{dt}\frac{\partial F(t,q(t))}{\partial q} = 0.$$

Also gilt dann für die Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{q}(t)\frac{\partial F(t,q(t))}{\partial q} + \frac{\partial F(t,q(t))}{\partial t} = 0 \quad \text{mit} \quad q(t_0) = q_0$$

$$F(t,q(t)) = F(t_0,q_0).$$

Diese Gleichung beschreibt implizit die Lösung des Anfangswertproblems.

Satz 1.42. *(Exakte Differentialgleichungen) Sei $(t,q) \mapsto F(t,q)$ differenzierbar. Dann sind alle Lösungen des Anfangswertproblems*

$$\dot{q}(t)\frac{\partial F(t,q(t))}{\partial q} + \frac{\partial F(t,q(t))}{\partial t} = 0 \quad \textit{mit} \quad q(t_0) = q_0$$

implizit gegeben durch $\qquad F(t,q(t)) = F(t_0,q_0).$ **q.e.d.**

Für zwei Funktionen $g(t,q)$ und $h(t,q)$ mit $\quad f(t,q) = -\dfrac{g(t,q)}{h(t,q)},\quad$ gibt es nicht immer eine Funktion $F(t,q)$ mit $\quad \dfrac{\partial F(t,q)}{\partial t} = g(t,q) \quad$ und $\quad \dfrac{\partial F(t,q)}{\partial q} = h(t,q).$

Lemma 1.43. *(Stammfunktion) Seien g und h zwei stetig differenzierbare Funktionen auf einem konvexen offenen Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Dann gibt es auf Ω genau dann eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $F(t,q)$ mit*

$$\frac{\partial F(t,q)}{\partial t} = g(t,q) \ \textit{und}\ \frac{\partial F(t,q)}{\partial q} = h(t,q) \ \textit{wenn gilt}\ \frac{\partial g(t,q)}{\partial q} = \frac{\partial h(t,q)}{\partial t}.$$

Beweis: Sei $(t_0,q_0) \in \Omega$ beliebig. Dann definieren wir die Funktion

$$F(t,q) = (t-t_0)\int_0^1 g(t_s,q_s)ds + (q-q_0)\int_0^1 h(t_s,q_s)ds,$$

mit $t_s = t_0 + s(t - t_0)$ und $q_s = q_0 + s(q - q_0)$. Weil die Funktionen g und h differenzierbar sind, sind sie stetig und damit auch integrierbar. Die Ableitungen von F sind dann

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F(t,q)}{\partial t} &= \int_0^1 g(t_s,q_s)ds + (t-t_0)\int_0^1 \frac{\partial g(t_s,q_s)}{\partial t} sds + (q-q_0)\int_0^1 \frac{\partial h(t_s,q_s)}{\partial t} sds \\
&= \int_0^1 g(t_s,q_s)ds + \int_0^1 \frac{dg(t_s,q_s)}{ds} sds = g(t,q) \\
\frac{\partial F(t,q)}{\partial q} &= \int_0^1 h(t_s,q_s)ds + (q-q_0)\int_0^1 \frac{\partial h(t_s,q_s)}{\partial q} sds + (t-t_0)\int_0^1 \frac{\partial g(t_s,q_s)}{\partial q} sds \\
&= \int_0^1 h(t_s,q_s)ds + \int_0^1 \frac{dh(t_s,q_s)}{ds} sds = h(t,q)
\end{aligned}$$

Wenn umgekehrt $\frac{\partial F(t,q)}{\partial t} = g(t,q)$ und $\frac{\partial F(t,q)}{\partial q} = h(t,q)$ gilt, dann folgt aus dem Satz von Schwarz

$$\frac{\partial g(t,q)}{\partial q} = \frac{\partial^2 F(t,q)}{\partial q \partial t} = \frac{\partial^2 F(t,q)}{\partial t \partial q} = \frac{\partial h(t,q)}{\partial t}.$$

q.e.d.

Wir können diese Aussage auf Vereinigungen von konvexen Gebieten verallgemeinern, solange nur die Vorschrift, gemäß der wir F fortsetzen, eindeutig ist. Das gilt für alle einfach zusammenhängenden Gebiete Ω, d.h. solche Gebiete, die für jede stetige Abbildung $p : S^1 \to \Omega$ eine Homotopie zu einer konstanten Abbildung besitzen, d.h. also, es gibt zu jedem solchen p eine stetige Abbildung $[0,1] \times S^1 \to \Omega$, die auf $\{0\} \times S^1$ gerade gleich p und die auf $\{1\} \times S^1$ konstant ist. Anschaulich bedeutet das, dass jeder geschlossene Weg in Ω zu einem Punkt zusammengezogen werden kann.

Es gibt auch Fälle, in denen die Differentialgleichung

$$\dot{q}(t)h(t,q(t)) + g(t,q(t)) = 0$$

erst mit einer Funktion erweitert werden muss, bevor sie exakt ist.

Beispiel 1.44. *Die Differentialgleichung* $$2t\dot{q} + q(t) = 0$$ *ist nicht exakt, weil gilt* $$\frac{\partial q}{\partial q} = 1 \neq 2 = \frac{\partial 2t}{\partial t}.$$ *die Differentialgleichung* $$2tq(t)\dot{q}(t) + q^2(t) = 0$$ *ist aber exakt, weil gilt* $$\frac{\partial q^2}{\partial q} = 2q = \frac{\partial}{\partial t}2qt.$$

Korollar 1.45. *(Eulersche Multiplikator) Wenn eine Differentialgleichung durch Multiplikation mit einer Funktion auf die Form gebracht werden kann*

$$\dot{q}(t)h(t,q(t)) + g(t,q(t)) = 0 \quad \text{mit} \quad \frac{\partial h(t,q)}{\partial t} = \frac{\partial g(t,q)}{\partial q},$$

dann existiert auf einfach zusammenhängenden Gebieten $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ eine Funktion F, so dass die Differentialgleichung exakt ist

$$\frac{d}{dt}F(t,q(t)) = \dot{q}(t)\frac{\partial F(t,q(t))}{\partial q} + \frac{\partial F(t,q(t))}{\partial t} = 0.$$

Dann gilt für die Lösungen des entsprechenden Anfangswertproblems mit $q(t_0) = q_0$

$$F(t,q(t)) = F(t_0,q_0).$$

q.e.d.

Um für eine Differentialgleichung von der Form

$$\dot{q}(t)h(t,q(t)) + g(t,q(t)) = 0$$

einen Eulerschen Multiplikator $M(t,q(t))$ zu finden, müssen wir die Gleichung

$$\frac{\partial M(t,q)}{\partial t}h(t,q) + M(t,q)\frac{\partial h(t,q)}{\partial t} = \frac{\partial M(t,q)}{\partial q}g(t,q) + M(t,q)\frac{\partial g(t,q)}{\partial q}$$

lösen. Das ist eine partielle Differentialgleichung, die im Allgemeinen nicht leichter zu lösen ist als die ursprüngliche Differentialgleichung. In einigen Fällen können wir Lösungen erraten oder einfache Lösungen berechnen, die nur von t bzw. u abhängen.

Zuletzt bemerken wir, dass einige Differentialgleichungen durch eine Substitution in eine der Differentialgleichungen verwandelt werden können, die wir lösen können.

Beispiel 1.46. **(i)**

$$\dot{q}(t) = f(at + bq(t) + c) \text{ mit } a,b,c \in \mathbb{R}.$$

Für $b = 0$ können wir die Differentialgleichung direkt integrieren. Für $b \neq 0$ führt die Substitution $p(t) = at + bq(t) + c$ auf die Differentialgleichung $\dot{p}(t) = a + bf(p(t))$ oder auch $\frac{\dot{p}(t)}{a+bf(p(t))} = 1$. Diese Differentialgleichung können wir mit der Methode der Trennung der Variablen lösen: Sei F eine Stammfunktion von $x \mapsto \frac{1}{a+bf(x)}$. Dann erfüllen die Lösungen des Anfangswertproblems

$$\dot{q}(t) = f(at + bq(t) + c) \text{ mit } \qquad q(t_0) = q_0$$

die Gleichung

$$F(at + bq(t) + c) - F(at_0 + bq_0 + c) = t - t_0.$$

(ii) $\dot{q} = f\left(\frac{q(t)}{t}\right)$ *homogene Differentialgleichung. Die Substitution* $p(t) = \frac{q(t)}{t}$ *führt zu*

$$\dot{p}(t) = \frac{f(p(t)) - p(t)}{t}.$$

Diese Differentialgleichung können wir durch Trennung der Variablen lösen:

$$\frac{\dot{p}(t)}{f(p(t)) - p(t)} = \frac{1}{t}.$$

(iii)

$$\dot{q} = f\left(\frac{at + bq(t) + c}{\alpha t + \beta q(t) + \gamma}\right) \quad \text{mit } a, b, c, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Wenn die Determinante $\begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = 0$ *ist, dann ist entweder* $\alpha t + \beta q(t)$ *ein Vielfaches von* $at + bq(t)$ *oder umgekehrt. Deshalb haben wir dann ein Beispiel der Art in (i). Wenn diese Determinante* $\neq 0$ *ist, dann hat das lineare Gleichungssystem*

$$at + bu + c = 0 \qquad\qquad \alpha t + \beta u + \gamma = 0$$

genau eine Lösung (t_0, q_0). *Die Differentialgleichung können wir umformen zu*

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(q(t + t_0) - q_0) &= f\left(\frac{a(t + t_0) + bq(t + t_0) + c - (at_0 + bq_0 + c)}{\alpha(t + t_0) + \beta q(t + t_0) + \gamma - (\alpha t_0 + \beta q_0 + \gamma)}\right) \\ &= f\left(\frac{a + b\frac{q(t+t_0)-q_0}{t}}{\alpha + \beta\frac{q(t+t_0)-q_0}{t}}\right).\end{aligned}$$

Also erhalten wir ein Beispiel von der Form (ii).

(iv) *Bernoullische Differentialgleichung:*

$$\dot{q}(t) + g(t)q(t) + h(t)q^{\alpha}(t) = 0 \quad \alpha \neq 1.$$

Die Substitution $p(t) = q^{1-\alpha}(t)$ *führt zu der Differentialgleichung*

$$\dot{p}(t) = (1 - \alpha)\dot{q}(t)q^{-\alpha}(t) = (\alpha - 1)g(t)p(t) + (\alpha - 1)h(t).$$

Dies ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung, die wir im Abschnitt 1.7 betrachten werden.

1.7 Lineare Differentialgleichungen

Definition 1.47. *Eine Differentialgleichung von der Form*

$$\dot{u}(t) = A(t)u(t) + b(t)$$

heißt lineare gewöhnliche Differentialgleichung auf einem (offenen) Intervall $I \subset \mathbb{R}$. Hierbei ist u eine gesuchte Funktion von I mit Werten in einem Vektorraum V (z.B. $\mathbb{K}^n$) und A eine Abbildung von I in die linearen Abbildungen von V auf V (oder im Falle eines normierten Vektorraumes $\mathcal{L}(V)$, die linearen stetigen Abbildungen von V nach V). Im Fall von $V = \mathbb{K}^n$ können wir $\mathcal{L}(V)$ mit den $n \times n$ Matrizen $\mathbb{K}^{n\times n}$ identifizieren und V mit den Spaltenvektoren in $\mathbb{K}^n$. Dann ist $A(t)u(t)$ das Matrix-Produkt der $n\times n$-Matrix $A(t)$ mit dem Spaltenvektor $u(t)$, also ein Spaltenvektor in $\mathbb{K}^n$. Schließlich ist b eine Abbildung von I nach V. Wenn $b(t) = 0$ ist, dann heißt die Differentialgleichung homogen, andernfalls inhomogen. Wenn A nicht von t abhängt, also als Abbildung konstant ist, heißt die Differentialgleichung autonom, andernfalls nicht autonom.

Satz 1.48. *Die Menge aller Lösungen einer linearen homogenen Differentialgleichung bildet einen Vektorraum über $\mathbb{K}$. Wenn also u und $\tilde{u}$ Lösungen sind, dann sind auch $u+\tilde{u}$ und λu für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ Lösungen der linearen homogenen Differentialgleichung. Die Menge aller Lösungen einer inhomogenen linearen Differentialgleichung bildet einen affinen Raum. Eine allgemeine Lösung ist die Summe einer speziellen Lösung und einer allgemeinen Lösung der entsprechenden homogenen linearen Differentialgleichung.*

Beweis: Seien u und $\tilde{u}$ zwei Lösungen der Differentialgleichung $\dot{u}(t) = A(t)u(t) + b(t)$ bzw. $\dot{\tilde{u}}(t) = A(t)\tilde{u}(t) + b(t)$, dann erfüllt $u - \tilde{u}$ die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}(u(t) - \tilde{u}(t)) = A(t)(u(t)) - \tilde{u}(t)),$$

also die entsprechende homogene Differentialgleichung. Genauso gilt auch für alle $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\frac{d}{dt}\lambda(u(t) - \tilde{u}(t)) = A(t)\lambda(u(t)) - \tilde{u}(t)).$$

Deshalb ist der Raum aller Lösungen eines homogenen gewöhnlichen Differentialgleichungssystems ein Vektorraum und die allgemeine Lösung eines inhomogenen gewöhnlichen Differentialgleichungssystems ist die Summe einer speziellen Lösung und der allgemeinen Lösung des entsprechenden homogenen Systems. **q.e.d.**

Satz 1.49. *(Existenz und Eindeutigkeit des linearen Anfangswertproblems). Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes (nicht notwendig beschränktes) Intervall, $A : I \to \mathcal{L}(V)$ eine stetige Abbildung von I in die beschränkten stetigen linearen Abbildungen des Banachraums V und $b : I \to V$ stetig. Dann besitzt für jedes $t_0 \in I$ und $u_0 \in V$ das Anfangswertproblem $\dot{u}(t) = A(t) \cdot u(t) + b(t)$ mit $u(t_0) = u_0$ genau eine differenzierbare Lösung $u : I \to V$.*

Bemerkung 1.50. *Jede Lösung der Differentialgleichung muss differenzierbar sein und damit auch stetig. Dann muss sie sogar stetig differenzierbar sein.*

Beweis: Wir passen den Beweis des Satzes von Picard-Lindelöff an die augenblickliche Situation an. Wir zeigen die Aussage zunächst auf einem kompaktem Teilintervall $J \subset I$. Sei $\|A\|_\infty$ das Maxmimum der stetigen Funktionen $t \mapsto \|A(t)\|$ auf J. Die Abbildung

$$F : C(J', V) \to C(J', V), \quad u \mapsto F(u) \quad \text{mit} \quad F(u)(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} (A(s)u(s) + b(s))ds$$

ist für jedes kompakte Teilintervall $J' \ni t_0$ von J lipschitzstetig:

$$\|F(u)(t) - F(\tilde{u})(t)\| \leq \int_{t_0}^{y} \|A(s)(u(s) - \tilde{u}(s))ds \leq \sup |t - t_0| \|A\|_\infty \|u - \tilde{u}\|_\infty,$$

mit dem Produkt der Intervallänge $|J'|$ von J' mit $\|A\|_\infty$ als Lipschitzkonstante. Also können wir jedes kompakte Intervall J durch endlich viele $J = J_1 \cup \ldots \cup J_L$ überdecken, auf denen F mit geeigneten Anfangswerten $(t_l, u_l) \in J_l \times V$ jeweils die Vorraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt. Wegen der Eindeutigkeit der Lösungen der entsprechenden Anfangswertprobleme können wir jedes Anfangswertproblem mit $(t_0, u_0) \in J \times V$ eindeutig auf ganz J lösen. Wegen dieser Eindeutigkeit können wir alle diese Lösungen zu eine globalen Lösung auf I zusammensetzen. **q.e.d.**

Aus den beiden vorangehenden Sätzen folgt sofort:

Korollar 1.51. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, V ein Banachraum, und $A : I \to \mathcal{L}(V)$ und $b : I \to V$ stetige Abbildungen. Dann induziert für jedes $t_0 \in I$ die Abbildung $C(I, V) \to V, u \mapsto u(t_0)$ einen linearen Isomorphismus von der Menge aller Lösungen der Differentialgleichung $\dot{u}(t) = A(t)u(t)$ auf V. Für jede Lösung $\tilde{u}$ der inhomogenen Differentialgleichung $\dot{u}(t) = A(t)u(t) + b(t)$ induziert die Abbildung $C(I, V) \to V, \quad u \mapsto u(t_0) - \tilde{u}(t_0)$ einen affinen Isomorphismus von der Menge aller Lösungen der inhomogenen Differentialgleichung nach V.* **q.e.d.**

Insbesondere haben die Lösungsräume der gewöhnlichen linearen Differentialgleichungssysteme erster Ordnung dieselbe Dimension wie der Vektorraum, in dem die Werte der gesuchten Funktion liegen. Für reelle gewöhnliche lineare Differentialgleichungen n–ter Ordnung stimmt die Dimension des Lösungsraumes mit der Ordnung überein, wie wir das erwartet haben. Wir wollen uns jetzt der Frage zuwenden, wie wir diese Lösungen ausrechnen können.

Beispiel 1.52. *Wir stellen uns eine Insel vor, die von Störchen, Fröschen und Fliegen bewohnt wird. Dabei stellen wir uns die Nahrungskette so vor, dass die Störche $S(t)$ sich sowohl von den Fröschen als auch von den Fliegen ernähren, die Frösche $F(t)$ nur von den Fliegen und die Fliegen $f(t)$ von dem Aas der Frösche und Störche. Wir nehmen an, dass das Tierwachstum nur von der vorhandenen Nahrungsmenge gesteuert wird:*

$$\begin{aligned} \dot{S}(t) &= F(t) + f(t) \quad -2S(t) \\ \dot{F}(t) &= -S(t) + f(t) \\ \dot{f}(t) &= S(t) + F(t) \quad -2f(t) \end{aligned}$$

Beispiel 1.53. *Seien $A : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$, $b : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ stetig. Dann hat das Anfangswertproblem*

$$\dot{u}(t) = A(t)u(t) + b(t), \quad u(t_0) = u_0$$

eine eindeutige Lösung, die wir jetzt bestimmen wollen. Dazu betrachten wir zunächst das entsprechende homogene Anfangswertproblem mit $b = 0$. Wenn u eine Nullstelle bei einem $t_1 \in \mathbb{R}$ hat, dann stimmt u mit der eindeutigen Lösung $u = 0$ des entsprechenden homogenen Anfangswertproblems mit $u(t_1) = 0$ überein. Andernfalls hat u keine Nullstelle und wir können die Differentialgleichung umformen zu

$$\frac{\dot{u}(t)}{u(t)} = \frac{d}{dt}\ln(u(t)) = A(t) \quad \textit{mit} \quad u(t_0) = u_0.$$

Wir erhalten

$$\ln(u(t)) = \int_{t_0}^{t} A(s)ds + \ln(u_0) \quad \textit{bzw.} \quad u(t) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} A(s)ds\right) u_0.$$

Für alle $s \in \mathbb{R}$ hat folgendes Anfangswertproblem also die eindeutige Lösung

$$\begin{aligned} &\dot{u}_s(t) = u_s(t)A(t) \quad \textit{mit} \quad u_s(s) = b(s) \\ &u_s(t) = \exp\left(\int_{s}^{t} A(r)dr\right) b(s) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} A(r)dr\right) \exp\left(-\int_{t_0}^{s} A(r)dr\right) b(s). \end{aligned}$$

$$\textit{Dann folgt} \quad \frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t} u_s(t)ds = u_t(t) + \int_{t_0}^{t} A(t)u_s(t)ds = b(t) + A(t)\int_{t_0}^{t} u_s(t)ds.$$

Also löst $\int_{t_0}^{t} u_s(t)ds$ das Anfangswertproblem

$$\dot{u}(t) = A(t)u(t) + b(t) \ \textit{mit} \qquad u(t_0) = 0.$$