Martin Schmidt
Sebastian Klein

Analysis III
6. Übung

9. Oktober 2015

(abzugeben in der Vorlesung am 16. Oktober 2015)

18. Über Schnitte von Vektorbündeln.

Es sei (E, B, π) ein differenzierbares $\mathbb{K}$-Vektorraumbündel, $f, f_1, f_2 : B \to E$ seien glatte Schnitte von (E, B, π), und $g : B \to \mathbb{K}$ sei eine glatte Funktion. Zeige:

(a) Der *Nullschnitt* $O : B \to E,\ b \mapsto 0 \in \pi^{-1}[\{b\}]$ ist ein glatter Schnitt. *(2 Punkte)*

(b) $f_1 + f_2$ und $g \cdot f$ sind glatte Schnitte von (E, B, π). *(2 Punkte)*

(c) Das Bild $f[B]$ ist eine Untermannigfaltigkeit von E. *(4 Punkte)*

19. Die Tangentialbündel der Sphären der Dimension ≤ 3.

In dieser Aufgabe untersuchen wir das Tangentialbündel der n-dimensionale Sphäre

$$\mathbb{S}^n := \{ (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \,|\, x_1^2 + \ldots + x_{n+1}^2 = 1 \}$$

(siehe auch Aufgabe 6).

(a) Zeige, dass $\mathbb{S}^n$ eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n+1}$ ist, und dass für $x = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n$ gilt:

$$T_x\mathbb{S}^n = \{ v \in \mathbb{R}^{n+1} \,|\, \langle v, x \rangle = 0 \} .$$ *(2 Punkte)*

(b) Finde einen nullstellenfreien Schnitt des Tangentialbündels $T\mathbb{S}^1$, und folgere, dass das Vektorraumbündel $T\mathbb{S}^1$ trivial ist. *(4 Punkte)*

(c) Zeige, dass das Vektorraumbündel $T\mathbb{S}^3$ trivial ist. *(6 Punkte)*

[Tipp. Man benutze Lemma 1.54, indem man zeigt, dass für $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{S}^3$ durch $\big(f_1(x), f_2(x), f_3(x)\big)$ mit

$$f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) := (-x_2, x_1, x_4, -x_3) , \quad f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) := (-x_3, -x_4, x_1, x_2)$$
$$\text{und} \quad f_3(x_1, x_2, x_3, x_4) := (-x_4, x_3, -x_2, x_1)$$

eine Orthonormalbasis von $T_x\mathbb{S}^3$ gegeben wird.

Bemerkung. Identifiziert man $\mathbb{S}^3$ mit der Einheitssphäre im Raum $\mathbb{H}$ der *Quaternionen*, so entspricht die Anwendung von f_1, f_2 bzw. f_3 mit der Multiplikation mit der rein-imaginären Einheitsquaternione i, j bzw. $k = ij$.]

(d) Sei $x_N := (0, 0, 1) \in \mathbb{S}^2$ und $x_S := (0, 0, -1) \in \mathbb{S}^2$. Mithilfe der stereographischen Projektion (siehe Aufgabe 6(a)) bestimme man lokale Trivialisierungen von $T\mathbb{S}^2$ über $U_N := \mathbb{S}^2 \setminus \{x_N\}$ und über $U_S := \mathbb{S}^2 \setminus \{x_S\}$, und berechne die Übergangsfunktion $\phi_{U_N,U_S} : \mathbb{S}^2 \setminus \{x_N, x_S\} \to \mathrm{GL}(\mathbb{R}^2)$. *(8 Punkte)*

Bemerkung. Man kann zeigen, dass das Vektorraumbündel $T\mathbb{S}^2$ nicht trivial ist.

20. Über triviale und nicht-triviale Vektorbündel.

(a) **Das Tangentialbündel eines Vektorraums ist trivial.** Es sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum. Zeige, dass das Tangentialbündel TV trivial ist, und zwar mit der Faser V. *(4 Punkte)*

(b) **Geradenbündel über $\mathbb{R}$ sind trivial.** Beweise: Jedes *Geradenbündel*, d.h. Vektorraumbündel der Faserdimension 1, über einem offenen Intervall $(a,b) \subset \mathbb{R}$ ist trivial. *(10 Punkte)*

[Tipp. Es sei $(E,(a,b),\pi)$ ein Geradenbündel über (a,b) und $t_0 \in (a,b)$ fest. Man zeige zunächst, dass es ein $\varepsilon > 0$ mit $(t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon) \subset (a,b)$ gibt, so dass es einen nullstellenfreien Schnitt f_0 von E auf $(t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon)$ gibt. Dann betrachte man

$$J := \left\{ t \in (a,b) \;\middle|\; \begin{array}{c}\text{Es existiert eine Fortsetzung von } f_0 \text{ zu einem nullstellen-} \\ \text{freien Schnitt von } E \text{ auf } (t,t_0+\varepsilon) \text{ bzw. auf } (t_0-\varepsilon,t)\end{array} \right\},$$

wobei in der Definition von J das Intervall $(t,t_0+\varepsilon)$ oder $(t_0-\varepsilon,t)$ zu wählen ist, je nachdem, ob $t \leq t_0$ oder $t > t_0$ ist. Man zeige, dass $J \neq \varnothing$ ist, und dass J in (a,b) offen und abgeschlossen ist.]

(c) **Ein nicht-triviales Geradenbündel über $\mathbb{S}^1$.** Auf dem Einheitskreis $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ (siehe Aufgaben 6 und 19(a)) fixieren wir ein Paar von Antipodenpunkten $p \in \mathbb{S}^1$ und $-p \in \mathbb{S}^1$. Dann ist mit

$$U_1 := \mathbb{S}^1 \setminus \{p\} \quad \text{und} \quad U_2 := \mathbb{S}^1 \setminus \{-p\}$$

(U_1,U_2) eine offene Überdeckung von $\mathbb{S}^1$, und $U_1 \cap U_2 = \mathbb{S}^1 \setminus \{p,-p\}$ zerfällt in zwei Zusammenhangskomponenten V_+ und V_-.

Man zeige, dass man durch Anwendung der Konstruktion aus Beispiel 1.51 auf die Überdeckung (U_1,U_2) von $\mathbb{S}^1$, $F := \mathbb{R}$ und die Abbildung

$$\phi_{U_1,U_2} : U_1 \cap U_2 \to \mathrm{GL}(\mathbb{R}),\; x \mapsto \begin{cases} \mathrm{id}_{\mathbb{R}} & \text{für } x \in V_+ \\ -\mathrm{id}_{\mathbb{R}} & \text{für } x \in V_- \end{cases}$$

ein Geradenbündel $(E,\mathbb{S}^1,\pi)$ über $\mathbb{S}^1$ erhält, das nicht trivial ist. E hat die Gestalt eines (unendlich ausgedehnten) *Möbiusbandes.* *(8 Punkte)*

[Tipp zum Nachweis der Nicht-Trivialität von E: Man nehme an, dass E einen nullstellenfreien Schnitt f besitze, dann untersuche man f mithilfe der beiden lokalen Trivialisierungen von E auf U_1 bzw. U_2. Vielleicht möchte man dazu den Zwischenwertsatz auf eine auf V_+ oder V_- definierte Funktion anwenden; das geht, weil $V_\pm$ diffeomorph zu einem reellen Intervall ist.]