Martin Schmidt
Sebastian Klein

Analysis III
11. Übung

13. November 2015

(abzugeben in der Vorlesung am 20. November 2015)

In den Aufgaben 36 und 37 seien $V, V_1, \ldots, V_n, W$ stets **endlich-dimensionale**, normierte Vektorräume über $\mathbb{K}$.

36. **(a)** **Dimension von $\mathcal{L}(V_1, \ldots, V_n; W)$.** Zeige, dass

$$\dim \mathcal{L}(V_1, \ldots, V_n; W) = \dim(V_1) \cdot \ldots \cdot \dim(V_n) \cdot \dim(W)$$

gilt. *(5 Punkte)*

[Tipp. Ausgehend von Basen der V_k und von W überlege man sich, wie eine Basis von $\mathcal{L}(V_1, \ldots, V_n; W)$ aussieht.]

(b) **Alternative Beschreibungen der Norm auf $\mathcal{L}(V_1, \ldots, V_n; W)$.** Nach Vorlesung ist die Norm auf $\mathcal{L}(V_1, \ldots, V_n; W)$ durch

$$\|A\| := \sup\{\, \|A(x_1, \ldots, x_n)\| \,\big|\, x_k \in V_k,\ \|x_k\| \leq 1\,\}$$

für $A \in \mathcal{L}(V_1, \ldots, V_n; W)$ gegeben. Beweise, dass die folgenden beiden alternativen Beschreibungen dieser Norm gelten:

$$\begin{aligned}\|A\| &= \sup\{\, \|A(x_1, \ldots, x_n)\| \,\big|\, x_k \in V_k,\ \|x_k\| = 1\,\} \\ &= \sup\left\{ \left\| A\left(\tfrac{x_1}{\|x_1\|}, \ldots, \tfrac{x_n}{\|x_n\|}\right)\right\| \,\middle|\, x_k \in V_k \setminus \{0\}\right\} .\end{aligned}$$

(5 Punkte)

(c) **Ein Isomorphismus zwischen $\mathcal{L}(V; W)$ und $\mathcal{L}(V, W'; \mathbb{K})$.** Zeige, dass die Abbildung

$$\Phi : \mathcal{L}(V; W) \to \mathcal{L}(V, W'; \mathbb{K}),\ A \mapsto \Phi(A)$$

mit

$$\Phi(A) : V \times W' \to \mathbb{K},\ (v, B) \mapsto (B \circ A)(v)$$

ein Isomorphismus der normierten Vektorräume $\mathcal{L}(V; W)$ und $\mathcal{L}(V, W'; \mathbb{K})$ ist; das bedeutet: Φ ist ein Vektorraum-Isomorphismus, der zusätzlich die Norm respektiert, d.h. für alle $A \in \mathcal{L}(V; W)$ gilt

$$\|\Phi(A)\| = \|A\| .$$

(5 Punkte)

37. **Das Tensorprodukt endlich-dimensionaler Vektorräume.**

(a) Belege jeweils durch ein Beispiel, dass im Allgemeinen

(i) das Tensorprodukt von Vektoren

$$V_1 \times \ldots \times V_n \to V_1 \otimes \ldots \otimes V_n,\ (v_1, \ldots, v_n) \mapsto v_1 \otimes \ldots \otimes v_n$$

selbst dann nicht kommutativ ist, wenn $V_1 = \ldots = V_n$ ist; *(5 Punkte)*

(ii) nicht jeder Vektor in $V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$ kohärent ist. *(5 Punkte)*

(b) Zeige, dass in $V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$ die lineare Hülle der kohärenten Vektoren ganz $V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$ ist, das heißt, dass sich jedes Element von $V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$ als endliche Linearkombination kohärenter Vektoren schreiben läßt. *(5 Punkte)*

(c) Konstruiere Isomorphismen von normierten Vektorräumen, um die folgenden natürlichen Isomorphien zu beweisen:

(i) $\mathcal{L}(V_1, \ldots, V_n; W) \cong \mathcal{L}(V_1 \otimes \ldots \otimes V_n; W)$ *(4 Punkte)*

(ii) $V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 \cong V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3) \cong (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3$ *(4 Punkte)*

(iii) $\mathcal{L}(V; W) \cong V' \otimes W$. *(4 Punkte)*

38. Riemannsche Metriken.

Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Wir bezeichnen mit $L(TX, TX; \mathbb{R})$ das Vektorraumbündel, dessen Faser über $x \in X$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der Bilinearformen $T_xX \times T_xX \to \mathbb{R}$ ist. Eine *Riemannsche Metrik* auf X ist ein globaler, glatter Schnitt g in diesem Vektorbündel, so dass für $x \in X$ die Bilinearform $g(x)$ jeweils ein Skalarprodukt auf T_xX, also symmetrisch und positiv definit ist.

Zeige: Auf X existiert eine Riemannsche Metrik. *(8 Punkte)*

[Tipp. Ist (U, ϕ) eine Karte von X, so wird durch $g(x)(v, w) = T_x\phi(v) \cdot T_x\phi(w)$ für $x \in U$ und $v, w \in T_xX$ eine Riemannsche Metrik auf U definiert, wobei $\cdot$ auf der rechten Seite der Gleichung das übliche Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$ bedeutet. Man „klebe“ derartige Riemannsche Metriken auf Kartenumgebungen mittels einer Zerlegung der Eins zu einer Riemannschen Metrik auf X zusammen.]