

42. Über das Zurückziehen von Differentialformen.

- (a) Es seien X, Y differenzierbare Mannigfaltigkeiten der Dimension n und $f : X \rightarrow Y$ eine glatte Abbildung. Weiter seien Karten $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n) : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ auf offenen Teilmengen $U \subset X$ bzw. $V \subset Y$ mit $f(U) \subset V$ gegeben. Man zeige, dass unter diesen Voraussetzungen für jede glatte Funktion $g \in C^\infty(V, \mathbb{R})$ gilt:

$$f^*(g d\psi_1 \wedge \dots \wedge d\psi_n) = (g \circ f) \cdot \det \left(\frac{\partial(\psi_j \circ f \circ \phi^{-1})}{\partial x_i} \right) \cdot d\phi_1 \wedge \dots \wedge d\phi_n.$$

(7 Punkte)

[Tipp. Man verwende die bekannte Formel $\langle A_1 \wedge \dots \wedge A_p, v_1 \otimes \dots \otimes v_p \rangle = \det(A_i(v_j))_{i,j}$, siehe S. 71 des Skripts.]

- (b) Wir betrachten auf \mathbb{R}^3 die *kanonische Volumenform*, das ist die 3-Differentialform $\omega := dx \wedge dy \wedge dz$, sowie die *sphärischen Koordinaten*, d.h. die glatte Abbildung

$$f : \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi) \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, (r, \vartheta, \varphi) \mapsto (r \cos(\vartheta) \cos(\varphi), r \cos(\vartheta) \sin(\varphi), r \sin(\vartheta)).$$

Berechne „ ω in sphärischen Koordinaten“, das heißt, die Zurückziehung $f^*\omega$.

(6 Punkte)

43. Aus der symplektischen Geometrie.

Es sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Eine 2-Differentialform ω auf X heißt *symplektische Form*, wenn ω geschlossen ist (d.h. $d\omega = 0$ gilt), und für jedes $x \in X$ der alternierende Tensor $\omega(x) \in \bigwedge^2 T'_x M$ nicht entartet ist (siehe Aufgabe 39). In dieser Situation nennt man das Paar (X, ω) eine *symplektische Mannigfaltigkeit*.

Man zeige für eine symplektische Mannigfaltigkeit (X, ω) die folgenden Aussagen. Dabei sollen die Ergebnisse von Aufgabe 38 verwendet werden.

- (a) Die Dimension von X ist notwendigerweise gerade. (1 Punkt)

- (b) Die Abbildung

$$TX \rightarrow T'X, v \mapsto i_v \omega = \langle \omega, v \otimes \square \rangle$$

ist ein Vektorbündel-Isomorphismus. Daher existiert zu jeder Funktion $f \in C^\infty(X, \mathbb{R})$ genau ein Vektorfeld $H_f \in \text{Vec}^\infty(X)$ mit

$$i_{H_f} \omega = df.$$

H_f heißt das *Hamiltonsche Vektorfeld* zu f .

(4 Punkte)

- (c) Sei $f \in C^\infty(X, \mathbb{R})$. Jede Integralkurve $c : (a, b) \rightarrow X$ des Hamiltonschen Vektorfelds H_f ist eine Niveaulinie von f (d.h. $f \circ c$ ist konstant). (4 Punkte)

44. Über orientierbare Mannigfaltigkeiten.

(a) Zeige:

(i) Die n -dimensionale Sphäre S^n ist orientierbar. (4 Punkte)

(ii) Das Möbiusband (Aufgabe 20(c)) ist nicht orientierbar. (4 Punkte)

(b) Es seien X und Y orientierbare, differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Zeige, dass dann auch $X \times Y$ orientierbar ist. (4 Punkte)

(c) Es sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Zeige, dass X in jedem Fall lokal orientierbar ist. Genauer gesagt: Ist (U, ϕ) eine Karte von X mit $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, so zeige man, dass $d\phi_1 \wedge \dots \wedge d\phi_n$ eine nullstellenfreie n -Differentialform auf U ist. (4 Punkte)

(d) Beweise, dass das Tangentialbündel TX einer jeden differenzierbaren Mannigfaltigkeit X orientierbar ist. (6 Punkte)

[Tipp. Man berechne für zwei Karten von TX von der im Beweis von Satz 1.52 beschriebenen Art die Determinante der Jacobimatrix des Kartenwechsels.]

45. Gleichungsdefinierte orientierte Hyperflächen. Es sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Abbildung und $q \in \mathbb{R}$ so, dass $X := f^{-1}(\{q\}) \neq \emptyset$ und f in allen $x \in X$ submersiv ist. Zeige, dass X eine $(n-1)$ -dimensionale, orientierbare Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n ist. (6 Punkte)

[Tipp. Ist ω eine Volumenform auf \mathbb{R}^n und F das Gradientenvektorfeld von f (d.h. es gilt $T_x(f)(v) = F(x) \cdot v$, wobei \cdot das Standard-Skalarprodukt von \mathbb{R}^n bezeichnet), so untersuche man $i_F \omega|_X$.]

