Martin Schmidt
Sebastian Klein

Analysis III
3. Übung

18. September 2015

(abzugeben in der Vorlesung am 25. September 2015)

6. Die Sphäre als differenzierbare Mannigfaltigkeit.

Es sei $n \geq 1$. Wir betrachten $\mathbb{R}^{n+1}$ auf die übliche Weise als euklidischen Vektorraum, dessen Skalarprodukt wir mit $\langle \cdot, \cdot \rangle$, dessen Norm wir mit $\| \cdot \|$ und dessen Standard-Basis wir mit $(e_0, \dots, e_n)$ bezeichnen. Unter der *n-dimensionalen Sphäre* verstehen wir die Teilmenge

$$\mathbb{S}^n := \{ p \in \mathbb{R}^{n+1} \,\big|\, \|p\| = 1 \} .$$

Ziel dieser Aufgabe ist es, zu zeigen, wie man $\mathbb{S}^n$ auf natürliche Weise als n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit auffassen kann. Dazu beweise man:

(a) Ist $p \in \mathbb{S}^n \setminus \{e_0\}$, so schneidet die Gerade durch die Punkte $e_0 \in \mathbb{S}^n$ und p die Hyperebene

$$H := \{ v \in \mathbb{R}^{n+1} \,\big|\, \langle v, e_0 \rangle = 0 \} = \{0\} \times \mathbb{R}^n$$

in genau einem Punkt, den wir mit $F(p)$ bezeichnen wollen. Bestimme eine explizite Formel für $F(p)$. Die dadurch definierte Abbildung $F : \mathbb{S}^n \setminus \{e_0\} \to H$ heißt *stereographische Projektion.* *(8 Punkte)*

(b) $F : \mathbb{S}^n \setminus \{e_0\} \to H$ ist ein Homöomorphismus auf H. Indem wir H mit $\mathbb{R}^n$ identifizieren, wird F daher eine Karte für $\mathbb{S}^n$ mit Definitionsbereich $\mathbb{S}^n \setminus \{e_0\}$. *(8 Punkte)*

(c) Sei $\Phi : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1},\ (v_0, v_1, \dots, v_n) \mapsto (-v_0, v_1, \dots, v_n)$ die Spiegelung an $H \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Dann ist $\widetilde{F} := F \circ \Phi : \mathbb{S}^n \setminus \{-e_0\} \to H$ eine weitere Karte von $\mathbb{S}^n$. *(4 Punkte)*

(d) Die beiden Karten F und $\widetilde{F}$ sind verträglich. Daher ist $(\mathbb{S}^n, \mathcal{A})$ mit

$$\mathcal{A} := \left\{ F : \mathbb{S}^n \setminus \{e_0\} \to H \ ,\ \widetilde{F} : \mathbb{S}^n \setminus \{-e_0\} \to H \right\}$$

eine differenzierbare n-dimensionale Mannigfaltigkeit. *(4 Punkte)*

7. Beispiele von differenzierbaren Abbildungen auf $\mathbb{S}^n$.

Zeige, dass die folgenden Funktionen bzw. Abbildungen glatt im Sinne von Definition 1.21 sind:

(a) Die Koordinatenprojektion $f_k : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R},\ (x_0, \dots, x_n) \mapsto x_k$ für $k \in \{0, \dots, n\}$. *(6 Punkte)*

(b) Die Antipoden-Abbildung der Sphäre $\alpha : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n,\ x \mapsto -x$. *(6 Punkte)*

Bitte wenden.

8. Über diffeomorphe Mannigfaltigkeiten.

Seien M, N differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Zeige, dass M und N genau dann diffeomorph (siehe Definition 1.20) sind, wenn eine glatte Abbildung $f : M \to N$ existiert, die bijektiv ist und deren Umkehrabbildung auch glatt ist. *(6 Punkte)*

9. Eine Zerlegung der Eins für das Intervall $(0, 4)$.

Wir betrachten das offene Intervall $M := (0, 4)$ als 1-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit. Dann sind

$$U_1 := (0, 2)\ , \quad U_2 := (1, 3) \quad \text{und} \quad U_3 := (2, 4)$$

offene Teilmengen von M, die gemeinsam eine offene Überdeckung von M bilden.

Man finde eine dieser Überdeckung angepasste Zerlegung der Eins in folgendem Sinne: Man bestimme Funktionen $f_1, f_2, f_3 \in C^\infty(M)$ mit

$$0 \le f_k \le 1, \quad \mathrm{Tr}(f_k) \subset U_k \quad \text{für} \quad k \in \{1, 2, 3\}$$

(wobei beim *Träger* $\mathrm{Tr}(f_k) := \overline{\{\, x \in M \mid f_k(x) \neq 0 \,\}}$ von f_k der Abschluss in M gebildet wird) und

$$f_1 + f_2 + f_3 = 1\ . \qquad (8 \textit{ Punkte})$$

Bemerkung. Die hier beschriebene Zerlegung der Eins ist schwächer als diejenige aus Satz 1.26. Genauer gesagt, hat die Zerlegung der Eins aus der Aufgabe nicht die Eigenschaft, dass die Funktionen f_k außerhalb einer *kompakten*, in U_k enthaltenen Menge verschwinden. Eine Zerlegung der Eins im Sinne von Satz 1.26 ist für $M = (0, 4)$ nur mit abzählbar unendlich vielen Funktionen möglich.