Martin Schmidt
Sebastian Klein

Analysis III
2. Übung

11. September 2015

(abzugeben in der Vorlesung am 18. September 2015)

3. Stetigkeit in metrischen Räumen.

Man zeige, dass in metrischen Räumen die Definition der Stetigkeit aus 1.2 mit der üblichen ε-δ-Definition übereinstimmt, das heißt ausführlicher:

Seien (X, d) und (X', d') zwei metrische Räume und $f : X \to X'$ eine Abbildung. Dann zeige man, dass die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind:

(1) Für jede offene Teilmenge O' von X' ist $f^{-1}[O']$ offen in X.

(2) Für jeden Punkt $p \in X$ und jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass für jeden Punkt $q \in X$ mit $d(p, q) < \delta$ gilt: $d'(f(p), f(q)) < \varepsilon$.

(10 Punkte)

4. Beispiele differenzierbarer Mannigfaltigkeiten.

(a) Sei $B \subset \mathbb{R}^2$ die in Aufgabe 2 definierte Menge.

(i) Begründe *kurz*, dass B ein metrisierbarer, separabler topologischer Raum ist.

(4 Punkte)

(ii) Bestimme einen Atlas $\mathcal{A}$ für B, so dass $(B, \mathcal{A})$ eine 1-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit ist. *(6 Punkte)*

(b) Wir betrachten den Zylinder

$$Z := \{\, (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,\big|\, x_2^2 + x_3^2 = 1 \,\} \subset \mathbb{R}^3$$

sowie für jedes $\theta \in \mathbb{R}$ die Abbildung

$$\psi_\theta : \mathbb{R} \times (\theta, \theta + 2\pi) \to Z\ ,\ \ (t, s) \mapsto (t, \cos(s), \sin(s))\ .$$

(i) Begründe *kurz*, dass Z ein metrisierbarer, separabler topologischer Raum ist.

(4 Punkte)

(ii) Sei $\theta \in \mathbb{R}$. Zeige, dass die Abbildung ψ_θ ein Homöomorphismus *in* Z ist. Folgere, dass die Umkehrabbildung

$$\phi_\theta := \psi_\theta^{-1} : \psi_\theta[\mathbb{R} \times (\theta, \theta + 2\pi)] \to \mathbb{R}^2$$

eine Karte für Z ist. *(8 Punkte)*

(iii) Zeige, dass

$$\mathcal{A} := \{\, \phi_\theta \,\big|\, \theta \in \mathbb{R} \,\}$$

ein Atlas für Z ist und folgere, dass $(Z, \mathcal{A})$ eine 2-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit ist. *(8 Punkte)*

5. Nicht verträgliche differenzierbare Strukturen.

Sei $\mathcal{A}$ der natürliche Atlas auf $\mathbb{R}$, also $\mathcal{A} = \{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}\}$. Finde einen anderen Atlas $\widetilde{\mathcal{A}}$ auf $\mathbb{R}$, der mit $\mathcal{A}$ nicht verträglich ist, sowie einen Homoömorphismus $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, der $\widetilde{\mathcal{A}}$ auf $\mathcal{A}$ abbildet, d.h. $\{\, \phi \circ f \mid \phi \in \widetilde{\mathcal{A}} \,\} = \mathcal{A}$ (siehe Definition 1.20). *(10 Punkte)*