Martin Schmidt
Sebastian Klein

Analysis III
Letzte Übung

4. Dezember 2015

(Diese Aufgaben dienen der Einübung der Integrationstheorie; das Blatt wird nicht abgegeben und nicht besprochen; stattdessen werden ungefähr am 9. Dezember 2015 Lösungen zu den Aufgaben auf der Homepage zur Vorlesung veröffentlicht.)

46. Integration auf dem Einheitskreis. Es sei ω eine 1-Differentialform auf dem Einheitskreis $S^1 \subset \mathbb{R}^2$, den wir mithilfe der Parameterisierung

$$f : \mathbb{R} \to S^1,\ t \mapsto (\cos t, \sin t)$$

betrachten.

(a) Zeige, dass

$$\int_{S^1} \omega = \int_{[0,2\pi]} f^*\omega$$

gilt.

[Tipp. Natürlich soll Korollar 3.24 angewendet werden. So ganz ohne Zusatzüberlegung geht das aber nicht, weil $f|[0,2\pi]$ nicht injektiv ist...]

(b) Man folgere aus (a) den *Satz von Stokes* für S^1. Mehr noch: man zeige, dass ω genau dann exakt ist, wenn

$$\int_{S^1} \omega = 0$$

gilt.

47. Eine Differentialform, die geschlossen, aber nicht exakt ist.

Auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ betrachten wir die 1-Differentialform

$$\omega := -\frac{y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x + \frac{x}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y\ .$$

(a) Zeige, dass ω geschlossen ist.

(b) Berechne $\int_{S^1} \omega$.

(c) Folgere aus (b), dass ω nicht exakt ist.

[Tipp. Aufgabe 46.]

Bemerkung. Wegen $\mathrm{d}(\mathrm{d}\eta) = 0$ ist in jedem Fall jede exakte Differentialform geschlossen. Das *Lemma von Poincaré* besagt, dass auf *sternförmigen* Gebieten im $\mathbb{R}^n$ auch die Umkehrung gilt: jede geschlossene Differentialform ist exakt. Das Beispiel dieser Übungsaufgabe zeigt, dass diese Aussage auf allgemeinen Gebieten nicht richtig ist: auf dem nicht-sternförmigen Gebiet $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ existiert eine geschlossene 1-Differentialform, die nicht exakt ist.

48. Eine Integration.

Es sei eine 1-Form auf $\mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\omega := y\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}y \;.$$

Wir betrachten die Einschränkung von ω auf die 2-Sphäre S^2, gegeben durch

$$S^2 = \{\, (\sin(\varphi)\sin(\vartheta), \cos(\varphi)\sin(\vartheta), \cos(\vartheta)) \in \mathbb{R}^3 \,\big|\, \varphi \in [0, 2\pi), \vartheta \in [0, \pi] \,\} \;.$$

Man bestätige durch Rechnung, dass in dieser konkreten Situation der Satz von Stokes gilt, das heißt, dass

$$\int_{S^2} \mathrm{d}\omega = 0$$

ist.

[Tipp. Man verwende die Parametrisierung von S^2

$$f : [0, 2\pi] \times [0, \pi] \to S^2,\; (\varphi, \vartheta) \mapsto (\sin(\varphi)\sin(\vartheta), \cos(\varphi)\sin(\vartheta), \cos(\vartheta)) \;,$$

und überlege sich, wie man mit dem Problem umgehen soll, dass f nicht überall injektiv ist, und nicht überall immersiv ist.]

49. Die Divergenz und der Integralsatz von Gauß.

Es sei $X \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge mit $\overline{X^0} = X$, die zugleich eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit mit Rand von $\mathbb{R}^n$ ist. Bekanntlich ist X dann orientierbar und $\omega := \mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n$ eine Volumenform auf X. Ferner sei eine glatte $(n-1)$-Form η auf X gegeben.

(a) Man zeige, dass es genau ein Vektorfeld $F \in \mathrm{Vec}^\infty(X)$ mit

$$\eta = i_F\omega$$

gibt.

(b) Wir schreiben $F = (F_1, \ldots, F_n)$ mit Funktionen $F_1, \ldots, F_n \in C^\infty(X, \mathbb{R})$. Zeige, dass dann

$$\mathrm{d}(i_F\omega) = \mathrm{div}(F) \cdot \omega$$

mit

$$\mathrm{div}(F) := \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F_k}{\partial x_k}$$

gilt. Die Funktion $\mathrm{div}(F) \in C^\infty(X, \mathbb{R})$ heißt *Divergenz* des Vektorfeldes F.

(c) Man beweise den *Integralsatz von Gauß*:

$$\int_{\partial X} \eta = \int_X \mathrm{div}(F) \cdot \omega \;.$$

⋆⋆⋆ Wir wünschen: ⋆⋆⋆ Viel Erfolg bei der Prüfung ⋆⋆⋆ Eine gesegnete Weihnachtszeit ⋆⋆⋆
⋆⋆⋆ Ein erfolgreiches weiteres Studium ⋆⋆⋆ Martin Schmidt und Sebastian Klein ⋆⋆⋆