Aufgabe 46

(a) Sei $\varepsilon > 0$, dann gilt nach Korollar 3.24 (weil $f|[\varepsilon, 2\pi-\varepsilon]: [\varepsilon, 2\pi-\varepsilon] \longrightarrow f[[\varepsilon,2\pi-\varepsilon]] =: S_\varepsilon \subset S^1$ ein or. erh. Diffeo ist)

$$\int_{S_\varepsilon} \omega = \int_{[\varepsilon,2\pi-\varepsilon]} f^*\omega .$$

__Beh.__ $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int_{S_\varepsilon} \omega = \int_{S^1} \omega$.

Bew.: OE sei ε so klein, dass auf $\mathcal{U} := f[(-2\varepsilon, 2\varepsilon)]$, $\phi := (f|(-2\varepsilon,2\varepsilon))^{-1}: \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ eine or. Karte von S^1 ist. Stelle $\omega|\mathcal{U}$ dar als $\omega|\mathcal{U} = g \cdot d\phi$ mit $g: \mathcal{U} \to \mathbb{R}$.
g ist stetig, und daher auf $f[[-\varepsilon,\varepsilon]]$ beschränkt, say $|g| \le M < \infty$.
Damit gilt

$$\int_{S^1} \omega - \int_{S_\varepsilon} \omega = \int_{f[(-\varepsilon,\varepsilon)]} \omega = \int_{f[(-\varepsilon,\varepsilon)]} g \cdot d\phi = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} g(f(t))\, dt$$

$$\Rightarrow \left| \int_{S^1} \omega - \int_{S_\varepsilon} \omega \right| \le 2\varepsilon \cdot M \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0 .$$

$\square$

__Beh.__ $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int_{[\varepsilon,2\pi-\varepsilon]} f^*\omega = \int_{[0,2\pi]} f^*\omega$

analog.

(b) __Beh.__ ω exakt $\Leftrightarrow \int_{S^1} \omega = 0$.

"$\Rightarrow$" Sei etwa $\omega = d\eta$ mit $\eta \in C^\infty(S^1, \mathbb{R})$. Dann gilt

$$\int_{S^1} \omega \overset{(a)}{=} \int_{[0,2\pi]} f^*\omega = \int_{[0,2\pi]} f^* d\eta = \int_{[0,2\pi]} d(f^*\eta) = \int_{[0,2\pi]} d(\eta \circ f) = (\eta\circ f)(2\pi) - (\eta \circ f)(0) \overset{f(2\pi)=f(0)}{=} 0$$

"$\Leftarrow$" Es sei $\tilde\eta: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \longmapsto \int_{[0,t]} f^*\omega$. $\tilde\eta$ ist glatt und wegen der Voraussetzung $\int_{[0,2\pi]} f^*\omega = \int_{S^1} \omega = 0$ 2π-periodisch; daher existiert eine glatte Fkt $\eta: S^1 \to \mathbb{R}$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "\tilde\eta"] & \\ S^1 \arrow[r, "\eta"'] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

mit $\eta \circ f = \tilde\eta$. Nun gilt

$$f^* d\eta = d(f^*\eta) = d(\eta \circ f) = d\tilde\eta \overset{\text{Hauptsatz der Diff.- und Int.rechnung}}{=} f^*\omega$$

und deshalb, weil $f: \mathbb{R} \to S^1$ ein surjektiver lokaler Diffeomorphismus ist,

$$d\eta = \omega$$

$\square$

Anmerkung zu (a): Alternativ kann man auch mit Lebesgue-Nullmengen argumentieren.

Aufgabe 47

(a) $\omega = f\,dx + g\,dy \Rightarrow d\omega = -\frac{\partial f}{\partial y} dx \wedge dy + \frac{\partial g}{\partial x} dx \wedge dy = \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx \wedge dy.$

Also ω geschlossen $\Leftrightarrow \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}$.

Hier ist $f = -\frac{y}{x^2+y^2} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1\cdot(x^2+y^2) - y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$

$g = \frac{x}{x^2+y^2} \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1\cdot(x^2+y^2) - x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$ $\quad /\!/$

Also ist ω geschlossen.

(b) Es sei $f : \mathbb{R} \to S^1 \subset \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$ wie in ÜA 46

Dann ist $f^*dx = d(x\circ f) = d(\cos(t)) = -\sin(t)dt$, $f^*dy = d(y\circ f) = d(\sin(t)) = \cos(t)dt$

und daher $f^*\omega = -\frac{\sin(t)}{\cos^2(t)+\sin^2(t)}\cdot(-\sin(t))dt + \frac{\cos(t)}{\cos(t)^2+\sin(t)^2}\cdot\cos(t)\,dt$

$= (\sin(t)^2 + \cos(t)^2)\,dt = dt,$

somit

$$\int_{S^1}\omega \overset{\text{ÜA 46(a)}}{=} \int_{[0,2\pi]} f^*\omega = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

(c) Nach (b) ist $\int_{S^1}\omega \neq 0$, deshalb ist nach ÜA 46(b) ω nicht exakt.

Aufgabe 48

Nehme die Nullmenge $\Gamma = \{\varphi = 0\}$ = ein halber Großkreis von N nach S aus S^2 aus. $S^2 \setminus \Gamma$ ist nicht kompakt, ~~kann~~ hier kann der Trafosatz aber wegen einer analogen Betrachtung wie in ÜA 46 angewendet werden. Betrachte also

$$f : \underbrace{(0,2\pi) \times [0,\pi]}_{=:Q} \longrightarrow S^2$$

und verwende $\int_{S^2} d\omega = \int_{S^2 \setminus \Gamma} d\omega = \int_Q f^*(d\omega)$

Nun:

$$\omega = y\,dx + z\,dy \quad \Rightarrow d\omega = dy \wedge dx + dz \wedge dy \Rightarrow f^* d\omega = f^*dy \wedge f^*dx + f^*dz \wedge f^*dy$$

$$\begin{aligned}
f^* d\omega &= d(y\circ f) \wedge d(x \circ f) + d(z \circ f) \wedge d(y \circ f) \\
&= d(\cos(\varphi)\sin(\vartheta)) \wedge d(\sin(\varphi)\sin(\vartheta)) + d(\cos(\vartheta)) \wedge d(\cos(\varphi)\sin(\vartheta)) \\
&= \left(-\sin(\varphi)\sin(\vartheta)d\varphi + \cos(\varphi)\cos(\vartheta)d\vartheta\right) \wedge \left(\cos(\varphi)\sin(\vartheta)d\varphi + \sin(\varphi)\cos(\vartheta)d\vartheta\right) \\
&\quad - \sin\vartheta\, d\vartheta \wedge \left(-\sin(\varphi)\sin(\vartheta)d\varphi + \cos(\varphi)\cos(\vartheta)d\vartheta\right) \\
&= \left(-\sin^2(\varphi)\sin(\vartheta)\cos(\vartheta) - \cos^2(\varphi)\cos(\vartheta)\sin(\vartheta) - \sin(\varphi)\sin^2(\vartheta)\right) d\varphi \wedge d\vartheta \\
&= \underbrace{\left(-\sin(\vartheta)\cos(\vartheta) - \sin(\varphi)\sin^2(\vartheta)\right)}_{=:g} d\varphi \wedge d\vartheta
\end{aligned}$$

Also

$$\int_{S^2} d\omega = \int_Q f^* d\omega \overset{\text{Satz von Fubini}}{=} \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\vartheta=0}^{\pi} (-\sin\vartheta\cos\vartheta)\, d\vartheta\, d\varphi + \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\vartheta=0}^{\pi} (-\sin(\varphi)\sin^2(\vartheta))\, d\vartheta\, d\varphi$$

$$= -2\pi \underbrace{\int_0^{\pi} \sin\vartheta\cos\vartheta\, d\vartheta}_{= \left[\frac{1}{2}\sin^2(\vartheta)\right]_0^{\pi} = 0} - \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin(\varphi)\, d\varphi}_{= \left[-\cos(\varphi)\right]_0^{2\pi} = 0} \int_0^{\pi} \sin^2(\vartheta)\, d\vartheta$$

$$\underline{\underline{= 0}}.$$

$\square$

<u>Aufgabe 49</u>

(a) Sei $F \in Vec^\infty(X)$ geschrieben als $F = (F_1, \dots, F_n)$ mit $F_k \in C^\infty(X, \mathbb{R})$. Sei außerdem e_k der k-te Standardeinheitsvektor von $\mathbb{R}^n$; wir fassen e_k auch als (konstantes) Vektorfeld auf X bzw. auf $\mathbb{R}^n$ auf. Weil $(e_1 \wedge \dots \hat{e}_k \dots \wedge e_n)_{k=1,\dots,n}$ ein Basisfeld von $\Lambda^{n-1} X$ ist (wobei $\hat{e}_k$ wie im Skript bedeutet, dass e_k ausgelassen wird), gilt

$$(*) \qquad \eta = i_F \omega \iff \forall k = 1, \dots, n: \ \eta(e_1, \dots \hat{e}_k \dots, e_n) = i_F \omega(e_1, \dots \hat{e}_k \dots, e_n).$$

Nun ist für $k \in \{1, \dots, n\}$:

$$i_F \omega(e_1, \dots \hat{e}_k \dots, e_n) = \omega(F, e_1, \dots \hat{e}_k \dots, e_n) = (dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n)(F, e_1, \dots \hat{e}_k \dots, e_n)$$

$$\overset{\text{Skript S.71}}{=} \det\Big(dx_i(F), dx_i(e_1), \dots \widehat{dx_i(e_k)} \dots, dx_i(e_n) \Big)_i = \det(F, e_1, \dots \hat{e}_k \dots, e_n)$$

$$\overset{(+)}{=} (-1)^{k+1} F_k \cdot \det(\mathbb{1}_{n-1}) = (-1)^{k+1} F_k.$$

Dabei zu (+): Entwicklung der Determinante nach der k-ten Zeile.

Wegen (*) gilt also $\eta = i_F \omega$ genau für $F = (F_1, \dots, F_n)$ mit $F_k = (-1)^{k+1} \eta(e_1, \dots \hat{e}_k \dots, e_n)$.

(b) Es gilt

$$d(i_F \omega)(e_1, \dots, e_n) = d(\omega(F, \cdot, \dots, \cdot))(e_1, \dots, e_n)$$

$$\overset{\text{Satz 3.17(iii)}}{=} \sum_k (-1)^k \theta_{e_k}(\omega(F, e_1, \dots \hat{e}_k \dots, e_n)) + \sum_{k<l} (-1)^{k+l} \omega(F, \underbrace{[e_k, e_l]}_{=0}, e_1, \dots \hat{e}_k \dots \hat{e}_l \dots, e_n)$$

$$= \sum_k (-1)^k \theta_{e_k}(\omega(F, e_1, \dots \hat{e}_k \dots, e_n)) = \sum_k \theta_{e_k}(\omega(e_1, \dots, \underset{e_k}{F}, \dots, e_n))$$

das bedeutet: der k-te Eintrag e_k wird durch F ersetzt

$$= \sum_k \theta_{e_k} F_k = \sum_k \frac{\partial F_k}{\partial x_k} = \operatorname{div}(F) = \operatorname{div}(F) \cdot \underbrace{\omega(e_1, \dots, e_n)}_{=1}.$$

Weil $e_1 \wedge \dots \wedge e_n$ eine Basis von $\Lambda^n X$ ist, folgt $d(i_F \omega) = \operatorname{div}(F) \cdot \omega$.

(c) $$\int_{\partial X} \eta \overset{\text{Satz v. Stokes}}{=} \int_X d\eta \overset{(a)}{=} \int_X d(i_F \omega) \overset{(b)}{=} \int_X \operatorname{div}(F) \cdot \omega.$$