Analysis III

Martin Schmidt
Sebastian Klein

1. Übung

9. September 2015

(abzugeben in A5, Raum C102, am Montag, den 14. September 2015 bis 16 Uhr)

1. Eine äquivalente Charakterisierung zusammenhängender Räume.

Sei X ein metrischer Raum. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(1) X ist zusammenhängend.

(2) Es existieren keine zwei nicht-leere offene Teilmengen U, V von X mit $U \cup V = X$ und $U \cap V = \varnothing$. *(8 Punkte)*

2. Ein Beispiel für eine zusammenhängende Menge, die nicht wegzusammenhängend ist.

Wir betrachten die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^2$:

$$A := \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x = 0 \text{ und } y \in [-1,1] \}$$
$$B := \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \in \mathbb{R}_+ \text{ und } y = \sin\left(\tfrac{1}{x}\right) \}$$
$$M := A \cup B\ .$$

(a) Zeige, dass B zusammenhängend ist. *(6 Punkte)*
[Tipp. Satz 1.8(iv).]

(b) Zeige, dass $\overline{B} = M$ gilt, und folgere, dass M zusammenhängend ist. *(6 Punkte)*
[Tipp. Satz 1.8(i).]

(c) Es sei $y \in [-1,1]$ und $\varepsilon < 1$ gegeben. Man zeige, dass es $x \in \mathbb{R}_+$ gibt mit

$$(x, \sin(\tfrac{1}{x})) \in (0,\varepsilon) \times (y-\varepsilon, y+\varepsilon)\ .$$

Man bestimme weiter für jedes solche x die Zusammenhangskomponente von $M \cap ((0,\varepsilon) \times (y-\varepsilon, y+\varepsilon))$, die den Punkt $(x, \sin(\frac{1}{x})) \in B$ enthält. *(12 Punkte)*
[Tipp. Satz 1.7.]

(d) Folgere aus (c), dass M nicht lokal zusammenhängend ist. *(8 Punkte)*

(e) Zeige, dass es keinen stetiger Weg $\gamma : [0,1] \to M$ mit Anfangspunkt $\gamma(0) \in A$ und Endpunkt $\gamma(1) \in B$ gibt. Also ist M *nicht wegzusammenhängend.* *(10 Punkte)*
Hierbei heißt ein metrischer Raum (M,d) *wegzusammenhängend*, wenn es für je zwei Punkte $p, q \in M$ einen stetigen Weg $\gamma : [0,1] \to M$ mit $\gamma(0) = p$ und $\gamma(1) = q$ gibt.
[Tipp. Man nehme entgegen der Behauptung an, dass es einen stetigen Weg $\gamma : [0,1] \to M$ mit $\gamma(0) \in A$ und $\gamma(1) \in B$ gibt. Dann ist die Menge $\gamma^{-1}[A]$ abgeschlossen in $[0,1]$ und besitzt daher ein Maximum $t_0 \in [0,1]$. Ist etwa $\gamma(t_0) = (0,y)$ mit $y \in [-1,1]$, so kann man durch Anwendung von (c) auf dieses y einen Widerspruch erhalten.]