Martin Schmidt
Sebastian Klein

# Analysis III
## 9. Übung

30. Oktober 2015

(abzugeben in der Vorlesung am 6. November 2015)

**29. Flüsse von Vektorfeldern.**

**(a)** Es sei $F$ das glatte Vektorfeld auf $\mathbb{R}^2$, das durch

$$F(x,y) = (y, -x)$$

gegeben ist. Bestimme den maximalen Fluss von $F$. *(5 Punkte)*

[Tipp. Es ist hilfreich, $\mathbb{R}^2$ mit $\mathbb{C}$ zu identifizieren, und dann $F$ mit Hilfe der komplexen Multiplikation umzuschreiben.]

**(b)** Es sei $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ die 2-Sphäre und $a \in \mathbb{R}$. Wir definieren $F : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^3$ durch

$$F(x,y,z) = (a\,y, -a\,x, 0)\ .$$

**(i)** Zeige, dass $F$ ein Vektorfeld auf $\mathbb{S}^2$ definiert. *(3 Punkte)*

**(ii)** Bestimme den maximalen Fluss $\psi_F$ von $F$. *(5 Punkte)*

**(iii)** Sei $M := \mathbb{S}^2 \setminus \{(1,0,0)\}$. Finde eine offene Umgebung $W$ von $\{0\} \times M$ in $\mathbb{R} \times M$, so dass $\psi_F|W$ ein Fluss auf $M$ ist. Ist $\psi_F|W$ ein globaler Fluss auf $M$? *(5 Punkte)*

**30. Ein Beispiel für ein nicht-vollständiges Vektorfeld.** Sei

$$W := \left\{ (t,(x,y)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 2\,(x^2+y^2) \cdot t < 1 \right\}$$

und

$$\psi : W \to \mathbb{R}^2,\ (t,(x,y)) \mapsto \frac{1}{\sqrt{1 - 2\,(x^2+y^2)\cdot t}} \cdot (x,y)\ .$$

**(a)** Zeige, dass $\psi$ ein Fluss auf $\mathbb{R}^2$ ist. *(5 Punkte)*

**(b)** Bestimme ein Vektorfeld $F \in \mathrm{Vec}^\infty(\mathbb{R}^2)$, so dass $\psi$ Fluss von $F$ ist. *(5 Punkte)*

**(c)** Begründe, dass $\psi$ der maximale Fluss $\psi_F$ von $F$ ist, und dass das Vektorfeld $F$ folglich nicht vollständig ist. *(2 Punkte)*

**31. Über die Integralkurven von Vektorfeldern der Form $\boldsymbol{\lambda F}$.** Sei $X$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, $F \in \mathrm{Vec}^\infty(X)$, $\lambda \in C^\infty(X,\mathbb{R})$, $G := \lambda F \in \mathrm{Vec}^\infty(X)$ und $p_0 \in X$.

Zeige: Ist $\alpha : I \to X$ eine Integralkurve von $F$ mit $\alpha(0) = p$, und ist $f : J \to I$ eine Lösung des Differentialgleichungs-Anfangswertproblems

$$f'(t) = \lambda(\alpha(f(t))) \quad \text{mit} \quad f(0) = 0\ ,$$

so ist $\beta := \alpha \circ f : J \to X$ eine Integralkurve von $G$ mit $0 \in J$ und $\beta(0) = p_0$, und man erhält jede solche Integralkurve von $G$ auf diese Weise. *(8 Punkte)*

**32. An Vektorfelder angepasste Karten.**

Es sei $X$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, $n := \dim(X)$, $x_0 \in X$ und $F \in \mathrm{Vec}^\infty(X)$ ein Vektorfeld mit $F(x_0) \neq 0$. Man zeige, dass es eine Karte $(U, \phi)$ von $X$ mit $x_0 \in U$ und

$$T_x(\phi)^{-1}(e_1) = F(x) \quad \text{für } x \in U$$

gibt. Dabei bezeichnet $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$ den ersten Standardeinheitsvektor des $\mathbb{R}^n$.

*(12 Punkte)*

[Tipp. Sei $\psi$ der maximale Fluss von $F$. Dann existieren $\varepsilon > 0$ und eine Umgebung $\widehat{U}$ von $x_0$ in $X$, so dass $\psi$ mindestens auf $(-\varepsilon, \varepsilon) \times \widehat{U}$ definiert ist. Man wähle eine $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit $S$ von $\widehat{U}$ mit $x_0 \in S$ und $F(x_0) \notin T_{x_0}S$ (warum existiert eine solche?). Damit untersuche man $\psi|((-\varepsilon, \varepsilon) \times S)$ in der Nähe von $(0, x_0)$ mithilfe des Satzes von der Umkehrfunktion.]