Martin Schmidt
Sebastian Klein

Analysis III
5. Übung

2. Oktober 2015

(abzugeben in der Vorlesung am 9. Oktober 2015)

14. Über das kartesische Produkt zweier differenzierbarer Mannigfaltigkeiten.

Seien M und N differenzierbare Mannigfaltigkeiten der Dimension $\dim(M) = m$ bzw. $\dim(N) = n$. Zeige, dass $M \times N$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension $m+n$ ist. *(8 Punkte)*

[Tipp. Wenn $\phi : U \to \mathbb{R}^m$ bzw. $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ Karten von M bzw. N sind, so ist $\phi \times \psi : U \times V \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, $(x,y) \mapsto (\phi(x), \psi(y))$ eine Karte für $M \times N$.]

15. Über Untermannigfaltigkeiten und Einbettungen.

(a) Sei $a > 0$ und $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y,z) = \left(a - \sqrt{x^2+y^2}\right)^2 + z^2.$$

Zeige, dass das Urbild $f^{-1}[\{b^2\}]$ für jedes b mit $0 < b < a$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ ist. *(6 Punkte)*

(b) Man untersuche mit Beweis, für genau welche $t \in \mathbb{R}$

$$A := \left\{ (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \,\middle|\, x_1^2 + \ldots + x_n^2 - x_{n+1}^2 = t \right\}$$

eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n+1}$ ist. *(10 Punkte)*

[Nicht vergessen: Falls für ein $t \in \mathbb{R}$ die Voraussetzungen eines Satzes aus Abschnitt 1.6 *nicht* erfüllt sind, muss trotzdem untersucht werden, ob das entsprechende A eine Mannigfaltigkeit ist oder nicht.]

(c) Sei $S := \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2+y^2+z^2 = 3 \right\}$ und $f : S \to \mathbb{R}^5$ definiert durch

$$f(x,y,z) = \left(xy, xz, yz, \tfrac{1}{2}(x^2-y^2), \tfrac{1}{2\sqrt{3}}(x^2+y^2-2z^2)\right) .$$

(i) Zeige, dass f eine Immersion ist. *(4 Punkte)*

(ii) Zeige, dass für $(x,y,z), (\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{z}) \in S$ gilt:

$$f(\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{z}) = f(x,y,z) \iff (\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{z}) = \pm(x,y,z) . \qquad (*)$$

Daher ist $f : S \to \mathbb{R}^5$ keine Einbettung. *(6 Punkte)*

[Tipp. Man betrachte die komplexen Zahlen $w := x + iy$ und $\widetilde{w} := \widetilde{x} + i\widetilde{y}$, und untersuche die Gleichung $w^2 - \widetilde{w}^2 = 0$.]

Bemerkung. Identifiziert man in S jeweils die Antipodenpunkte (d.h. $\pm(x,y,z)$) miteinander, so erhält man den sogenannten 2-*dimensionalen reell-projektiven Raum* $\mathbb{RP}^2$. Aus $(*)$ ergibt sich, dass f eine *injektive* Immersion $\widetilde{f} : \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{R}^5$ induziert, von der man zeigen kann, dass es sich tatsächlich sogar um eine Einbettung handelt. $\widetilde{f}$ ist eine Variante der sogenannten *Veronese-Einbettung*.

16. Über Karten, die an Abbildungen von konstantem Rang angepasst sind.

Es seien X und Y Mannigfaltigkeiten der Dimension n bzw. m und $f : X \to Y$ eine Abbildung von konstantem Rang r.

Zeige: Für jedes $p \in X$ existieren Karten $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ von X und $\psi : V \to \mathbb{R}^m$ von Y mit $p \in U$, $f[U] \subset V$, $\phi(p) = 0$ und $\psi(f(p)) = 0$, so dass $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ gegeben ist durch

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi[U] \to \mathbb{R}^m,\ (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_r, \underbrace{0, \ldots, 0}_{m-r}) . \qquad \textit{(10 Punkte)}$$

[Tipp. Um die Bedingung $f[U] \subset V$ zu erreichen, wähle man zunächst irgendwelche Karten $\phi_1 : U_1 \to \mathbb{R}^n$ von X um p und $\psi_1 : V_1 \to \mathbb{R}^m$ von Y um $f(p)$, und schränke dann ϕ_1 auf $f^{-1}[V_1] \cap U_1$ ein. Im Weiteren wende man Satz 1.43 an, sowie die Aussage aus der Linearen Algebra, dass jede lineare Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ vom Rang r konjugiert zu $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_r, 0, \ldots, 0)$ ist.]

Bemerkung. Diese Aussage zeigt, dass Abbildungen von konstantem Rang *lokal* die Komposition von einer Submersion mit einer Immersion sind. Aus diesem Grund nennt man sie manchmal auch *Subimmersionen*.

17. Ein Differenzierbarkeitstest.

Es seien X, Y und Z Mannigfaltigkeiten, und $f : Y \to Z$ eine Immersion.

Zeige, dass für jede *stetige* Abbildung $g : X \to Y$ gilt: Wenn $f \circ g$ glatt ist, so auch g.
(6 Punkte)

[Tipp. Aufgabe 16.]