Martin Schmidt
Sebastian Klein

Analysis III
Lösung zu Aufgabe 20(b), (c)

20. **(b)** Es seien $(E,(a,b),\pi)$, t_0, f_0 und J wie im Tipp. Offenbar ist $(t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon) \subset J$, also $J \neq \varnothing$, und außerdem gilt für $t_1 < t_0 < t_2$ mit $t_1, t_2 \subset J$ schon $(t_1, t_2) \subset J$. Wegen letzterer Eigenschaft ist J ein Intervall. Wir zeigen nun, dass J in (a,b) offen und abgeschlossen ist. Weil (a,b) zusammenhängend ist, folgt daraus $J = (a,b)$ und damit die Behauptung nach Lemma 1.54.

Zu J offen in (a,b). Es sei $t_1 \in J$, ohne Beschränkung der Allgemeinheit mit $t_1 > t_0$. Wegen $t_1 \in J$ existiert nach der Definition von J ein nullstellenfreier Schnitt $f : (t_0-\varepsilon, t_1) \to E$. Andererseits existiert eine Umgebung (t_2, t_3) von t_1 in (a,b) (hier ist $t_0 < t_2 < t_1 < t_3$), über der das Geradenbündel $(E,(a,b),\pi)$ trivial ist; sei $\psi : \mathbb{R} \times (t_2, t_3) \to \pi^{-1}[U]$ die zugehörige lokale Trivialisierung. Dann existiert eine glatte Funktion $g : (t_2, t_1) \to \mathbb{R}$, die $f|(t_2, t_1)$ bezüglich der lokalen Trivialisierung ψ beschreibt, in folgendem Sinne: Für $t \in (t_2, t_1)$ ist $f(t) = \psi(g(t), t)$. Mit f ist auch g nullstellenfrei, daher kann g nach dem Zwischenwertsatz sein Vorzeichen nicht ändern. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $g > 0$.

Wir wählen nun eine Zerlegung der Eins auf dem Intervall $(t_0-\varepsilon, t_3)$, und zwar zu der Überdeckung $\{U_1 := (t_0-\varepsilon, t_1), U_2 := (t_2, t_3)\}$ dieses Intervalls: Demnach existieren zwei glatte Funktionen $h_1, h_2 : (t_0-\varepsilon, t_3) \to \mathbb{R}$ mit $0 \leq h_k \leq 1$ für $k \in \{1,2\}$, $\mathrm{Tr}(h_k) \subset U_k$ und $h_1 + h_2 = 1$. Damit definieren wir den glatten Schnitt

$$\widetilde{f} : (t_0-\varepsilon, t_3) \to \mathbb{R},\ t \mapsto h_1(t)\cdot f(t) + h_2(t)\cdot \psi(1,t)\,.$$

Für $t \in (t_0-\varepsilon, t_2]$ ist $h_2(t) = 0$ und somit $\widetilde{f}(t) = f(t) \neq 0$; für $t \in (t_2, t_3)$ ist

$$\begin{aligned}\widetilde{f}(t) &= h_1(t)\cdot f(t) + h_2(t)\cdot\psi(1,t) = h_1(t)\cdot\psi(g(t),t) + h_2(t)\cdot\psi(1,t)\\ &= \psi(h_1(t)\,g(t) + h_2(t)\,1, t)\,,\end{aligned}$$

wegen $g(t) > 0$ und den Eigenschaften von h_k ist $h_1(t)\,g(t) + h_2(t)\,1 > 0$ und damit ebenfalls $\widetilde{f}(t) \neq 0$. Also ist $\widetilde{f}$ ein nullstellenfreier Schnitt von π über $(t_0-\varepsilon, t_3)$ und daher ist $t_3 \in J$. Weil J ein Intervall ist, folgt $(t_2, t_3) \subset J$.

Zu J abgeschlossen in (a,b). Sei $t_1 \in \partial J \cap (a,b)$ ein Randpunkt von J; ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei wieder $t_1 > t_0$. Dann gibt es eine Umgebung (t_2, t_3) von t_1 in (a,b), über der $(E,(a,b),\pi)$ trivial ist; sei $\psi : \mathbb{R}\times(t_2,t_3) \to \pi^{-1}[U]$ die zugehörige lokale Trivialisierung. Weil t_1 ein Randpunkt des Intervalls J mit $t_1 > t_0 \in J$ ist, folgt $(t_2, t_1) \subset J$. Es existiert also ein t_4 mit $t_2 < t_4 < t_1$ und $t_4 \in J$, und somit nach der Definition von J ein nullstellenfreier Schnitt $f : (t_0-\varepsilon, t_4) \to E$. Jetzt gehen wir analog wie im ersten Teil des Beweises vor, um f zu einem nullstellenfreien Schnitt auf $(t_0-\varepsilon, t_1)$ fortzusetzen. Wir definieren wieder $g : (t_2, t_4) \to \mathbb{R}$ durch $f(t) = \psi(g(t), t)$ für $t \in (t_2, t_4)$ und dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, dass $g > 0$ ist. Wir wählen eine

Zerlegung der Eins (h_1, h_2) auf dem Intervall $(t_0 - \varepsilon, t_1)$ zur Überdeckung $(U_1 := (t_0 - \varepsilon, t_4), U_2 := (t_2, t_1)\}$, und definieren damit den glatten Schnitt

$$\widetilde{f} : (t_0 - \varepsilon, t_1) \to \mathbb{R},\ t \mapsto h_1(t) \cdot f(t) + h_2(t) \cdot \psi(1, t)\ .$$

Analog wie zuvor sieht man, dass der Schnitt $\widetilde{f}$ nullstellenfrei ist. Damit folgt $t_1 \in J$.

(c) Für die Konstruktion des Geradenbündels $(E, \mathbb{S}^1, \pi)$ durch Anwendung von Beispiel 1.51 ist nur zu zeigen, dass die Kozykelbedingung erfüllt ist, und dies ist hier automatisch gegeben, weil die offene Überdeckung von $\mathbb{S}^1$ nur zwei Elemente enthält, und es deshalb nur eine einzige Übergangsfunktion gibt.

Wir zeigen nun, dass das so konstruierte Geradenbündel nicht trivial ist.

Angenommen, $(E, \mathbb{S}^1, \pi)$ wäre trivial. Dann gibt es nach Lemma 1.54 einen globalen, nullstellenfreien, glatten Schnitt $f : \mathbb{S}^1 \to E$. Für $k \in \{1, 2\}$ ist π über U_k trivial, sei $\psi_k : \mathbb{R} \times U_k \to \pi^{-1}[U_k]$ die zugehörige lokale Trivialisierung. Es existieren glatte Funktionen $g_k : U_k \to \mathbb{R}$ mit

$$\forall x \in U_k\ :\ f(x) = \psi_k(g_k(x), x)\ .$$

Mit f ist auch g_k nullstellenfrei. Da U_k zusammenhängend ist, kann daher g_k sein Vorzeichen auf U_k nicht ändern. Andererseits gilt für $x \in V_\pm$:

$$\psi_2(g_2(x), x) = f(x) = \psi_1(g_1(x), x) = \psi_2(\phi_{U_1,U_2}(x)\, g_1(x), x) = \psi_2(\pm g_1(x), x)$$

und daher (weil $\psi_2(\ldots, x) : \mathbb{R} \to \pi^{-1}[\{x\}]$ ein Vektorraum-Isomorphismus ist)

$$g_2(x) = \pm g_1(x)\ .$$

g_1 und g_2 haben also auf V_+ dasselbe Vorzeichen, aber auf V_- entgegengesetztes Vorzeichen. Das ist aber ein Widerspruch dazu, dass g_1 und g_2 ihr Vorzeichen nicht ändern können.