Martin Schmidt
Sebastian Klein

Analysis III
10. Übung

6. November 2015

(abzugeben in der Vorlesung am 13. November 2015)

33. Die Berechnung der Lieklammer in Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$.

Es sei $X \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ und $F, G \in \mathrm{Vec}^\infty(X)$. Mithilfe von Satz 2.22(iii),(iv) formuliere und beweise man eine zu der Formel von Aufgabe 26(a) analoge Regel für die Berechnung von $[F, G](x)$ für $x \in X$. *(7 Punkte)*

34. Nochmal über Integralkurven.

Es sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, F ein glattes Vektorfeld auf X, $x_0 \in X$ und $\gamma : J \to X$ die maximale Integralkurve von F mit $\gamma(0) = x_0$ (siehe Satz 2.7).

Zeige:

(a) *Entweder* ist γ konstant, *oder* γ ist injektiv, *oder* γ ist periodisch, letzteres bedeutet: Es gilt $J = \mathbb{R}$, γ ist nicht konstant, aber es gibt mindestens eine Zahl $p > 0$ (eine *Periode* von γ), so dass

$$\gamma(t + p) = \gamma(t) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}$$

gilt. Man beachte, dass p nicht eindeutig bestimmt ist. *(6 Punkte)*

(b) γ ist genau dann konstant, wenn $F(x_0) = 0$ gilt. *(2 Punkte)*

(c) Ist γ periodisch, so gibt es unter den Perioden von γ eine *minimale Periode* $p_0 > 0$, d.h. p_0 ist eine Periode von γ, so dass es keine andere Periode p von γ mit $0 < p < p_0$ gibt. Dann ist $\gamma|[0, p_0)$ injektiv, und die Abbildung $f : \mathbb{S}^1 \to X$, die durch

$$f(\cos(t), \sin(t)) = \gamma\left(\frac{p_0}{2\pi} \cdot t\right) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}$$

charakterisiert wird (dabei fassen wir den Kreis $\mathbb{S}^1$ als die Menge $\mathbb{S}^1 = \{\, (\cos(t), \sin(t)) \,|\, t \in \mathbb{R} \,\} \subset \mathbb{R}^2$ auf), ist eine Einbettung mit $f[\mathbb{S}^1] = \gamma[\mathbb{R}]$. Also ist das Bild $\gamma[\mathbb{R}]$ eine Untermannigfaltigkeit von X. *(6 Punkte)*

(d) Ist γ injektiv, und X außerdem kompakt, so ist $J = \mathbb{R}$ und $\gamma[\mathbb{R}]$ besitzt mindestens einen Häufungspunkt in X. Daher ist die injektive Immersion $\gamma : \mathbb{R} \to X$ in diesem Fall sicher *keine* Einbettung, und $\gamma[\mathbb{R}]$ *keine* Untermannigfaltigkeit von X. *(6 Punkte)*

35. Integralkurven auf Kreis und Torus.

Sei $\mathbb{S}^1 = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = 1 \,\}$ der Einheitskreis. Aus Aufgabe 19(b) wissen wir, dass das Tangentialbündel $T\mathbb{S}^1$ von $\mathbb{S}^1$ trivial ist, und dass

$$\psi : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 \to T\mathbb{S}^1,\ \big(s, (x, y)\big) \mapsto s \cdot (-y, x)$$

eine globale Trivialisierung von $T\mathbb{S}^1$ ist (hierbei wird für $(x, y) \in \mathbb{S}^1$ jeweils $T_{(x,y)}\mathbb{S}^1$ mit $\{ v \in \mathbb{R}^2 \mid \langle v, (x, y)\rangle = 0 \} = \mathbb{R} \cdot (-y, x)$ identifiziert, siehe Aufgabe 19(a)).

Für $\alpha > 0$ betrachten wir das nullstellenfreie, glatte Vektorfeld

$$F_\alpha : \mathbb{S}^1 \to T\mathbb{S}^1,\ (x, y) \mapsto \psi\big(\alpha, (x, y)\big)$$

und die maximale Integralkurve $\gamma_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ von F_α mit $\gamma_\alpha(0) = (1, 0)$.

(a) Zeige, dass γ_α durch

$$\gamma_\alpha(t) = \big(\cos(\alpha \cdot t), \sin(\alpha \cdot t)\big)$$

gegeben ist; folgere, dass γ_α periodisch ist, und bestimme die minimale Periode von γ_α (siehe Aufgabe 34). *(5 Punkte)*

Die 2-dimensionale Mannigfaltigkeit $\mathbb{T}^2 := \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ bezeichnet man als („flachen“) 2-Torus. Für $\alpha, \beta > 0$ betrachten wir das Vektorfeld

$$G_{\alpha,\beta} : \mathbb{T}^2 \to T\mathbb{T}^2,\ \big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) \mapsto \big(F_\alpha(x_1, y_1)\,,\ F_\beta(x_2, y_2)\big)\ .$$

Zeige:

(b) Die Kurve

$$\eta_{\alpha,\beta} : \mathbb{R} \to \mathbb{T}^2,\ t \mapsto \big(\gamma_\alpha(t), \gamma_\beta(t)\big)$$

ist die maximale Integralkurve von $G_{\alpha,\beta}$ mit $\eta_{\alpha,\beta}(0) = \big((1, 0), (1, 0)\big) \in \mathbb{T}^2$. *(3 Punkte)*

(c) Ist $\frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{Q}$, so ist $\eta_{\alpha,\beta}$ periodisch, und folglich $\eta_{\alpha,\beta}[\mathbb{R}]$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{T}^2$. Man bestimme die minimale Periode (siehe Aufgabe 34(c)) von $\eta_{\alpha,\beta}$. Das Bild eines derartigen $\eta_{\alpha,\beta}$ heißt *Torusknoten.* *(10 Punkte)*

(d) Ist $\frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, so ist $\eta_{\alpha,\beta}$ injektiv, und daher nach Aufgabe 34(d) $\eta_{\alpha,\beta} : \mathbb{R} \to \mathbb{T}^2$ sicher *keine* Einbettung. *(5 Punkte)*

Bemerkung. Mit dem „Poincareschen Wiederkehrsatz“ kann man zeigen, dass in diesem Fall $\eta_{\alpha,\beta}[\mathbb{R}]$ sogar dicht in $\mathbb{T}^2$ liegt.