Martin Schmidt
Sebastian Klein

Analysis III
4. Übung

25. September 2015

(abzugeben in der Vorlesung am 2. Oktober 2015)

10. Der lokale Umkehrsatz.

Es seien M und N differenzierbare Mannigfaltigkeiten, $f : M \to N$ eine glatte Abbildung, und $p \in M$. Wir setzen voraus, dass die Tangentialabbildung $T_p(f) : T_pM \to T_{f(p)}N$ ein Vektorraum-Isomorphismus ist. Man zeige dann, dass Umgebungen U von p in M und V von $f(p)$ in N existieren, so dass $f|_U : U \to V$ ein glatter Diffeomorphismus ist. *(8 Punkte)*

[Tipp. Man führe die Behauptung auf den entsprechenden Satz der Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$ zurück.]

11. Über Immersionen differenzierbarer Mannigfaltigkeiten.

(a) Untersuche, an welchen Stellen die folgenden Abbildungen immersiv sind.

(i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto f(t) = (\cos(2t), \sin(2t), t)$. *(4 Punkte)*

(ii) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto g(t) = (t^2, t^3)$. Ist g injektiv? *(4 Punkte)*

(b) Es sei M eine n-dimensionale, kompakte differenzierbare Mannigfaltigkeit und $f : M \to \mathbb{R}^n$ eine glatte Abbildung. Zeige, dass f keine Immersion sein kann. *(8 Punkte)*

[Tipp. Man nehme an, die Behauptung sei falsch. Man verwende allgemeine Resultate, um zu zeigen, dass $f[M]$ in $\mathbb{R}^n$ abgeschlossen ist, und Aufgabe 10, um zu zeigen, dass $f[M]$ in $\mathbb{R}^n$ offen ist. Dies führe man zu einem Widerspruch.]

12. Über die Tangentialabbildung.

(a) Beweise die Teile (i)–(iv) aus Satz 1.35 der Vorlesung ausführlich. *(4+2+2+2 Punkte)*

(b) Es seien X und Y differenzierbare Mannigfaltigkeiten, wobei X zusammenhängend sei, und $f : X \to Y$ eine differenzierbare Abbildung. Zeige, dass f genau dann konstant ist, wenn $T_x(f) = 0$ für alle $x \in X$ gilt. *(4 Punkte)*

13. Über den Zusammenhang zwischen Derivationen und Vektoren im $\mathbb{R}^n$.

Sei A eine $\mathbb{R}$-Algebra mit Eins-Element $\mathbb{1}_A$ und $\varphi : A \to \mathbb{R}$ ein Algebrahomomorphismus (d.h. insbesondere $\varphi(\mathbb{1}_A) = 1$). Sei $\mathrm{Der}_\varphi(A) \subset \mathcal{L}(A, \mathbb{R})$ der Unterraum von $\mathcal{L}(A, \mathbb{R})$, der durch

$$\mathrm{Der}_\varphi(A) := \{\, D \in \mathcal{L}(A, \mathbb{R}) \,\big|\, D(ab) = \varphi(a)D(b) + D(a)\varphi(b) \ \text{ für } a, b \in A \,\}$$

definiert ist. Zeige:

(a) Für alle $D \in \mathrm{Der}_\varphi(A)$ gilt: $D(\mathbb{1}_A) = 0$. *(4 Punkte)*

(b) Seien $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $a_1, \dots, a_n \in \ker(\varphi)$ sowie $b_1, \dots, b_m, c_1, \dots, c_m \in \ker(\varphi)$. Dann gilt für alle $D \in \mathrm{Der}_\varphi(A)$

$$D\left(\lambda_0 \mathbb{1}_A + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i + \sum_{j=1}^{m} b_j c_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i D(a_i).$$

(4 Punkte)

(c) Wenn $a_1, \dots, a_n \in \ker(\varphi)$ existieren, so dass jedes $a \in A$ als $a = \lambda_0 \mathbb{1}_A + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i + \sum_{j=1}^{m} b_j c_j$ mit $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ sowie $b_1, \dots, b_m, c_1, \dots, c_m \in \ker(\varphi)$ geschrieben werden kann, so ist die Abbildung

$$\Psi : \mathrm{Der}_\varphi(A) \to \mathbb{R}^n, \quad D \mapsto (D(a_1), \dots, D(a_n))$$

injektiv. *(4 Punkte)*