Martin Schmidt
Eva Lübcke

Fourieranalysis
3. Übung

24. Februar 2015

8. Zu Funktionen mit beschränkter Variation.

(a) In allen folgenden Übungsaufgaben bezeiche S_n die n-te Partialsumme der Fourierreihe einer Funktion $f \in L^p(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ mit $1 \leq p \leq \infty$, d.h. für $n \in \mathbb{N}_0$ und $x \in \mathbb{R}$ ist

$$S_n(x) := D_n * f.$$

Zeige, dass für eine 2π-periodische Funktion mit beschränkter Variation auf $[-\pi, \pi]$ gilt, dass die Fourierreihe stark in $L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ konvergiert, d.h. dass für $n \to \infty$ gilt

$$\|f - S_n\|_1 \to 0.$$

Tipp: Benutze, dass im Beweis von Satz 1.25 gezeigt wurde, dass $|n\hat{f}(n)| \leq \frac{V}{2}$.

(b) Für eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ definieren wir die positive und negative Variation über $[a, b]$ durch

$$P_{[a,b]}(f) := \sup \left\{ P_{\mathcal{D}}(f) = \sum_{j=1}^{n} (f(x_j) - f(x_{j-1}))^+ \right\}$$

$$N_{[a,b]}(f) := \sup \left\{ N_{\mathcal{D}}(f) = \sum_{j=1}^{n} (f(x_j) - f(x_{j-1}))^- \right\},$$

wobei das Supremum über alle Partitionen $\mathcal{D} : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ und $\alpha^+ = \max\{\alpha, 0\}, \alpha^- = \max\{-\alpha, 0\}$ für $\alpha \in \mathbb{R}$.

(i) *Zeige*, dass

$$V_{[a,b]}(f) = P_{[a,b]}(f) + N_{[a,b]}(f)$$

Tipp: Benutze, dass für eine Partition $\mathcal{D}'$ von $\mathcal{D}$ gilt

$$V_{\mathcal{D}}(f) \leq V_{\mathcal{D}'}(f), \; P_{\mathcal{D}}(f) \leq P_{\mathcal{D}'}(f), \; N_{\mathcal{D}}(f) \leq N_{\mathcal{D}'}(f).$$

(ii) *Zeige*, dass für $V_{[a,b]}(f) < \infty$ sowohl $P_{[a,x]}(f)$ als auch $N_{[a,x]}(f)$ monoton steigende Funktionen für $x \in [a, b]$ sind und dass

$$f(x) = f(a) + P_{[a,x]}(f) - N_{[a,x]}(f).$$

9. Zum Dirichletkern.

Zeige, dass der Dirichletkern keine Dirac-Folge ist.

10. Punktweise Konvergenz einer Fourierreihe.

(a) *Bestimme* die Fourierreihe von $f \in L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{4} & \text{für } 0 < x < \pi \\ -\frac{\pi}{4} & \text{für } -\pi < x < 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \text{ und } x = \pi \end{cases}$$

und *zeige*, dass diese für alle $x \in \mathbb{R}$ punktweise gegen $f(x)$ konvergiert.

(b) *Beweise* mit Hilfe von (a) die Leibnitzformel $\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2n-1}$.

Abgabe am Dienstag, den 3. März 2015, in der Vorlesung.