Martin Schmidt
Eva Lübcke

Fourieranalysis
13. Übung

20. Mai 2015

35. Zu Banachalgebren.

Sei X ein kompakter Hausdorffraum und $C(X,\mathbb{C})$ die Banachalgebra aller stetigen Funktionen von X nach $\mathbb{C}$ mit der Supremumsnorm. Definiere zudem für alle $x \in X$ die Menge

$$I_x := \{f \in C(X,\mathbb{C}) \mid f(x) = 0\}.$$

(a) *Zeige*, dass für alle $x \in X$ die Banachalgebra $C(X,\mathbb{C})/I_x$ isomorph zu $\mathbb{C}$ ist.

(b) *Zeige*, dass für alle $x \in X$ die Menge I_x ein maximales Ideal ist.

(c) Sei $x \in X$. *Zeige*, dass ein Ideal I genau dann nicht in I_x enthalten ist, wenn I ein Element g_x enthält, dass $g_x(x) \neq 0$ erfüllt.

(d) *Zeige*, dass jedes Ideal von $C(X,\mathbb{C})$ in einem der Ideale $(I_x)_{x\in X}$ enthalten ist.

(e) *Zeige*, dass alle maximalen Ideale von $C(X,\mathbb{C})$ von der Form I_x mit $x \in X$ sind.

(f) *Zeige*, dass die Abbildung

$$X \to \operatorname{Spec}(C(X,\mathbb{C})), \quad x \mapsto \chi_x \ \text{ mit } \ \chi_x(f) = f(x)$$

eine bijektive Abbildung ist.
Tipp: Benutze, dass es wegen des Urysohn'schen Lemmas zu je zwei verschiedenen Punkten $x \neq y \in X$ eine Funktion $f \in C(X,\mathbb{R})$ gibt mit $f(x) \neq f(y)$.

Abgabe am Mittwoch, den 27. Mai 2015, in der Vorlesung.