Martin Schmidt
Eva Lübcke

Fourieranalysis
9. Übung

21. April 2015

26. Die Poissonsche Summenformel.

(a) Die Periodisierung von $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ist gegeben durch

$$P[f](x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n).$$

Zeige, dass $P[f](x)$ periodisch mit Periode 1 ist und *begründe*, warum diese Reihe konvergiert.

(b) Sei $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. *Zeige*, dass dann

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{2\pi\imath nx}.$$

(c) *Folgere* hieraus, dass

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)$$

(d) *Zeige*, dass die Fouriertransformation von

$$g(x) = \begin{cases} 1-|x| & \text{für } |x| \le 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben ist durch $\hat{g}(\xi) = \left(\frac{\sin(\pi\xi)}{\pi\xi}\right)^2$ für $\xi \neq 0$ und $\hat{g}(0) = 1$. *Zeige* damit und mit Hilfe der Poissonschen Summenformel, dass für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ gilt

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n+\alpha)^2} = \frac{\pi^2}{(\sin(\pi\alpha))^2}.$$

27. Herleitung des Wärmeleitungskerns auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

Wir betrachten im Folgenden die Wärmeleitungsgleichung

$$\dot{u} - \triangle u = 0 \text{ auf } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+. \tag{1}$$

(a) Es sei

$$\mathcal{H}_t(x) := \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-|x|^2/4t} & \text{für } (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeige, dass $\mathcal{H}_t(x)$ die Wärmeleitungsgleichung (1) erfüllt und dass $\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{H}_t(x) d^n x = 1$.

(b) *Bestimme* die Fouriertransformation $\hat{\mathcal{H}}_t(\xi)$ von $\mathcal{H}_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ für $t > 0$.
Tipp: Um das benötigte Integral auszurechnen, schreibe man die Fouriertransformierte von $\mathcal{H}_t$ an der Stelle $\xi \in \mathbb{R}^n$ in der Form $a \cdot \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(by+c\xi)^2} dy$ mit (von ξ und t abhängigen) Konstanten $a, b, c \in \mathbb{R}$; dafür führe man im Exponenten eine „quadratische Ergänzung“ durch. Es darf ohne Beweis benutzt werden, dass $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ gilt.

(c) Sei h eine beschränkte, stetige Funktion auf dem $\mathbb{R}^n$. Zeige, dass durch $u(x,t) := (h * \mathcal{H}_t)(x)$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung (1) auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$ mit Anfangswert

$$\lim_{t \to 0} u(x,t) = h(x).$$

gegeben ist.

(d) Sei h nun eine Eigenfunktion des Laplaceoperators auf dem $\mathbb{R}^n$, also

$$-\triangle h = \lambda h$$

Begründe, warum sich das Anfangswertproblem

$$\dot{u} - \triangle u = 0 \text{ mit } u(x,0) = h(x) \tag{2}$$

durch den Ansatz

$$u(x,t) = \varphi(t)h(x), \quad \dot{\varphi}(t)h(x) + \lambda\varphi(t)h(x) = 0$$

lösen lässt, *bestimme* φ und hiermit die Lösung des Anfangswertproblems $u(x,t)$. Warum ist diese Lösung eindeutig?
Tipp: Benutze, dass es genügt, die Funktion h als Linearkombination von Eigenfunktionen des Laplaceoperators zu betrachten.

(e) Die Eigenfunktionen des Laplaceoperators auf dem $\mathbb{R}^n$ haben die Gestalt $e^{2\pi\iota kx}$. *Zeige*, dass

$$\mathcal{H}_t(x-y) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi^2k^2t} e^{2\pi\iota(x-y)k}\, d^nk$$

und *folgere* aus den bisherigen Ergebnissen, dass durch

$$u(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-4\pi^2k^2t} e^{2\pi\iota kx} \hat{h}(k) d^nk$$

die Lösung des Anfangswertproblems (2) gegeben ist.
Tipp: Benutze, dass $\int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi\iota k\sqrt{t}+\frac{x}{2\sqrt{t}}}\, d^nk = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}$ für $x \in \iota\mathbb{R}$ und setze dies analytisch fort für alles $x \in \mathbb{C}$.

28. Nochmal zum Wärmeleitungskern auf $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

Wir haben auf Übungsblatt 8 den Wärmeleitungskern auf $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ betrachtet. In dieser Aufgabe wird nun zudem der Wärmeleitungskern auf $\mathbb{R}$ eingeführt und verwendet, um zu zeigen, dass der Wärmeleitungskern auf $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ ein Diracfolge ist.

(a) Sei

$$H_t(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{H}_t(x + 2\pi n).$$

Zeige, dass $\int\limits_{|x|<\pi} H_t(x)\, dx = 1$ und dass $H_t(x) \geq 0$.

(b) *Zeige*, dass für $0 < t \leq 1$ und $|x| < \pi$ gilt

$$H_t(x) = \mathcal{H}_t(x) + \mathcal{E}_t(x),$$

wobei der Fehler abgeschätzt werden kann durch $|\mathcal{E}_t(x)| \leq c_1 e^{-c_2/t}$ mit Konstanten $c_1, c_2 > 0$.

(c) *Folgere* aus (b), dass für jedes $\delta > 0$

$$\int\limits_{\delta<|x|\leq\pi} |H_t(x)|\, dx \to 0 \quad \text{für} \quad t \to 0.$$

Abgabe am Mittwoch, den 29. April 2015, in der Vorlesung.