Martin Schmidt
Eva Lübcke

Fourieranalysis
7. Übung

14. April 2015

21. Zur Konvergenz von Fourierreihen auf der Einheitsscheibe. Für $f \in L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ mit Fourierreihe $f(\theta) \sim \sum_{\mathbb{Z}} c_n e^{\iota n\theta}$ sei

$$F : \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}?\mathbb{C}, z \mapsto \int f \, \mathrm{d}\mu(z) = \int_{\mathbb{T}} f(t)P(t,z)\, \mathrm{d}t$$

wobei

$$P : \mathbb{T} \times \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\} \to \mathbb{R}, \quad (t,z) \mapsto \frac{1-|z|}{|t-z|^2}$$

(a) *Zeige*, dass

$$F(re^{\iota\theta}) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n r^{|n|} e^{\iota n\theta}$$

und dass die Funktion $F_r(\theta) = F(re^{\iota\theta})$ für $r \nearrow 1$ in $L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ gegen f konvergiert.

(b) *Zeige*, dass für $f \in L^p(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ für $1 \leq p < \infty$ sogar $\lim_{r\nearrow 1} \|F_r - f\|_{L^p(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})} = 0$.

22. Polyas Kriterium für positive Definitheit einer Folge. Ziel dieser Aufgabe ist es, folgendes nützliche Kriterium für die positive Definitheit einer Folge im Sinne von Satz 1.71 herzuleiten: Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine nicht-negative, nicht steigende konvexe Funktion. Konvexität bedeutet dabei, dass für $a, b, c \in \mathbb{N}$ mit $a \leq b \leq c$ gilt

$$f(b) \leq \frac{b-a}{c-a} f(c) + \frac{c-b}{c-a} f(a).$$

Dann ist die Folge a$= (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ mit $a_n := f(|n|)$ positiv definit. Die Familie solcher Folgen a wollen wir dabei als Polya-Familie P bezeichnen.

(a) *Zeige*, dass $(\hat{F}_n(|k|))_{k\in\mathbb{Z}}$ eine positiv definite Folge ist, wobei F_n den n-ten Fejér-Kern bezeichnet. *Zeige* zudem, dass $(\hat{F}_n(|k|))_{k\in\mathbb{Z}} \in P$.

(b) Sei nun $a \in P$ mit $a_m = 0$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Zeige, dass a sich schreiben lässt als

$$a = \sum_{i=0}^{m} c_i \hat{F}_i \quad \text{mit } c_i > 0.$$

Tipp: Benutze Induktion über m und betrachte hierbei für den Induktionsschritt die Folge $b := a - m a_{m-1} \hat{F}_m$.

(c) Sei nun eine beliebige Folge $a \in P$ mit $\ell := \lim a_n$ gegeben. *Zeige*, dass a eine positiv definite Folge ist, wenn $a - \ell$ eine positiv definite Folge ist.

(d) Sei also $a \in P$ mit $\ell = 0$. *Zeige*, dass es für jedes $m \in \mathbb{N}$ eine Folge $b \in P$ gibt, so dass $a_n = b_n$ für $|n| \leq m$ und $b_k = 0$ für ein $k \geq m$.

(e) *Folgere* mit Hilfe von (b) und (d), dass a positiv definit ist.

23. Zum Theorem von Herglotz.

(a) Sei a eine komplexe Zahl mit $|a| = 1$. *Zeige*, dass die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n := a^n$ die zweite Bedingung im Theorem von Herglotz erfüllt und somit positiv definit ist. *Gib* ein Maß μ *an*, so dass $\hat{\mu}(n) = a^n$.

(b) *Beweise*, dass die Folge $c_0 = 1$, $c_n = 0$ für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ positiv definit im Sinne von Satz 1.71 ist und *gib* das zugehörige Maß aus dem Theorem von Herglotz *an*.

Abgabe am Dienstag, den 14. April 2015, in der Vorlesung.

Frohe Ostern!