Martin Schmidt
Eva Lübcke

Fourieranalysis
1. Übung

10. Februar 2015

1. Über die Räume L^p und ℓ^p.

(a) *Zeige*, dass für alle $1 \leq p \leq \infty$ die Räume $L^p(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ als Banachräume isometrisch isomorph sind zu $L^p([-\pi,\pi)) \simeq L^p([-\pi,\pi]) \simeq L^p((-\pi,\pi))$. *(5 Punkte)*

(b) *Zeige*, dass $c_0(\mathbb{Z})$ ein abgeschlossener Untervektorraum von $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ ist. *(6 Punkte)*

(c) *Zeige*, dass für die Gruppe $\mathbb{Z}$ die unitären Charaktere nur in dem Raum $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ und in keinem der Räume $\ell^p(\mathbb{Z})$ mit $1 \leq p < \infty$ liegen. *(2 Punkte)*

2. Ein nicht-stetiger Homomorpismus von $\mathbb{T}$ nach $\mathbb{T}$.

Ziel dieser Aufgabe ist es, einen nicht-stetigen Gruppen-Homomorphismus $h : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ anzugeben. Hierbei identifizieren wir $\mathbb{T}$ mit $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ und fassen $\mathbb{R}$ als Vektorraum über $\mathbb{Q}$ auf.

(a) Sei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung. *Gib* eine Bedingung *an* h an, so dass h einen Gruppenhomomorphismus

$$\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$$

induziert. *(3 Punkte)*

(b) *Zeige*, dass es ein solches h gibt, welches nicht stetig ist. *(8 Punkte)*
Hinweis: Benutze, dass der $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{R}$ eine Basis besitzt und dass π nicht rational ist.

3. Zusammenhang zwischen Symmetrien und Fourierkoeffizienten einer Funktion.

Sei f eine 2π-periodische integrierbare Funktion auf $\mathbb{R}$.

(a) Zeige, dass die Fourierreihe von f geschrieben werden kann als

$$f(x) \sim \hat{f}(0) + \sum_{n\in\mathbb{N}} \left[\left(\hat{f}(n) + \hat{f}(-n)\right) \cos(nx) + \iota \left(\hat{f}(n) - \hat{f}(-n)\right) \sin(nx) \right].$$ *(2 Punkte)*

(b) *Zeige*, dass für eine gerade Funktion f gilt $\hat{f}(n) = \hat{f}(-n)$ und *schreibe* die zugehöriger Fourierreihe in der Form aus (a). *(2 Punkte)*

(c) *Zeige*, dass für eine ungerade Funktion f gilt $\hat{f}(n) = -\hat{f}(-n)$ und *schreibe* die zugehöriger Fourierreihe in der Form aus (a). *(2 Punkte)*

(d) Sei nun $f(x+\pi) = f(x)$ für fast alle $x \in \mathbb{R}$. *Zeige*, dass $\hat{f}(n) = 0$ für alle ungeraden $n \in \mathbb{N}$. *(3 Punkte)*

(e) *Zeige*, dass f genau dann fast überall reellwertig ist, wennn $\overline{\hat{f}(n)} = \hat{f}(-n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und *benutze* (a), um die Fourierreihe $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)e^{\iota nx}$ in eine Reihe von reellen Funktionen umzuschreiben. *(4 Punkte)*

4. Berechnung der Fourierreihe aus einer Funktion.

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 2π-periodische, ungerade Funktion, welche auf $[0, \pi]$ gegeben ist durch $f(x) = x(\pi - x)$.

(a) Zeichne den Graphen von f. *(2 Punkte)*

(b) Berechne die Fourierkoeffizienten von f und zeige, dass

$$f(x) \sim \frac{8}{\pi} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\sin((2n-1)x)}{(2n-1)^3}. \qquad (8\ Punkte)$$

(c) Die Funktion $f(x)$ hat also dieselben Nullstellen wie $sin(x)$ und auch die Punkte $x \in \mathbb{R}$, an denen $f(x)$ und $sin(x)$ maximal bzw. minimal werden, stimmen überein. Daher stellt sich die Frage, für welches $\alpha \in \mathbb{R}$ der Abstand

$$\|f(x) - \alpha \sin(x)\|_{L^2(\mathbb{R}^2/\Gamma)}$$

minimal ist. *Bestimme* α. *(3 Punkte)*

Abgabe am Dienstag, den 17. Februar 2015, in der Vorlesung.