Martin Schmidt
Eva Lübcke

# Fourieranalysis
## 10. Übung

29. April 2015

**28. Eine Schwartzfunktion.**

(a) *Zeige*, dass $f(x) = e^{-x^2}\left(e^{-x^2} + \sin^2(x)\right)$ eine positive Schwartzfunktion ist

(b) Zeige, dass $\sqrt{f(x)}$ keine Schwartz-Funktion ist.
*Tipp:* Berechne die zweite Ableitung von $\sqrt{f(x)}$ und finde eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so dass $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{f(x_n)}\right)'' \neq 0$.

**29. Die Heisenbergsche Unschärferelation**
Im Folgenden sei $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ mit $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2\,dx = 1$.

(a) *Zeige*, dass

$$1 = -\int_{-\infty}^{\infty} x\psi'(x)\overline{\psi(x)} + x\overline{\psi'(x)}\psi(x)\,dx.$$

(b) *Folgere* hieraus und mit Hilfe der Plancherelformel, dass

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} x^2|\psi(x)|^2\,dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} \xi^2|\hat{\psi}(\xi)|^2\,d\xi\right) \geq \frac{1}{16\pi^2}.$$

Dies wird auch als die *Heisenbergsche Unschärferelation* bezeichnet.

(c) *Bestimme* alle $\psi$, so dass die Ungleichung in (b) zur Gleichung wird.

**Abgabe am Mittwoch, den 6. Mai 2015, in der Vorlesung.**