Martin Schmidt
Eva Lübcke

Fourieranalysis
2. Übung

17. Februar 2015

5. Zum Konvergenzverhalten der Fourierkoeffizienten.
Sei $f \in C^k(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. *Zeige*, dass

$$\hat{f}(n) = O(|n|^{-k}),$$

d.h. dass es eine Konstante $C \in \mathbb{R}^+$ gibt, so dass $|\hat{f}(n)| \leq C|n|^{-k}$, bzw. dass $|n|^k \hat{f}(n) = O(1)$.

6. Ein altnernativer Beweis des Riemann-Lebesgue-Lemmas.
Gegeben sei zunächst für $1 \leq p < \infty$, $f \in L^p(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ und $h \in \mathbb{R}$ die durch

$$\tau_h f(y) = f(y - h) \text{ mit } y \in \mathbb{R}$$

definierte Abbildung.

(a) *Zeige*, dass $\tau_h f \in L^p(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, $\|\tau_h f\|_p = \|f\|_p$ und dass $\|\tau_h f - f\|_p \to 0$ für $h \to \infty$.

Sei nun $f \in L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ und $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

(b) *Beweise*, dass der n-te Fourierkoeffizient $\hat{f}(n)$ von f auch durch

$$\hat{f}(n) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(x - \frac{\pi}{|n|}\right) e^{-\iota n x} \, \mathrm{d}x$$

bestimmt werden kann.

(c) *Zeige*, dass

$$|\hat{f}(n)| \leq \frac{1}{2} \|f - \tau_{\pi/|n|} f\|_1.$$

(d) Benutze (c), um zu *beweisen*, dass $\hat{f}(n) \to 0$ für $n \to \infty$.

7. Über die Faltung.
Zur Notation:
Für $f \in L^p(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ schreiben wir $f \in C^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, wenn es einen Repräsentanten f der Äquivalenzklasse $[f]$ gibt, so dass $f \in C^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$.

(a) Sei $f \in L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ und $g \in C^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. *Zeige*, dass $f * g \in C^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ und dass für $x \in \mathbb{R}$

$$(f * g)'(x) = f * g'(x)$$

Erweitere dieses Ergebnis, um zu zeigen dass für $g \in C^p(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ und $f \in C^q(\mathbb{R}^2/2\pi\mathbb{Z})$ mit $p, q \in \mathbb{N}$ gilt, dass $f * g \in C^p + q(\mathbb{R}^2/2\pi\mathbb{Z})$, bzw. dass für $p = \infty$ oder $q = \infty$ auch $f * g \in C^\infty(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$.

(b) Wir betrachten für $f \in L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ und $1 \leq p \leq \infty$ die Abbildung

$$T_f : L^p(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \to L^p(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}), \quad g \mapsto f * g.$$

Zeige, dass die Funktionen $e_n(t) := e^{\iota n t}$ mit $n \in \mathbb{Z}$ Eigenfunktionen zu T_f sind und *bestimme* die zugehörigen Eigenwerte.

Abgabe am Dienstag, den 24. Februar 2015, in der Vorlesung.