Martin Schmidt
Eva Lübcke

Fourieranalysis
6. Übung

17. März 2015

18. Über den Poissonkern.
Löse die Laplace-Gleichung $\triangle u = 0$ auf dem Halbstreifen

$$S := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1, y > 0\}$$

mit den Randbedingungen

$$u(0, y) = 0 \text{ für } 0 \leq y$$

$$u(1, y) = 0 \text{ für } 0 \leq y$$

$$u(x, 0) = f(x) \text{ für } 0 \leq x \leq 1,$$

wobei $f \in L^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ mit Randwerten $f(0) = f(1) = 0$. Schreibe

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\pi x)$$

und *drücke* u als ein Integral *aus*, in dessen Integrand f auftaucht.

19. Zum Zusammenhang zwischen den verschiedenen Summierbarkeiten einer Reihe.

(a) *Gib* ein Beispiel für eine Abel-summierbare Reihe *an*, die nicht konvergiert.
Tipp: Betrachte $c_n = (-1)^n$. Was ist der Abel-Grenzwert von $\sum c_n$?

(b) *Gib* ein Beispiel für eine Abel-summierbare Reihe *an*, die nicht Cesàro-summierbar ist.
Tipp: Betrachte $c_n := (-1)^{n-1}n$ und beachte, dass die Folge $\frac{s_n}{n}$ gegen 0 konvergiert, wenn $s_n = \sum c_n$ Cesàro-summierbar ist.

In der Vorlesung wurde also gezeigt, dass

$$\text{konvergent} \Rightarrow \text{Cesàro-summierbar} \Rightarrow \text{Abel-summierbar}.$$

Diese Aufgabe zeigt zusammen mit dem Beispiel unter Lemma 1.27, dass

$$\text{konvergent} \not\Leftarrow \text{Cesàro-summierbar} \not\Leftarrow \text{Abel-summierbar}.$$

20. Abel- und Cesarosummen an Sprüngen von Funktionen. Eine integrierbare, an x unstetige Funktion hat eine Sprungstelle an x, wenn die Grenzwerte

$$\lim_{h \nearrow 0} f(x+h) = f(x^-) \text{ sowie } \lim_{h \searrow 0} f(x+h) = f(x^+)$$

existieren und $f(x^+) \neq f(x^-)$.

(a) *Zeige*, dass an einer Sprungstelle von $f \in L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ für $0 \leq r < 1$ gilt

$$\lim_{r \to 1} (P_r * f)(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

Tipp: Begründe warum, $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{0} P_r(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} P_r(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$ ist und modifiziere den Beweis für stetiges f.

(b) *Zeige* mit ähnlicher Argumentation, dass dasselbe auch für die Cesàro-Summe an einer Sprungstelle von f gilt.

Abgabe am Dienstag, den 24. März 2015, in der Vorlesung.