Martin Schmidt
Eva Lübcke

Fourieranalysis
8. Übung

14. April 2015

24. Die Wärmeleitungsgleichung.

Auf diesem Zettel werden wir als weitere Anwendung der Fourieranalysis den Wärmeleitungskern auf der S^1 kennenlernen. Dabei sei die S^1 durch den Winkel x mit $x \in (-\pi, \pi]$ parametrisiert. Die Temperatur zu einem Zeitpunkt t an einem Winkel x bezeichnen wir mit $u(x,t)$. Sie wird durch die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

beschrieben. Die Starttemperatur $u(x,0) = f(x)$ sei vorgegeben.

(a) *Bestimme* mit Hilfe von Trennung der Variablen eine Lösung $u(x,t)$ in Form von

$$u(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{-n^2 t} e^{\iota n x}$$

und bestimme die Koeffizienten a_n für alle $n \in \mathbb{Z}$.

(b) *Begründe*, warum die Reihe $u(x,t)$ aus (a) für $f \in L^1((-\pi,\pi])$ konvergiert.

(c) Der Wärmeleitungskern ist definiert als

$$H_t(x) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2 t} e^{\iota n x}$$

Zeige, dass $u(x,t) = (f * H_t)(x)$.

(d) *Zeige*, dass für $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{\iota n x}$

$$\lim_{t \to 0} \int_{-\pi}^{\pi} H_t(x) f(x)\, dx = 2\pi f(0).$$

(e) *Zeige*, dass für $f \in L^2((-\pi,\pi])$ gilt

$$\lim_{t \to 0} \int_{x=0}^{1} |u(x,t) - f(x)|^2\, dx \to 0.$$

(f) *Zeige*, dass die Koeffizienten der Reihe $H_t(x)$ die Bedingungen aus Satz 1.41 für $t > \ln(2)$, erfüllen.

25. Bestimmen periodischer Lösungen von Differentialgleichungen mit Fourierreihen.

Bestimme, welche Bedingungen $a, b, c \in \mathbb{R}$ erfüllen müssen, so dass für $f \in C^2(\mathbb{R})$ die Differentialgleichung

$$af'' + bf' + cf = 0$$

eine nicht-triviale, 2π-periodische Lösung besitzt.

Abgabe am Dienstag, den 21. April 2015, in der Vorlesung.