Martin Schmidt
Eva Lübcke

Fourieranalysis
4. Übung

3. März 2015

11. Zur Parseval-Identität.

(a) Sei $f \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ die ungerade, 2π-periodische Funktion aus Aufgabe 4, welche definiert ist durch $f(x) = x(\pi - x)$ für $x \in [0, \pi]$. Benutze die Pareval-Identität, um zu zeigen, dass

(i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^6} = \frac{\pi^6}{960}$

(ii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$.

(b) (i) *Zeige*, dass die trigononetrische Reihe $\sum_{n\geq 2} \frac{\sin(nx)}{\log(n)}$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ konvergiert.

Tipp: Verwende das Konvergenzkriterium von Dirichlet: Eine Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k b_k$ mit $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ konvergiert, wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge ist und die Folge der Partialsummen $\sum_{k=0}^{n} b_k$ beschränkt ist.

(ii) *Beweise*, dass es keine Funktion $f \in L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ gibt, so dass die Reihe aus (i) die Fourierreihe zu f ist.

Tipp: Verwende Cauchys Verdichtungskriterium: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge nicht-negativer reeller Zahlen. Dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ genau dann, wenn $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ konvergiert.

12. Die Fourierkoeffizienten Hölder-stetiger Funktionen.

(a) Die $f \in L(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ sei Hölder-stetig von Ordnung α mit $0 < \alpha \leq 1$, d.h. es existiert ein $C > 0$, so dass für alle $x, h \in \mathbb{R}$ gilt

$$|f(x+h) - f(x)| \leq C|h|^{\alpha}.$$

Zeige, dass $\hat{f}(n) = O(|n|^{-\alpha})$.
Hinweis: Benutze, die in Aufgabe 6 gezeigte Identität

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(f(x) - f\left(x + \frac{\pi}{n}\right)\right) e^{-\iota n x}\, \mathrm{d}x.$$

(b) Nun wollen wir zeigen, dass das Ergebnis aus (a) nicht verbessert werden kann. Zeige hierfür, dass

(i) $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^{-k\alpha} e^{\iota 2^k x}$ mit $\alpha \in (0,1)$ Hölder-stetig mit Exponent α ist.

Tipp: Benutze die Zerlegung $f(x+h) - f(x) = \sum_{2^k \leq 1/|h|} + \sum_{2^k > 1/|h|}$. Benutze, dass $|1 - e^{\iota x}| < |x|$ für x hinreichend klein, um die erste Summe abzuschätzen. Benutze für die restliche Reihe die Abschätzung $|e^{\iota x} - e^{\iota y}| \leq 2$.

(ii) Zeige, dass $\hat{f}(N) = \frac{1}{N^{\alpha}}$ für $N = 2^k$.

13. Zur Fouriertransformation als Abbildung.

(a) Betrachte die Abbildung $C : L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \to c_0(\mathbb{Z})$ mit

$$C(f)(n) := \hat{f}(n)$$

Gebe an, ob C injektiv, surjektiv oder gar bijektiv ist und *begründe* deine Entscheidung.

(b) *Zeige* mit Hilfe des Satzes von Riesz-Thorin, dass für $1 \leq p, q, r \leq \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1$ und $f \in L^p(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, $g \in L^q(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ folgt, dass $f * g \in L^r(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ und dass die verallgemeinerte Youngsche Ungleichung für Konvolutionen gilt:

$$\|f * g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

Abgabe am Dienstag, den 10. März 2015, in der Vorlesung.