Martin Schmidt
Eva Lübcke

Fourieranalysis
11. Übung

6. Mai 2015

30. *Finde* eine Funktion $f(x)$ mit $x \in \mathbb{R}^3$, welche die partielle Differentialgleichung

$$f(x) + \partial_1^2 \partial_2^2 \partial_3^4 f(x) + 4\iota \partial_1^2 f(x) + \partial_2^7 f(x) = e^{-\pi|x|^2}$$

erfüllt.

Hinweis: Nullstellen von auftauchenden Polynomen müssen nicht explizit angegeben werden. Es reicht eine kurze Begründung, warum diese nicht reell sind.

31. Das Spektrum der Fouriertransformation.

Bestimme alle Eigenwerte $\lambda \in \mathbb{C}$ der Fouriertransformation, d.h. alle $\lambda \in \mathbb{C}$ so dass eine Funktion $f \not\equiv 0$ existiert mit

$$\hat{f} = \lambda f.$$

Tipp: Wende die Fouriertransformation viermal auf obige Identität an. Betrachte die Funktionen $xe^{-\pi x^2}$, $(a + bx^2)e^{-\pi x^2}$ und $(cx + dx^3)e^{-\pi x^2}$ für passende a, b, c, d, um zu zeigen, dass alle vier Einheitswurzeln Eigenwerte der Fouriertransformation sind.

32. Die Wellengleichung im $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$.

Die d-dimensionale Wellengleichung ist gegeben durch

$$\triangle u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{1}$$

Mit Hilfe von Fourieranalysis wollen wir in dieser Aufgabe eine Lösung $u(x,t)$ von (1) mit den Anfangsbedingungen

$$u(x,0) = f(x) \quad \text{and} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x)$$

für $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ finden.

(a) *Wende* die Fouriertransformation für $x \in \mathbb{R}^d$ auf Gleichung (1) an, um eine gewöhnliche Differentialgleichung in der Zeit t zu erhalten. *Zeige*, dass die Lösung dieser Differentialgleichung durch

$$\hat{u}(\xi, t) = A(\xi)\cos(2\pi|\xi|t) + B(\xi)\sin(2\pi|\xi|t)$$

gegeben ist, wobei $A(\xi)$, $B(\xi)$ für jedes ξ konstant sind

(b) *Bestimme* für jedes ξ die Konstanten $A(\xi)$, $B(\xi)$ in Abhängigkeit der Anfangswerte.

(c) *Bestimme* die Lösung $u(x,t)$ und *weise nach*, dass diese die Wellengleichung mit den gegebenen Anfangswerten erfüllt.

Abgabe am Mittwoch, den 13. Mai 2015, in der Vorlesung.