Martin Schmidt
Eva Lübcke

Fourieranalysis
5. Übung

10. März 2015

14. Zu den Abbildungen $L : L^p(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \to \ell^q(\mathbb{Z})$ mit $q^{-1} + p^{-1} = 1$. *Zeige*, dass für $f \in L^p(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ eine Ungleichung der Form

$$\|(\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{N}}\|_{\ell^q(\mathbb{Z})} \leq A\|f\|_{L^p(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})}$$

mit $\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-\iota nx}\,\mathrm{d}x$ nur für $1/p + 1/q \leq 1$ möglich ist.
Tipp: Benutze, dass $\|D_N\|_{L^p(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})} \approx N^{1-1/p}$ für $N \to \infty$ und $p > 1$ und $\|D_N\|_{L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})} \approx \log N$.

15. Mehr zur Faltung.
Seien $f, g \in L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. Zeige, dass $f * g \in A(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$.

16. Zu trigonometrischen Polynomen.
Sei für $n \in \mathbb{N}_0$ und $c_k \in \mathbb{R}$

$$P_n(t) := \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{\iota kt}$$

ein trigonometrischen Polynom vom Grad $\leq n$.

(a) *Zeige*, dass $\|P_n'\|_{L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})} \leq n\|P_n\|_{L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})}$.

(b) *Bestimme* alle trigonometrischen Polynome vom Grad $\leq n$, für die gilt

$$\|P_n'\|_{L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})} = n\|P_n\|_{L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})}.$$

17. Über den Poissonkern.

(a) Sei $u \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. *Zeige*, dass $\triangle u$ in Polarrkoordinaten $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$ mit $r \in \mathbb{R}^+$ und $\theta \in [-\pi, \pi)$ die Darstellung

$$\triangle u = \frac{\partial^2 u}{\partial^2 r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

besitzt.

(b) Sei $P_r(x)$ der Poissonkern aus Beispiel 1.14. *Zeige*, dass die Funktion $u : [0,1) \times [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$

$$u(r,\theta) := \frac{\partial P_r}{\partial \theta}$$

die zwei Bedingungen

(i) $\triangle u = 0$ auf der offenen Einheitsscheibe $D := (0,1) \times [-\pi, \pi)$,

(ii) $\lim\limits_{r\to 1} u(r,x) = 0$ für alle $x \in [-\pi, \pi)$

erfüllt, obwohl u nicht die Nullfunktion ist.

Abgabe am Dienstag, den 17. März 2015, in der Vorlesung.