Kapitel 1

Das Lebesgue-Maß des $\mathbb{R}^d$

Wir werden in diesem Kapitel das Lebesgue-Maß für Teilmengen von $\mathbb{R}^d$ konstruieren. Zur Vereinfachung der Notation werden wir uns an einigen Stellen auf $d = 1$ oder $d = 2$ beschränken, aber die Resultate lassen sich ohne Weiteres auf den Fall von allgemeinem d übertragen.

Wir werden später diese Konstruktion verallgemeinern, um beliebige Maße zu konstruieren.

1.1 Elementare Mengen

Unser Ziel ist es, möglichst vielen Teilmengen des $\mathbb{R}^d$ auf sinnvolle Weise ein „Maß“ (Flächeninhalt, Volumeninhalt, ...) zuzuordnen. Ganz leicht ist diese Aufgabe bestimmt für die *achsenparallelen Quader*.

1.1 Definition. Ein *achsenparalleler Quader* des $\mathbb{R}^d$ ist eine Menge der Form

$$Q = \{\, (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d \,\big|\, a_k \underset{(-)}{<} x_k \underset{(-)}{<} b_k \text{ für } 1 \le k \le d \,\} \tag{1.1}$$

mit $a_1, \dots, a_d, b_1, \dots, b_d \in \mathbb{R}$. Dabei darf bei jedem Auftreten von $\underset{(-)}{<}$ (also auch für jeden Wert von k) unabhängig voneinander $<$ oder $\le$ gewählt werden. Das System der achsenparallelen Quader wird mit $\mathfrak{Q}$ bezeichnet.

Zu den achsenparallelen Quadern in $\mathbb{R}^d$ zählen also offene, halb-offene und abgeschlossene d-Quader, entsprechende Quader niedrigerer Dimension in $\mathbb{R}^d$, Rechtecke, Strecken, Punkte und auch die leere Menge. Man beachte, dass der Schnitt zweier achsenparaller Quader wieder ein solcher ist, die Vereinigung jedoch im Allgemeinen nicht.

1.2 Aufgabe. Seien $A, Q \in \mathfrak{Q}$ mit $A \subset Q$. Zeige, dass $Q \setminus A$ eine Vereinigung von endlich vielen, paarweise disjunkten achsenparallelen Quadern ist.

[Eine Skizze (für den Fall $d = 2$) könnte erhellend sein.]

Das Maß eines achsenparallelen Quaders soll gemäß der aus der Schule bekannten Formel das Produkt seiner Kantenlängen sein:

1.3 Definition. Für $Q \in \mathfrak{Q}$, dargestellt wie in Gleichung (1.1), definieren wir die Maßzahl $m(Q)$ als

$$m(Q) := \begin{cases} 0 & \text{falls } Q = \varnothing \\ \prod_{k=1}^{d}(b_k - a_k) & \text{falls } Q \neq \varnothing \end{cases} .$$

Unsere Definition erfüllt offensichtlich zwei wichtige Eigenschaften, die an die axiomatische Definition eines allgemeinen Maßes erinnern:

1.4 Beobachtung. (a) $m(\varnothing) = 0$ und $m(Q) \geq 0$ für jedes $Q \in \mathfrak{Q}$.

(b) m ist *additiv*: Ist $Q \in \mathfrak{Q}$ die disjunkte Vereinigung von *endlich vielen* achsenparallelen Quadern $Q_1, \ldots, Q_n \in \mathfrak{Q}$, so gilt

$$m(Q) = \sum_{k=1}^{n} m(Q_k) .$$

Wir wollen nun unsere Definition des Maßes unter Beibehaltung der obigen Eigenschaften auf eine größere Klasse von Mengen ausdehnen:

1.5 Definition. Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^d$ heißt *elementar*, wenn sie Vereinigung von endlich vielen, paarweise disjunkten achsenparallelen Quadern ist. Eine derartige Darstellung von A nennen wir eine *Zerlegung* von A (in achsenparallele Quader). Das System der elementaren Mengen in $\mathbb{R}^d$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{E}$.

Offensichtlich ist $\mathfrak{Q} \subset \mathfrak{E}$. Die folgende Aussage zeigt, dass das System der elementaren Mengen unter den wichtigsten Mengenoperationen abgeschlossen ist.

1.6 Aussage. Seien $A, B \in \mathfrak{E}$. Dann sind ebenfalls elementar: der Durchschnitt $A \cap B$, die Vereinigung $A \cup B$, die Differenz $A \setminus B$, die symmetrische Differenz $A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Beweis. Es sei etwa

$$A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k \quad \text{und} \quad B = \bigcup_{\ell=1}^{m} B_\ell$$

mit $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{Q}$ bzw. $B_1, \ldots, B_m \in \mathfrak{Q}$ paarweise disjunkte achsenparallelen Quadern.

Zum Durchschnitt. Für $k \in \{1, \ldots, n\}$ und $\ell \in \{1, \ldots, m\}$ ist $A_k \cap B_\ell$ wieder ein achsenparalleler Quader, und weil die A_k bzw. die B_ℓ jeweils paarweise disjunkt sind, sind auch $(A_k \cap B_\ell)_{k=1,\ldots,n;\ell=1,\ldots,m}$ paarweise disjunkt. Daher ist

$$A \cap B = \left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k \right) \cap \left(\bigcup_{\ell=1}^{m} B_\ell \right) = \bigcup_{k=1}^{n} \bigcup_{\ell=1}^{m} (A_k \cap B_\ell)$$

eine elementare Menge.

Zur Vereinigung. Wir zeigen zunächst, dass wenn $Q \in \mathfrak{Q}$ und $A \in \mathfrak{E}$ mit $A \subset Q$ ist, dann $Q \setminus A \in \mathfrak{E}$ gilt. Es ist nämlich

$$Q \setminus A = Q \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k \right) = \bigcap_{k=1}^{n} (Q \setminus A_k) .$$

Nach Aufgabe 1.2 ist jeweils $Q \setminus A_k \in \mathfrak{E}$, und daher nach dem vorangegangenen Teil des Beweises auch $Q \setminus A \in \mathfrak{E}$.

Wir wählen $Q \in \mathfrak{Q}$ nun so, dass $A \cup B \subset Q$ gilt. Dann ist

$$A \cup B = Q \setminus \big((Q \setminus A) \cap (Q \setminus B)\big) .$$

Nach dem Vorangegangenen folgt $A \cup B \in \mathfrak{E}$. □

1.7 Aufgabe. Zeige den verbleibenden Teil von Aussage 1.6.

[Tipp. Mit den Notationen der vorangegangenen Beweises ist $A \setminus B = \bigcup_{k=1}^{n} \big(A_k \setminus (B \cap A_k)\big)$.]

1.8 Aufgabe. Eine Menge ist genau dann elementar, wenn sie sich als (nicht unbedingt disjunkte) Vereinigung von endlich vielen achsenparallelen Quadern schreiben lässt.

Wir wollen elementaren Mengen $A \in \mathfrak{E}$ eine Maßzahl $\hat{m}(A)$ zuordnen, indem wir die Summe der Maßzahlen der achsenparallelen Quader aus einer disjunkten Zerlegung von A bilden. Allerdings ist die Zerlegung einer elementaren Menge in achsenparallele Quader im Allgemeinen nicht eindeutig. Damit diese Definition sinnvoll ist, müssen wir also zeigen, dass diese Summe der Maßzahlen nicht von der Wahl der Zerlegung abhängt. Dies wird in der folgenden Aussage erbracht:

1.9 Aussage. Eine elementare Menge $A \in \mathfrak{E}$ sei auf zweierlei verschiedene Art als Vereinigung von endlich vielen disjunkten Quadern geschrieben:

$$A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k = \bigcup_{k=1}^{n'} A'_k , \tag{1.2}$$

wobei die $A_1, \dots, A_n \in \mathfrak{Q}$ bzw. die $A'_1, \dots, A'_{n'} \in \mathfrak{Q}$ jeweils paarweise disjunkt sein sollen. Dann gilt

$$\sum_{k=1}^{n} m(A_k) = \sum_{k=1}^{n'} m(A'_k) .$$

Beweis. Eine Zerlegung $A = \bigcup_{k=1}^{\widetilde{n}} \widetilde{A}_k$ nennen wir eine *Verfeinerung* der Zerlegung $A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$, wenn es für jedes $\widetilde{k} \in \{1, \dots, \widetilde{n}\}$ ein $k \in \{1, \dots, n\}$ mit $\widetilde{A}_{\widetilde{k}} \subset A_k$ gibt. Zu je zwei Zerlegungen von A gibt es eine gemeinsame Verfeinerung, sind nämlich die beiden Zerlegungen wie in (1.2) bezeichnet, so ist

$$A = \bigcup_{k,k'} (A_k \cap A'_{k'})$$

eine gemeinsame Verfeinerung. Daher genügt es zu zeigen, dass sich der Wert der Summe $\sum_{k=1}^{n} m(A_k)$ nicht ändert, wenn zu einer Verfeinerung der Zerlegung $A = \bigcup_k A_k$ übergegangen wird. Dass dies richtig ist, folgt aus der Beobachtung 1.4(b). □

Aufgrund der vorangegangenen Aussage wird durch die folgende Definition die Maßzahl $\hat{m}(A)$ für $A \in \mathfrak{E}$ eindeutig festgelegt:

1.10 Definition. Sei $A \in \mathfrak{E}$, dargestellt als die disjunkte Vereinigung $A = \bigcup_{k=1}^n A_k$ von achsenparallelen Quadern $A_1, \dots, A_n \in \mathfrak{Q}$. Dann definieren wir

$$\hat{m}(A) := \sum_{k=1}^n m(A_k) .$$

1.11 Aussage. (a) Für $Q \in \mathfrak{Q}$ ist $\hat{m}(Q) = m(Q)$.

(b) Für alle $A \in \mathfrak{E}$ ist $\hat{m}(E) \geq 0$; $\hat{m}(\varnothing) = 0$.

(c) $\hat{m}$ ist additiv: Sind $A_1, \dots, A_n \in \mathfrak{E}$ *endlich viele* paarweise disjunkte elementare Mengen, so ist auch $A := \bigcup_{k=1}^n A_k \in \mathfrak{E}$ und es gilt

$$\hat{m}(A) = \sum_{k=1}^n \hat{m}(A_k) .$$

Beweis. (a) und (b) sind offensichtlich, und in (c) ist wegen Aussage 1.6 nur die letzte Gleichung zu zeigen. Dazu sei A_k für $k \in \{1, \dots, n\}$ jeweils als Zerlegung in achsenparallele Quader dargestellt: $A_k = \cup_{\ell=1}^{n_k} A_{k,\ell}$ mit $A_{k,1}, \dots, A_{k,n_k} \in \mathfrak{Q}$. Dann ist offenbar

$$A = \bigcup_{k=1}^n A_k = \bigcup_{k=1}^n \bigcup_{\ell=1}^{n_k} A_{k,\ell} ,$$

und zwar ist dies eine Darstellung von A durch *disjunkte* achsenparallele Quader, weil die A_k paarweise disjunkt sind. Daher gilt

$$\hat{m}(A) = \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^{n_k} m(A_{k,\ell}) = \sum_{k=1}^n \hat{m}(A_k) .$$

□

Unser Ziel ist es, $\hat{m}$ auf eine möglichst große Klasse von Mengen fortzusetzen. Weil dafür die Approximation durch unendlich viele elementare Mengen eine wichtige Rolle spielt, benötigen wir eine Version der Additivität von $\hat{m}$ für abzählbar unendlich viele Mengen. Man spricht dabei von σ-Additivität, der Buchstabe σ erinnert dabei an das Wort „Summe“ und bezieht sich auf die im folgenden Satz auftretende unendliche Summe.

Im Folgenden bedeutet „abzählbar“ stets „höchstens abzählbar“, d.h. „entweder endlich, oder abzählbar unendlich“. Dabei kann eine endliche Folge von Mengen $A_1, \dots, A_n$ stets auch als abzählbar unendliche Folge angesehen werden, indem wir abzählbar unendlich oft die leere Menge hinzufügen: $A_1, \dots, A_n, \varnothing, \varnothing, \varnothing, \dots$.

1.12 Satz. $\hat{m}$ ist σ-additiv: Sind $A_k \in \mathfrak{E}$ *abzählbar viele* paarweise disjunkte elementare Mengen, und ist auch $A := \bigcup_k A_k \in \mathfrak{E}$, so gilt

$$\hat{m}(A) = \sum_k \hat{m}(A_k) .$$