Partielle Differentialgleichungen

Martin Schmidt
Tobias Simon

2. Übung

8. September 2014

(abzugeben in der Vorlesung am 15. September 2014)

4. Eine verallgemeinerte Leibnizregel.

Es sei $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in \mathbb{N}_0^n$ und $u, v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zwei $|\gamma|$-fach stetig differenzierbare Funktionen. Zeigen Sie, dass dann die folgende verallgemeinerte Leibnizregel gilt:

$$\partial^\gamma(uv) = \sum_{0 \le \delta \le \gamma} \binom{\gamma}{\delta} \partial^\delta u \, \partial^{\gamma-\delta} v \quad \text{mit} \quad \binom{\gamma}{\delta} := \binom{\gamma_1}{\delta_1} \cdot \ldots \cdot \binom{\gamma_n}{\delta_n}. \qquad \textit{(6 Punkte)}$$

[Tipp: Vollständige Induktion nach $|\gamma| \in \mathbb{N}_0$; man beachte die Formel $\binom{\gamma-e_j}{\delta-e_j} + \binom{\gamma-e_j}{\delta} = \binom{\gamma}{\delta}$, wobei $e_j := (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{N}_0^n$ den j-ten kanonischen Einheitsvektor bezeichnet (mit $1 \le j \le n$). Man mache sich klar, dass es genügt, im Induktionsschritt einen Multiindex der Form $\gamma + e_j$ zu betrachten, wenn γ der Multiindex aus der Induktionsannahme ist, für den die Aussage bereits gelte.]

5. Über Distributionen.

(a) Zeigen Sie, dass

$$F : C_0^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \ \phi \mapsto \int_{\mathbb{R}} x^3 \cdot \phi''(x) \, \mathrm{d}x$$

eine Distribution auf $\mathbb{R}$ ist, und bestimmen Sie eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$F(\phi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot \phi(x) \, \mathrm{d}x \quad \text{für alle } \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}). \qquad \textit{(4 Punkte)}$$

(b) Zeigen Sie, dass die Dirac-Distribution

$$\delta : C_0^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \ \phi \mapsto \phi(0)$$

in der Tat eine Distribution auf $\mathbb{R}$ ist und beweisen Sie, dass es *keine* stetige Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\delta(\phi) = \int_{\mathbb{R}} g(x) \cdot \phi(x) \, \mathrm{d}x \quad \text{für alle } \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$$

gibt. *(2+4 Punkte)*

(c) Bestimmen Sie die Ableitung F' bzw. δ' der beiden Distributionen aus (a) und (b). *(2+2 Punkte)*

6. Über die Faltung.

(a) Zeigen Sie, dass die Faltung von C_0^∞-Funktionen auf dem $\mathbb{R}^n$ eine bilineare, kommutative und assoziative Verknüpfung ist. *(2+3+4 Punkte)*

(b) Zeigen Sie, dass bei der Faltung von Funktionen mit *Distributionen* mit nicht-kompaktem Träger (auf $\mathbb{R}$) die Faltung selbst in den Fällen, in denen sie wohldefiniert ist, nicht assoziativ zu sein braucht.

[Tipp: Wir bezeichnen mit 1 die Einsfunktion auf $\mathbb{R}$, mit δ' die Ableitung der Dirac-Distribution (siehe Aufgabe 5(c)) und mit $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die sog. *Heaviside-Funktion*, d.h. $H(x) = 1$ für $x \ge 0$ und $H(x) = 0$ für $x < 0$. Dann berechne man $1 * (\delta' * H)$ und $(1 * \delta') * H$.] *(7 Punkte)*