Martin Schmidt
Tobias Simon

Partielle Differentialgleichungen
11. Übung

10. November 2014

(abzugeben in der Vorlesung am 17. November 2014)

34. Eine Differentialgleichung mit ganz vielen schwachen Lösungen.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen, und L der (nicht-elliptische) Differentialoperator auf Ω, definiert durch

$$Lu := \partial_1(\partial_2 u) - \partial_2(\partial_1 u) \ .$$

Zeigen Sie, dass für jedes $u \in W^{1,2}(\Omega)$ im schwachen Sinne $Lu = 0$ gilt. *(6 Punkte)*

35. Über das schwache Maximumprinzip.

Wir wollen zeigen, dass für elliptische Differentialoperatoren, deren Koeffizienten und Lösungen hinreichend glatt sind, das Schwache Maximumprinzip 4.2 aus dem klassischen Maximumprinzip in Gestalt von Korollar 2.18 folgt.

Dazu sei $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ offen, $a_{ij}, b_i \in C^1(\overline{\Omega})$, sowie c_i, d beschränkt und für $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ erfülle

$$Lu := \sum_{i,j=1}^{n} \partial_i(a_{ij}\partial_j u + b_i u) + \sum_{i=1}^{n} c_i \partial_i u + d \cdot u \geq 0$$

auf Ω die Voraussetzungen des Schwachen Maximumprinzips 4.2. Insbesondere gilt also

$$\int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{n} b_i \partial_i v - d \cdot v \right) d\mu \geq 0 \quad \text{für alle } 0 \leq v \in W_0^{1,1}(\Omega) \quad .$$

Zeigen Sie mittels des klassischen Maximumprinzips (Korollar 2.18), dass dann $\sup_\Omega u \leq \sup_{\partial\Omega} u_+$ gilt, indem Sie die Voraussetzungen von Korollar 2.18 nachprüfen. *(6 Punkte)*

[Tipp: Schreiben Sie L zunächst in Nicht-Divergenzform.]

36. Divergenz und Rotation.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann heißt ein Vektorfeld $f = (f_1, \ldots, f_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ mit $f_k \in L^2(\Omega)$, $k \in \{1, \ldots, n\}$, eine schwache Lösung der Differentialgleichung $\nabla \cdot f = 0$, falls

$$\int_\Omega (f \cdot \nabla\phi)\, d\mu = 0 \quad \text{für alle} \quad \phi \in W_0^{1,2}(\Omega)$$

gilt.

Sei nun $n = 3$. Dann ist die *Rotation* eines Vektorfeldes $u = (u_1, u_2, u_3) : \Omega \to \mathbb{R}^3$ mit $u_k \in W^{1,2}(\Omega)$,$k \in \{1, 2, 3\}$, durch

$$\nabla \times u := (\partial_2 u_3 - \partial_3 u_2,\ \partial_3 u_1 - \partial_1 u_3,\ \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1)$$

definiert.

Man zeige, dass die Rotation $f := \nabla \times u$ von u eine schwache Lösung der Differentialgleichung $\nabla \cdot f = 0$ ist. *(6 Punkte)*

Bitte wenden.

37. Über den Satz von Friedrichs.

Wir betrachten die offenen, reellen Intervalle $I := (-2,2)$ und $J := (-1,1)$. Es sei $a \in L^\infty(I) \setminus W^{1,2}(J)$ mit $a \geq 1$, und

$$u : I \to \mathbb{R},\ t \mapsto u(t) := \int_0^t \frac{1}{a(x)}\,\mathrm{d}x\ .$$

(a) Zeigen Sie $u \in W^{1,2}(I)$ und $u \notin W^{2,2}(J)$. *(6 Punkte)*

(b) Zeigen Sie, dass u eine schwache Lösung der Differentialgleichung

$$(au')' = 0 \quad \text{auf } I$$

ist. *(5 Punkte)*

(c) Warum steht das Ergebnis von (a), (b) nicht im Widerspruch zum Satz von Friedrichs?

(2 Punkte)