Martin Schmidt
Tobias Simon

Partielle Differentialgleichungen
4. Übung

22. September 2014

(abzugeben in der Vorlesung am 29. September 2014)

9. Harmonische Funktionen auf $B(0,1) \subset \mathbb{R}^2$.

Mit $B(0,1)$ bezeichnen wir die offene Einheitskreisscheibe in $\mathbb{R}^2$.

(a) Sei $u \in C^2(\overline{B(0,1)})$ eine auf $B(0,1)$ harmonische Funktion, die in Polarkoordinaten als $u = u(r,\varphi)$ (mit $0 \leq r \leq 1$ und $0 < \varphi \leq 2\pi$) gegeben sei. Zeigen Sie, dass dann

$$\int_{\partial B(0,1)} \frac{\partial u}{\partial r}(x)\,\mathrm{d}\sigma(x) = 0$$

gilt. *(6 Punkte)*

[Tipp: Man betrachte $\int_{B(0,1)} \triangle u\, d^2x$ und wende den Gaußschen Integralsatz an.]

(b) "Erraten" Sie jeweils eine Lösung $u \in C^2(\overline{B(0,1)})$ der folgenden sogenannten *Neumann-Probleme* oder beweisen Sie, dass es keine solche Lösung gibt.

(i) $\triangle u = 0$ auf $B(0,1)$ mit $\frac{\partial u}{\partial r} = \sin(\varphi)$ auf $\partial B(0,1)$. *(3 Punkte)*

(ii) $\triangle u = 0$ auf $B(0,1)$ mit $\frac{\partial u}{\partial r} = \sin^2(\varphi)$ auf $\partial B(0,1)$. *(3 Punkte)*

[Hinweis: Es darf bei Bedarf verwendet werden, dass der Laplace-Operator für eine Funktion $u = u(r,\varphi)$ in Polarkoordinaten die Darstellung $\triangle u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$ besitzt.]

10. Harmonische Funktionen auf $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$.

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein (offenes und zusammenhängendes) Gebiet und $u : \Omega \to \mathbb{R}$ harmonisch, d.h. $\Delta u = 0$ in Ω. Weiter sei $u(x) \leq 1$ für alle $x \in \Omega$.

Zeigen Sie: Falls es ein $x_0 \in \Omega$ gibt mit $u(x_0) < 1$, so gilt $u(x) < 1$ für *alle* $x \in \Omega$. *(4 Punkte)*

11. Harmonische Funktionen spezieller Gestalt.

Es sei eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $v : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ sowie ein fester Vektor $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gegeben. Wir betrachten die beiden Funktionen

$$u : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\, x \mapsto v(\|x\|)$$

$$\text{und} \quad w : \mathbb{R}^n \setminus \{\tfrac{y}{\|y\|^2}\} \to \mathbb{R},\, x \mapsto v(\sqrt{1 + \|x\|^2\,\|y\|^2 - 2\,x \cdot y})\,.$$

Zeigen Sie: u ist genau dann harmonisch, wenn w harmonisch ist. *(7 Punkte)*

[Tipp: Aufgabe 7(a)]

Bitte wenden.

12. Ein Detail aus dem Beweis der Poissonschen Darstellungsformel.

Wir bezeichnen mit $K(x,y)$ den Poissonkern wie in Abschnitt 2.3 der Vorlesung. Dieser hat die folgenden Eigenschaften (welche *nicht* noch einmal bewiesen werden müssen, vgl. Vorlesungsskript):

(i) $K(x,y) > 0$ für $x \in B(0,1)$, $y \in \partial B(0,1)$.

(ii) $\int_{\partial B(0,1)} K(x,y)\, \mathrm{d}\sigma(y) = 1$ für $x \in B(0,1)$.

(iii) Für alle $y_0 \in \partial B(0,1)$ konvergiert $y \mapsto K(x,y)$ im Grenzwert $x \to y_0$, $x \in B(0,1)$, auf kompakten Teilmengen von $\partial B(0,1) \setminus \{y_0\}$ gleichmäßig bzgl. y gegen Null.

Es sei nun eine stetige Funktion $u \in C(\partial B(0,1))$ gegeben. Wir definieren

$$\tilde{u} : B(0,1) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \int_{\partial B(0,1)} K(x,y)\, u(y)\, \mathrm{d}\sigma(y)\ . \qquad (*)$$

Zeigen Sie, dass sich die Funktion $\tilde{u}$ stetig auf $\partial B(0,1)$ fortsetzen lässt und dass die Fortsetzung auf $\partial B(0,1)$ mit u übereinstimmt. *(7 Punkte)*

[Tipp: Für vorgegebenes $x_0 \in \partial B(0,1)$ betrachte man $x \in B(0,1)$ in der Nähe von x_0 und zerlege das Integral in $(*)$ in einen Anteil, der nahe bei x_0 liegt und in einen "Rest". Man verwende die zitierten Eigenschaften (i)–(iii) von K, um zu zeigen, dass der "Rest" klein wird. Beim Anteil nahe bei x_0 nutze man die Stetigkeit von u, um entsprechende Funktionswerte $u(y)$ durch $u(x_0)$ zu approximieren.]