Partielle Differentialgleichungen

Martin Schmidt
Tobias Simon

8. Übung

20. Oktober 2014

(abzugeben in der Vorlesung am 27. Oktober 2014)

25. Über den Satz von Lax-Milgram.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und mit glattem Rand, seien $A : \Omega \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $c : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen und sei $L : C_0^2(\Omega) \to C_0(\Omega)$ der elliptische Operator in Divergenzform, der durch

$$(Lu)(x) := -\nabla \cdot (A(x)\nabla u(x)) + c(x)u(x)$$

gegeben ist, d.h. A und c genügen Definition 2.15. Sei $K > 0$ und $c(x) \geq K$ für alle $x \in \Omega$. Zeigen Sie, dass L die Ungleichung

$$\langle Lu, u\rangle_{L^2(\Omega)} \geq C \cdot \|u\|^2_{W^{1,2}(\Omega)} \quad \text{(für eine Konstante } C > 0)$$

erfüllt. *(8 Punkte)*

26. Eine Ungleichung für Funktionen aus $W_0^{2,2}(\Omega)$.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u \in W_0^{2,2}(\Omega)$ gegeben. Zeigen Sie die folgende Ungleichung:

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|^{1/2}_{L^2(\Omega)} \cdot \|\triangle u\|^{1/2}_{L^2(\Omega)} .$$ *(6 Punkte)*

[Tipp: Man betrachte zunächst $u \in C_0^\infty(\Omega)$ und berechne $\int_\Omega |\nabla u|^2 \, d\mu$ mit Hilfe von Aufgabe 2(a).]

27. Rechnen mit Sobolevfunktionen.

(a) Es sei $u \in W^{2,1}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ mit $\partial^\alpha u = 0$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| = 2$. Zeigen Sie, dass u fast überall affin ist, d.h. es gibt $a \in \mathbb{R}^n$ und $b \in \mathbb{R}$, so dass für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt: $u(x) = a \cdot x + b$. *(5 Punkte)*

[Tipp: Man wende für $i \in \{1, \ldots, n\}$ Proposition 3.20 zunächst auf $\partial_i u$ an. Schließlich wende man Prop. 3.20 noch ein weiteres Mal an.]

(b) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u, v \in W^{1,2}(\Omega)$. Zeigen Sie, dass für $w(x) := \min\{u(x), v(x)\}$ auch $w \in W^{1,2}(\Omega)$ gilt und bestimmen Sie die schwache Ableitung von w. *(3 Punkte)*

[Tipp: Es ist $w(x) = \frac{1}{2}(u(x) + v(x) - |u(x) - v(x)|)$. Es darf verwendet werden, dass Proposition 3.27 auch für $u \in W^{1,2}(\Omega)$ gilt (der Beweis geht analog).]

28. Die Sobolevräume $W_0^{1,2}(\Omega)$ und $W_0^{1,2}(\Omega \setminus \{0\})$

Sei $\Omega := B(0, 2) \subseteq \mathbb{R}^2$ der offene Ball um 0 mit Radius 2 im $\mathbb{R}^2$, sowie $\dot{\Omega} := \Omega \setminus \{0\}$ der entsprechend punktierte Ball. Zeigen Sie: $W_0^{1,2}(\Omega) = W_0^{1,2}(\dot{\Omega})$. *(9 Punkte)*

[Tipp für die nicht-triviale Inklusion "$\subseteq$": Bei der Approximation von $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ durch Funktionen aus $W_0^{1,2}(\dot{\Omega})$ betrachte man die Funktion $u(x) := \ln(1 + |\ln |x||)$ und deren Eigenschaften (siehe Bemerkung 3.44 aus der Vorlesung). Mit $\alpha_k(x) := \min\{u(x), k\}$ für $x \in B(0, 1) \setminus \{0\}$ und $\alpha_k(x) := 0$ für $x \in \Omega \setminus B(0, 1)$ definiere man $\beta_k := 1 - \frac{\alpha_k}{k}$ und betrachte $\phi_k := \beta_k \cdot \phi$ für $k \in \mathbb{N}$.]