Partielle Differentialgleichungen

Martin Schmidt
Tobias Simon

12. Übung

17. November 2014

(abzugeben in der Vorlesung am 24. November 2014)

38. Aus der Spektraltheorie des Laplace-Operators.

Sei $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit $\partial\Omega \in C^{0,1}$. Ein $u \in W_0^{1,2}(\Omega) \setminus \{0\}$ heißt *Eigenfunktion des Laplace-Operators mit Nullrandwerten* zum *Eigenwert* $\lambda \in \mathbb{R}$, wenn im schwachen Sinne

$$-\triangle u = \lambda u$$

gilt. Die Menge der Eigenwerte des Laplace-Operators wird dessen *(Punkt-)Spektrum* genannt.

(a) Zeigen Sie: Sind $u_1, u_2 \in W_0^{1,2}(\Omega)$ Eigenfunktionen von $\triangle$ zu verschiedenen Eigenwerten, so ist $\langle u_1, u_2 \rangle_{L^2(\Omega)} = 0$. *(3 Punkte)*

(b) Zeigen Sie, dass für jeden Eigenwert λ von $\triangle$ gilt: $\lambda > 0$. *(4 Punkte)*

(c) Es sei $W \neq \{0\}$ ein abgeschlossener Untervektorraum von $W_0^{1,2}(\Omega)$ derart, dass das Orthokomplement von W in $W_0^{1,2}(\Omega)$ von Eigenfunktionen von $\triangle$ aufgespannt wird. ($W = W_0^{1,2}(\Omega)$ ist zugelassen.) Wir zeigen, dass W eine Eigenfunktion von $\triangle$ enthält.

Dazu betrachten wir die „Einheitssphäre“ $S_W := \{ u \in W \mid \|u\|_{L^2(\Omega)} = 1 \}$ in W, auf dieser die Funktion

$$F : S_W \to \mathbb{R},\ u \mapsto \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}\mu\,,$$

und setzen $\lambda := \inf\{ F(u) \mid u \in S_W \} \geq 0$. Wegen der Definition des Infimums λ existiert eine Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in S_W, so dass $\lambda_n := F(u_n) \geq \lambda$ und $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda$ ist.

(i) Zeigen Sie mithilfe des Satzes von Rellich 3.39, dass es eine Teilfolge $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von (u_n) gibt, die in $L^2(\Omega)$ gegen ein $u \in L^2(\Omega)$ konvergiert. *(4 Punkte)*

(ii) Zeigen Sie mithilfe des Satzes von Alaoglu, dass tatsächlich $u \in S_W$ und $F(u) = \lambda$ ist. Dabei besagt der Satz von Alaoglu, dass für jedes $R > 0$ der abgeschlossene Ball $\overline{B(0,R)}$ in $W_0^{1,2}(\Omega)$ schwach folgenkompakt ist, das bedeutet: Ist (u_n) eine beschränkte Folge in $W_0^{1,2}(\Omega)$, so existiert eine Teilfolge (u_{n_k}) von (u_n), die in folgendem schwachen Sinne gegen ein $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ konvergiert: Für jedes $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ gilt $\lim_{k\to\infty} \langle u_{n_k}, v \rangle_{W_0^{1,2}(\Omega)} = \langle u, v \rangle_{W_0^{1,2}(\Omega)}$. *(10 Punkte)*

(iii) Zeigen Sie, dass u eine Eigenfunktion von $\triangle$ zum Eigenwert λ ist. *(8 Punkte)*
[Tipp: Man überlege sich, dass es genügt zu zeigen, dass für alle $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ gilt: $\langle \nabla u, \nabla v \rangle_{L^2(\Omega)} = \lambda \langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)}$. Dafür unterscheide man drei Fälle: (1) $v \in \mathbb{R}u$, (2) $v \in S_W$ mit $v \perp u$ und (3) $v \perp W$. Für den Fall (2) betrachte man die Kurve $\gamma(t) := \cos(t)\, u + \sin(t)\, v$ in $W_0^{1,2}(\Omega)$. Man zeige, dass γ in S_W verläuft, und untersuche die Funktion $f(t) := F(\gamma(t))$. Im Fall (3) benutze man die Voraussetzung, dass das Orthokomplement von W in $W_0^{1,2}(\Omega)$ von Eigenfunktionen von $\triangle$ aufgespannt wird.]

Bitte wenden.

(d) Zeigen Sie, dass es ein abzählbar unendliches Orthonormalsystem in $L^2(\Omega)$ gibt, das aus Eigenfunktionen von $\triangle$ besteht, das heißt: Es existiert eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Eigenfunktionen von $\triangle$, so dass für alle $n, m \in \mathbb{N}$

$$\langle a_n, a_m \rangle_{L^2(\Omega)} = \begin{cases} 1 & \text{falls } m = n \\ 0 & \text{falls } m \neq n \end{cases}$$

gilt. *(5 Punkte)*

[Tipp: Man konstruiere die a_n sukzessive durch vollständige Induktion und verwende dabei Aufgabe (c).]