Man beachte einen weiteren feinen Unterschied: Während in Aussage 1.11(c) aus den Voraussetzungen folgt, dass die Vereinigung A elementar ist, muss dies in Satz 1.12 als zusätzliche Voraussetzung gefordert werden.

Der Beweis von Satz 1.12. ist recht schwierig; man muss die endliche Additivität in Verbindung mit topologischen und geometrischen Eigenschaften des Euklidischen Raumes $\mathbb{R}^d$ verwenden. Wir gliedern den Beweis in die folgenden beiden Lemmata, die jeweils eine Ungleichungsrichtung aus dem Satz beweisen.

1.13 Lemma. In der Situation von Satz 1.12 gilt

$$\hat{m}(A) \geq \sum_k \hat{m}(A_k) \ .$$

Beweis. O.B.d.A. betrachten wir abzählbar unendlich viele A_k. Sei $n \in \mathbb{N}$ fest. Dann ist

$$A = \left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k \right) \cup B_n \quad \text{mit} \quad B_n := A \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k \right) ,$$

wobei $B_n \in \mathfrak{E}$ nach Aussage 1.6 gilt, und diese Darstellung von A eine disjunkte, endliche Vereinigung elementarer Mengen ist. Nach der endlichen Additivität von $\hat{m}$, Aussage 1.11(c), gilt deshalb

$$\hat{m}(A) = \sum_{k=1}^{n} \hat{m}(A_k) + \hat{m}(B_n) \geq \sum_{k=1}^{n} \hat{m}(A_k) \ .$$

Durch den Grenzübergang $n \to \infty$ ergibt sich die Behauptung. □

Für die andere Ungleichungsrichtung von Satz 1.12 zeigen wir tatsächlich eine etwas weitergehende Aussage, nämlich die sogenannte *Subadditivität* von $\hat{m}$:

1.14 Lemma. Es seien elementare Mengen $A, A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathfrak{E}$ gegeben mit $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Dann gilt

$$\hat{m}(A) \leq \sum_k \hat{m}(A_k) \ .$$

Beweis. Die wesentliche Beweisidee ist, die Behauptung auf die endliche Additivität aus Aussage 1.11(b) zurückzuführen. Dazu beschreiben wir einerseits in A eine kompakte, elementare Menge K ein, und legen andererseits um jedes A_k eine offene, elementare Menge herum, und zwar jeweils so, dass die Differenz der Maße kleiner als eine beliebige, vorgegebene Fehlerschranke wird. Indem man dann den Satz von Heine-Borel anwendet, gelingt es, die Situation auf den Fall endlicher Vereinigungen zurückzuführen.

1. Schritt. Wir zeigen: Zu jedem $\delta > 0$ und jeder elementaren Menge B existiert eine *kompakte* (also abgeschlossene und beschränkte) elementare Menge $K \subset B$ mit $\hat{m}(K) \geq \hat{m}(B) - \delta$.

Dazu stellen wir B als Zerlegung $B = \bigcup_{k=1}^{r} B_k$ mit disjunkten, achsenparallelen Quadern $B_1, \ldots, B_r \in \mathfrak{Q}$ dar. Zu jedem dieser Quader B_k existiert ein *abgeschlossener*, also kompakter Quader K_k mit $K_k \subset B_k$ und $m(K_k) \geq m(B_k) - \frac{\delta}{r}$. Dann ist $K := \bigcup_{k=1}^{r} K_k$ eine kompakte, elementare Menge mit $K \subset B$, und es gilt

$$\hat{m}(K) = \sum_{k=1}^{r} m(K_k) \geq \sum_{k=1}^{r} \left(m(B_k) - \frac{\delta}{r} \right) = \sum_{k=1}^{r} m(B_k) - \delta = \hat{m}(B) - \delta \ .$$

2. Schritt. Wir zeigen: Zu jedem $\delta > 0$ und jeder elementaren Menge B existiert eine *offene* elementare Menge $G \supset B$ mit $\hat{m}(K) \leq \hat{m}(B) + \delta$.

Stellen wir B wie im 1. Schritt als Zerlegung dar, so existiert zu jedem Quader B_k ein *offener* Quader $G_k \supset B_k$ mit $m(G_k) \leq m(B_k) + \frac{\delta}{r}$. Dann ist $G := \bigcup_{k=1}^r G_k$ eine offene, elementare Menge mit $G \supset B$, und man hat

$$\hat{m}(G) = \sum_{k=1}^{r} m(G_k) \leq \sum_{k=1}^{r} \left(m(B_k) + \frac{\delta}{r} \right) = \sum_{k=1}^{r} m(B_k) + \delta = \hat{m}(B) + \delta .$$

3. Schritt. Sei nun $\varepsilon > 0$ fest vorgegeben. Dann existiert in der Situation des Lemmas wegen dem 1. Schritt zu A eine kompakte, elementare Menge K mit $K \subset A$ und

$$\hat{m}(K) \geq \hat{m}(A) - \frac{\varepsilon}{2} .$$

Andererseits existiert nach dem 2. Schritt zu jeder Menge A_k eine offene, elementare Menge G_k mit $G_k \supset A_k$ und

$$\hat{m}(G_k) \leq \hat{m}(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} .$$

Dabei bildet wegen $K \subset A \subset \bigcup_{k=1}^\infty A_k \subset \bigcup_{k=1}^\infty G_k$ die Folge $(G_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine offene Überdeckung von K. Weil K kompakt ist, enthält diese Überdeckung nach dem Satz von Heine-Borel eine endliche Teilüberdeckung, d.h. es existieren endlich viele Indizes $k_1, \ldots, k_s$ mit

$$K \subset G_{k_1} \cup \ldots \cup G_{k_s} .$$

Wir erhalten nun mithilfe der endlichen Subadditivität von $\hat{m}$:

$$\begin{aligned}
\hat{m}(A) &\leq \hat{m}(K) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \hat{m}(G_{k_1}) + \ldots + \hat{m}(G_{k_s}) + \frac{\varepsilon}{2} \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} \hat{m}(G_k) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(\hat{m}(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} \right) + \frac{\varepsilon}{2} \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} \hat{m}(A_k) + \varepsilon .
\end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig klein gewählt werden kann, folgt hieraus

$$\hat{m}(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \hat{m}(A_k) .$$

□

Der *Beweis* von Satz 1.12 ergibt sich nun unmittelbar durch die Kombination von Lemma 1.13 und Lemma 1.14.