Partielle Differentialgleichungen

Martin Schmidt
Tobias Simon

1. Übung

1. September 2014

(abzugeben in der Vorlesung am 8. September 2014)

1. Über die lineare Transportgleichung.

Sei $b \in \mathbb{R}^n$ ein fester Vektor. Die (homogene) lineare Transportgleichung in Richtung von b ist dann die partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$\dot{u} + b \cdot \nabla u = 0\,. \qquad (*)$$

Dabei ist $u = u(x,t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die gesuchte Funktion, $\dot{u}$ bezeichnet die Ableitung von u nach dem Parameter $t \in \mathbb{R}$, und der Gradient ∇u bezieht sich nur auf die Ableitung nach den Komponenten des Vektors $x \in \mathbb{R}^n$.

(a) *Zeigen Sie:* Ist $u : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Lösung von $(*)$, so ist u auf jeder der parallelen Geraden in Richtung $(b,1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ konstant. *(4 Punkte)*

(b) Sei $g \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Dann *zeige* man, dass $u(x,t) := g(x - tb)$ eine Lösung von $(*)$, ist, und zwar die *einzige* mit $u(\,\cdot\,,0) = g$. *(5 Punkte)*

2. Laplaceoperator und Laplace-Gleichung.

(a) Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge. Seien $f \in C^2(\Omega)$ und $g \in C^1(\Omega)$. Man *zeige*, dass dann

$$g \triangle f = \nabla \cdot (g \nabla f) - \nabla f \cdot \nabla g$$

gilt. *(4 Punkte)*

(b) Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein offenes, beschränktes Gebiet. Die Funktion $u \in C^2(\overline{\Omega})$ sei eine Lösung des *Randwertproblems*

$$\triangle u = 0 \quad \text{mit} \quad u|_{\partial\Omega} = 0\,.$$

Zeigen Sie, dass $u = 0$ gilt. *(5 Punkte)*

[Tipp. Man untersuche $\int_\Omega u\,(\triangle u)\,\mathrm{d}\mu$ mittels Aufgabe 2(a) und des Gaußschen Integralsatzes.]

Bitte wenden.

3. Extremale des Dirichletintegrals.

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein offenes, beschränktes Gebiet. Die Funktion $u \in C^2(\overline{\Omega})$ minimiere in $C^1(\overline{\Omega})$ das Dirichletintegral $\int_\Omega \|\nabla u\|^2$ bei festgehaltenem Rand, d.h. für jede Funktion $v \in C^1(\overline{\Omega})$ mit $v|_{\partial\Omega} = u|_{\partial\Omega}$ gelte

$$\int_\Omega \|\nabla u\|^2 \leq \int_\Omega \|\nabla v\|^2 .$$

Ziel der Aufgabe ist es, zu beweisen, dass u harmonisch ist. Dazu gehe man im Einzelnen wie folgt vor:

Es sei eine beliebige Funktion $\lambda \in C^1(\overline{\Omega})$ gegeben, deren Träger $\mathrm{Tr}(\lambda) := \overline{\{\, x \in \overline{\Omega} \,|\, \lambda(x) \neq 0 \,\}}$ in Ω enthalten ist. Dann betrachten wir die Funktionenschar $(u_t)_{t\in\mathbb{R}}$ mit

$$u_t : \overline{\Omega} \to \mathbb{R},\ x \mapsto u(x) + t\,\lambda(x)$$

sowie die differenzierbare Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto \int_\Omega \|\nabla u_t\|^2 .$$

Nun gehe man wie folgt vor:

(a) Man *zeige* $\frac{\partial}{\partial t}\big|_{t=0} (\|\nabla u_t\|^2) = 2\,\nabla u \cdot \nabla \lambda\,.$ *(4 Punkte)*

(b) Mit Hilfe von (a) *zeige* man: $f'(0) = -2\int_\Omega \lambda \,\triangle u\,.$ *(4 Punkte)*

[Tipp. Aufgabe 2(a) und Gaußscher Integralsatz.]

(c) Andererseits *folgere* man aus der Minimalitätseigenschaft von u: $f'(0) = 0\,.$ *(2 Punkte)*

(d) Durch Kombination von (b) mit (c) *schließe* man, dass $\triangle u|_\Omega = 0$ ist; daher ist u harmonisch.

Dabei darf ohne Beweis verwendet werden, dass es zu jedem $x \in \Omega$ und jeder offenen Umgebung U von x in Ω eine "‘Höckerfunktion"’ $\lambda \in C^1(\overline{\Omega})$ mit $\lambda \geq 0$, $\mathrm{Tr}(\lambda) \subset U$ und $\lambda(x) = 1$ gibt. Man wende (b) und (c) auf ein derartiges λ an, um zu zeigen, dass $\triangle u(x) = 0$ ist. *(4 Punkte)*

Hinweise: Die neuen Übungsblätter werden künftig voraussichtlich immer montags auf der Homepage des Lehrstuhls Mathe III

`http://analysis.math.uni-mannheim.de` → Lehre → Partielle Differentialgleichungen

zur Verfügung gestellt und sind am jeweils darauffolgenden Montag in der Vorlesung abzugeben. Hinreichend für die Zulassung zur Prüfung ist das Erreichen von mind. 50 % der Punkte in den Übungsblättern. Für weitere Fragen zu den Übungen können Sie sich an Tobias Simon, Raum C105, wenden (Tel.: (0621) 181-2537, E-Mail: tsimon@mail.uni-mannheim.de).