Martin Schmidt

Tobias Simon

Partielle Differentialgleichungen

9. Übung

(abzugeben in der Vorlesung am 3. November 2014)

27. Oktober 2014

29. In $W^{1,2}(\Omega)$ liegen die essentiell beschränkten Funktionen dicht.

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Zu $u \in W^{1,2}(\Omega)$ definieren wir die Folge $u_k : \Omega \to \mathbb{R}$ durch

$$u_k(x) := \max\{-k, \min\{u(x), k\}\}, \quad k \in \mathbb{N}$$

.

(a) Zeigen Sie: Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $u_k \in L^\infty(\Omega) \cap W^{1,2}(\Omega)$. Bestimmen Sie außerdem die schwache Ableitung von u_k. *(6 Punkte)*

[Tipp: Aufgabe 27(b).]

(b) Zeigen Sie, dass $L^\infty(\Omega) \cap W^{1,2}(\Omega)$ in $W^{1,2}(\Omega)$ dicht liegt. *(6 Punkte)*

[Tipp: Zu gegebenem $u \in W^{1,2}(\Omega)$ betrachte man die in (a) definierte Funktionenfolge $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und zeige $\lim\limits_{k\to\infty} \|u_k - u\|_{W^{1,2}(\Omega)} = 0$ mittels des Satzes von Lebesgue über die majorisierte Konvergenz.]

30. Über den Zusammenhang zwischen Sobolev-Funktionen und ihren Randwerten.

Das folgende Beispiel soll zeigen, dass in Proposition 3.32 auf die Voraussetzung, dass das Gebiet Ω Lipschitz-stetigen Rand habe, nicht verzichtet werden kann.

Dazu sei $B(0,1) := \{\, x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| < 1 \,\} \subset \mathbb{R}^3$ und $\Omega := B(0,1)\backslash\{0\}$.

(a) Man argumentiere kurz, warum Ω keinen Lipschitz-stetigen Rand besitzt. *(2 Punkte)*

Es sei nun $u \in C_0^\infty(B(0,1))$ beliebig und $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ eine Funktion mit $0 \le \psi \le 1$, $\psi(r) = 1$ für $r \ge 1$ und $\psi(r) = 0$ für $r \le \frac{1}{2}$. Ferner sei $u_n(x) := \psi(n\,|x|) \cdot u(x)$ für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}^3$.

(b) Zeigen Sie: $u_n \in C_0^\infty(\Omega)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{L^2(\Omega)} = 0$. *(6 Punkte)*

(c) Zeigen Sie, dass für die j-te partielle Ableitung von u_n

$$\partial_j u_n(x) = \psi(n\,|x|) \cdot \partial_j u(x) + n \cdot \psi'(n\,|x|) \cdot \frac{x_j}{|x|} \cdot u(x)$$

gilt. *(1 Punkt)*

(d) Zeigen Sie mithilfe von (b) und (c), dass $\lim\limits_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{W^{1,2}(\Omega)} = 0$ gilt und folgern Sie daraus $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$. *(6 Punkte)*

(e) Folgern Sie nun, dass es Funktionen $u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap W^{1,2}(\Omega)$ gibt, die zwar zu $W_0^{1,2}(\Omega)$ gehören, aber dennoch auf $\partial\Omega$ nicht verschwinden. *(2 Punkte)*

Bitte wenden.

31. Zur Sobolevungleichung

In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass die Bedingung $p^* = \frac{np}{n-p}$ aus Satz 3.42 *notwendig* für das Bestehen der Sobolevungleichung ist. Seien hierzu $1 \leq p < n$ sowie $p^* \geq 1$ gegeben und es gelte die Sobolevungleichung 3.42, d.h.

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C(n,p)\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \qquad (*)$$

für alle $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ (mit einer nur von n und p abhängigen Konstanten $C(n,p)$). Zeigen Sie, dass dann $1 - \frac{n}{p} = -\frac{n}{p^*}$ (und folglich $p^* = \frac{np}{n-p}$) gilt. *(6 Punkte)*

[Tipp: Betrachten Sie für $\lambda > 0$ die Funktion $v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, definiert durch $v(x) := u(\lambda \cdot x)$ und wenden Sie auf v die Sobolevungleichung $(*)$ an.]

Hinweis: Die Termine der mündlichen Prüfung sind Mo, 15.12.2014 (ab 13:40 Uhr) und Mo, 22.12.2014 (ab 8:30 Uhr). Tragen Sie sich hierzu bitte baldmöglichst bei Frau Braak (Raum B129) zwecks konkreter Termine bzw. Uhrzeiten in eine entsprechende Liste ein.