1.2 Das Lebesgue-Maß auf $[0,1]^d$

Wir sind jetzt soweit, dass wir ein „Maß" von allgemeinen Mengen definieren können. Um unendliche Maßzahlen zunächst zu vermeiden, betrachten wir in diesem Abschnitt vorerst nur Teilmengen von $E := [0,1]^d$. Wir werden für solche Teilmengen zunächst ein *äußeres Maß* definieren. Dieses beruht auf der Approximation der gegebenen Menge durch *abzählbare* Vereinigung von Quadern (oder elementaren Mengen) „von außen". Wir werden sagen, dass eine Teilmenge von E *messbar* ist, wenn sie bezüglich des äußeren Maßes beliebig gut durch elementare Mengen approximiert werden kann. Die Beschränkung des äußeren Maßes auf das System der messbaren Mengen werden wir als *Lebesgue-Maß* bezeichnen; wir werden sehen, dass das Lebesgue-Maß (anders als das äußere Maß) ein Maß im Sinne der allgemeinen Definition ist.

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{Q}_E$ bzw. mit $\mathfrak{E}_E$ das System derjenigen Quader bzw. elementaren Mengen, die in E enthalten sind.

1.15 Definition. Für eine beliebige Teilmenge $A \subset E$ nennen wir die reelle Zahl

$$\lambda^*(A) := \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} m(Q_k) \,\middle|\, Q_1, Q_2, Q_3, \ldots \in \mathfrak{Q}_E,\ A \subset \bigcup_k Q_k \right\}$$

das *äußere Maß* von A.

1.16 Bemerkungen. (a) Die Menge, über die in Definition 1.15 das Infimum gebildet wird, enthält die Summe der Maße auch für alle *endlichen* Überdeckungen von A durch Quader; dies liegt daran, dass $Q_k = \varnothing$ für hinreichend großes k gewählt werden kann, um die Gestalt aus Definition 1.15 zu erreichen. Die Menge aus Definition 1.15 ist für jedes $A \subset E$ nichtleer, denn $E \in \mathfrak{Q}_E$ ist ein Quader, der A umfasst. Deshalb gilt stets $0 \leq \lambda^*(A) < \infty$.

(b) Man könnte das äußere Maß auch mit Hilfe von elementaren Mengen an Stelle von Quadern definieren, d.h. es gilt

$$\lambda^*(A) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \hat{m}(A_k) \,\middle|\, A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathfrak{E}_E,\ A \subset \bigcup_k E_k \right\} .$$

Wir erwarten natürlich, dass das äußere Maß, angewendet auf elementare Mengen, mit $\hat{m}$ übereinstimmt. Dass dies tatsächlich richtig ist, hängt ganz wesentlich von der σ-Additivität von $\hat{m}$ bzw. von der Subadditivität von $\hat{m}$ für abzählbare Vereinigungen (Lemma 1.14) ab.

1.17 Aussage. λ^* ist eine Fortsetzung von $\hat{m}$, d.h. es gilt $\lambda^*(A) = \hat{m}(A)$ für $A \in \mathfrak{E}_E$.

Beweis. Sei $A \in \mathfrak{E}_E$. Einerseits besitzt diese Menge eine Zerlegung

$$A = \bigcup_{k=1}^{n} Q_k \quad \text{mit} \quad Q_1, \ldots, Q_n \in \mathfrak{Q} \text{ und } Q_k \cap Q_\ell = \varnothing \text{ für } k \neq \ell .$$

Aus der Definition von $\lambda^*(A)$ folgt daher

$$\lambda^*(A) \leq \sum_{k=1}^{n} m(Q_k) = \hat{m}(A) .$$

Sind andererseits beliebige achsenparallele Quader $Q_1, Q_2, \ldots \in \mathfrak{Q}$ mit $A \subset \bigcup_k Q_k$ gegeben, so gilt wegen der Subadditivität von $\hat{m}$ für abzählbare Vereinigungen (Lemma 1.14)

$$\hat{m}(A) \leq \sum_k m(Q_k)$$

und daher

$$\hat{m}(A) \leq \lambda^*(A) .$$

Insgesamt folgt damit die Behauptung. □

Auch das äußere Maß λ^* ist wieder subadditiv für abzählbare Vereinigungen, wie die folgende Aussage zeigt. Man beachte jedoch, dass das äußere Maß im Allgemeinen *nicht* σ-additiv ist.

1.18 Aussage. Ist $(A_k)_{k \geq 1}$ eine beliebige Folge (abzählbar!) von Teilmengen von E und $A \subset \bigcup_k A_k$, so gilt

$$\lambda^*(A) \leq \sum_k \lambda^*(A_k) .$$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ fest. Für $k \geq 1$ gibt es wegen der Definition von $\lambda^*(A_k)$ jeweils abzählbar viele Quader $Q_{k,\ell} \in \mathfrak{Q}$ mit

$$A_k \subset \bigcup_\ell Q_{k,\ell} \quad \text{und} \quad \sum_\ell m(Q_{k,\ell}) \leq \lambda^*(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k} .$$

Dann gilt

$$A \subset \bigcup_{k,\ell} Q_{k,\ell} ,$$

und deshalb gilt wegen der Definition von $\lambda^*(A)$

$$\begin{aligned} \lambda^*(A) &\leq \sum_{k,\ell} m(Q_{k,\ell}) = \sum_k \left(\sum_\ell m(Q_{k,\ell}) \right) \\ &\leq \sum_k \left(\lambda^*(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k} \right) = \sum_k \lambda^*(A_k) + \varepsilon . \end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung. □

1.19 Korollar. λ^* ist monoton, d.h. ist $A \subset B \subset E$, so gilt $\lambda^*(A) \leq \lambda^*(B)$.

Beweis. Wähle in Aussage 1.18: $A_1 := B$ und $A_k := \varnothing$ für $k \geq 2$. □

Wir sind nun soweit, dass wir sagen können, welche Teilmengen von E messbar heißen sollen, nämlich diejenigen, die sich bezüglich λ^* beliebig gut durch elementare Mengen annähern lassen. Die Einschränkung von λ^* auf das System der messbaren Mengen bezeichnen wir als Lebesgue-Maß.

Erinnerung: Für beliebige Mengen A und B ist $A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ die *symmetrische Differenz* von A und B.

1.20 Definition. Eine Menge $A \subset E$ heißt *messbar*, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $B_\varepsilon \in \mathfrak{E}_E$ gibt mit

$$\lambda^*(A \triangle B_\varepsilon) < \varepsilon \; .$$

Wir bezeichnen das System der messbaren Mengen in E mit $\mathfrak{A}_E$. Die Einschränkung λ von λ^* auf $\mathfrak{A}_E$ bezeichnen wir als *Lebesgue-Maß*.

Offenbar sind alle Quader und alle elementare Mengen messbar: $\mathfrak{Q}_E \subset \mathfrak{E}_E \subset \mathfrak{A}_E$. Für elementare Mengen $A \in \mathfrak{A}_E$ gilt $\lambda(A) = \hat{m}(A)$ (siehe Aussage 1.17).

Die folgende Aufgabe zeigt die Abgeschlossenheit von $\mathfrak{A}_E$ unter endlichen Mengenoperationen:

1.21 Aufgabe. Es seien $A, A_1, A_2 \in \mathfrak{A}_E$. Zeige:

(a) $E \setminus A \in \mathfrak{A}_E$
[Tipp. $(E \setminus A) \triangle (E \setminus B_\varepsilon) = A \triangle B_\varepsilon$.]

(b) $A_1 \cup A_2 \in \mathfrak{A}_E$
[Tipp. $(A_1 \cup A_2) \triangle (B_1 \cup B_2) \subset (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2)$.]

(c) $A_1 \cap A_2 \in \mathfrak{A}_E$
[Tipp. Verwende (a) und (b).]

(d) $A_1 \setminus A_2 \in \mathfrak{A}_E$
[Tipp. Verwende (a) und (c).]

(e) $A_1 \triangle A_2 \in \mathfrak{A}_E$.

In ähnlicher Weise ist λ endlich additiv (wohingegen λ^* nur subadditiv ist; dies ist einer der wesentlichen Vorzüge von λ gegenüber λ^*):

1.22 Aussage. Seien paarweise disjunkte Menge $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{A}_E$ gegeben und

$$A := \bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathfrak{A}_E \; .$$

Dann ist

$$\lambda(A) = \sum_{k=1}^{n} \lambda(A_k) \; .$$

Wir wollen zum gegenwärtigen Zeitpunkt keinen Beweis dieser Aussage geben. Später werden wir die Konstruktion des Lebesgue-Maßes als einen Spezialfall eines allgemeinen Konstruktionsverfahrens für Maße (mittels des Satzes von Carathéodory) erkennen, der Beweis von Aussage 1.22 wird sich dann in diesem allgemeineren Kontext ergeben.

Tatsächlich ist $\mathfrak{A}_E$ sogar unter *abzählbaren* Vereinigungen bzw. Schnitten abgeschlossen (anders als $\mathfrak{E}_E$), und λ ist sogar σ-additiv:

1.23 Satz. Seien $A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathfrak{A}_E$. Dann gilt

$$\bigcup_k A_k \ , \ \bigcap_k A_k \ \in \ \mathfrak{A}_E \ .$$

Beweis. Zur Vereinigung. Es sei eine Folge (A_k) von messbaren Mengen gegeben und $A := \bigcup_{k=1}^\infty A_k$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir voraussetzen, dass die A_k paarweise disjunkt sind; diesen Zustand kann man erreichen, indem man jeweils A_k durch $A_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} A_j \in \mathfrak{A}_E$ (siehe Aufgabe 1.21) ersetzt.

Sei nun $\varepsilon > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ fest. Dann betrachten wir die Zerlegung

$$A = \left(\bigcup_{k=1}^n A_k \right) \cup \left(\bigcup_{k=n+1}^\infty A_k \right) .$$

Da nach Aufgabe 1.21(b) die Menge $\bigcup_{k=1}^n A_k$ messbar ist, existiert $B_{n,\varepsilon} \in \mathfrak{E}_E$ mit

$$\lambda^* \left(\left(\bigcup_{k=1}^n A_k \right) \triangle B_{n,\varepsilon} \right) < \frac{\varepsilon}{2} . \tag{1.3}$$

Dabei gilt

$$A \triangle B_{n,\varepsilon} \subset \left(\left(\bigcup_{k=1}^n A_k \right) \triangle B_{n,\varepsilon} \right) \cup \left(\bigcup_{k=n+1}^\infty A_k \right) .$$

Wegen der abzählbaren Subadditivität von λ^* (Aussage 1.18) gilt deshalb

$$\lambda^*(A \triangle B_{n,\varepsilon}) \le \lambda^* \left(\left(\bigcup_{k=1}^n A_k \right) \triangle B_{n,\varepsilon} \right) + \sum_{k=n+1}^\infty \lambda^*(A_k) \overset{(1.3)}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=n+1}^\infty \lambda^*(A_k) . \tag{1.4}$$

Wir zeigen nun, dass für hinreichend großes $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum_{k=n+1}^\infty \lambda^*(A_k) < \frac{\varepsilon}{2}$. Dazu genügt es (wegen des Cauchy-Kriteriums für Reihen) zu zeigen, dass $\sum_{k=1}^\infty \lambda^*(A_k) < \infty$ ist, und dies ist der Fall, denn für jedes $\widetilde{n} \in \mathbb{N}$ gilt wegen der endlichen Additivität von λ (Aussage 1.22)

$$\sum_{k=1}^{\widetilde{n}} \lambda^*(A_k) = \sum_{k=1}^{\widetilde{n}} \lambda(A_k) = \lambda \left(\bigcup_{k=1}^{\widetilde{n}} A_k \right) \le \lambda(E) = 1 .$$

Somit folgt mit demgemäß gewählten n aus (1.4):

$$\lambda^*(A \triangle B_{n,\varepsilon}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

und damit die Behauptung.

Zum Schnitt. Die Behauptung folgt aus dem Vorangegangenen aufgrund der Gleichung

$$\bigcap_k A_k = E \setminus \left(\bigcup_k (E \setminus A_k) \right) .$$

$\square$