Martin Schmidt
Tobias Simon

# Partielle Differentialgleichungen

## 5. Übung

29. September 2014

(abzugeben in der Vorlesung am 6. Oktober 2014)

**13. Differentialoperatoren in Divergenz- und Nicht-Divergenzform.**

Seien $a_{ij}, \widetilde{a}_{ij}, b_i, \widetilde{b}_i$ und $c, \widetilde{c}$ differenzierbare Funktionen auf einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Ein Differentialoperator $L : C^2(\Omega) \to C(\Omega)$ 2ter Ordnung ist in Divergenzform gegeben, wenn sich $L$ wie folgt schreiben lässt:

$$(Lu)(x) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i \left( \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)\partial_j u(x) + b_i(x)u(x) \right) + c(x)u(x)$$

Ein Differentialoperator $\widetilde{L} : C^2(\Omega) \to C(\Omega)$ 2ter Ordnung ist in Nicht-Divergenzform gegeben, wenn sich $\widetilde{L}$ wie folgt schreiben lässt:

$$(\widetilde{L}u)(x) = \sum_{i,j=1}^{n} \widetilde{a}_{ij}(x)\partial_i\partial_j u(x) + \sum_{i=1}^{n} \widetilde{b}_i(x)\partial_i u(x) + \widetilde{c}(x)u(x)$$

Zeigen Sie, dass sich jeder Differentialoperator $L$ 2ter Ordnung in Divergenzform auch in Nicht-Divergenzform und umgekehrt jeder Differentialoperator $\widetilde{L}$ 2ter Ordnung in Nicht-Divergenzform auch in Divergenzform schreiben lässt. *(6 Punkte)*

**14. Über das Transformationsverhalten von Differentialoperatoren zweiter Ordnung.**

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $L$ ein Differentialoperator zweiter Ordnung auf $\Omega$ in Nicht-Divergenzform, d.h. es gibt stetige Funktionen $a_{ij}$, $b_i$, $c$ in $\Omega$, so dass $L$ die Form

$$(Lu)(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\partial_i\partial_j u(x) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\partial_i u(x) + c(x)u(x) \quad \text{für } u \in C^2(\Omega), x \in \Omega \qquad (*)$$

hat.

Außerdem sei $\widetilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ eine weitere offene Teilmenge und $\varphi : \Omega \to \widetilde{\Omega}$ ein C$^2$-Diffeomorphismus, d.h. $\varphi$ ist bijektiv, zweimal stetig differenzierbar, und $\varphi^{-1} : \widetilde{\Omega} \to \Omega$ ist ebenfalls zweimal stetig differenzierbar.

**(a)** Man zeige, dass durch $\widetilde{L}(\widetilde{u}) := L(\widetilde{u} \circ \varphi) \circ \varphi^{-1}$, d.h.

$$\widetilde{L}(\widetilde{u}) \circ \varphi = L(\widetilde{u} \circ \varphi)$$

für $\widetilde{u} \in C^2(\widetilde{\Omega})$ ein Differentialoperator zweiter Ordnung $\widetilde{L}$ auf $\widetilde{\Omega}$ definiert wird, d.h. dass es stetige Funktionen $\widetilde{a}_{k\ell}, \widetilde{b}_k, \widetilde{c}$ in $\widetilde{\Omega}$ mit

$$\widetilde{L}\widetilde{u} = \sum_{k,\ell=1}^{n} \widetilde{a}_{k\ell}\, \partial_k\partial_\ell \widetilde{u} + \sum_{k=1}^{n} \widetilde{b}_k\, \partial_k \widetilde{u} + \widetilde{c}\,\widetilde{u}$$

gibt. *(9 Punkte)*

[Tipp. Man werte $(\widetilde{L}\widetilde{u})(\widetilde{x}) = \big(L(\widetilde{u} \circ \varphi)\big)(\varphi^{-1}(\widetilde{x}))$ für $\widetilde{u} \in C^2(\widetilde{\Omega})$ und $\widetilde{x} \in \widetilde{\Omega}$ mit Hilfe der Kettenregel aus.]

*Bitte wenden.*

**(b)** Es seien nun darüberhinaus $\Omega$ und $\widetilde{\Omega}$ beschränkt, und wir setzen voraus, dass $\varphi$, $\varphi^{-1}$ sowie alle Ableitungen dieser beiden Funktionen sich stetig auf den Abschluß $\overline{\Omega}$ bzw. $\overline{\widetilde{\Omega}}$ fortsetzen lassen. Zeigen Sie, dass unter dieser Voraussetzung $\widetilde{L}$ genau dann elliptisch ist, wenn $L$ elliptisch ist. *(8 Zusatzpunkte)*

[Hinweis: Aus Symmetriegründen genügt es, nur eine Richtung zu zeigen.]

**15. Elliptische Differentialoperatoren**

Sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine (konstante) symmetrische Matrix. Zeigen Sie, dass der Differentialoperator $L$ 2ter Ordnung, definiert durch

$$(Lu)(x) := \nabla \cdot (A \nabla u(x))$$

auf $\mathbb{R}^n$ genau dann elliptisch ist, wenn eine invertierbare lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ existiert, so dass $L(u \circ \varphi) = (\triangle u) \circ \varphi$ gilt. *(9 Punkte)*

[Tipp für "$\Rightarrow$": Man nutze aus, dass $A$ orthogonal diagonalisierbar ist, d.h. (orthogonal) ähnlich zu einer Diagonalmatrix. Man begründe, dass sogar $B^T A B = \mathbb{1}$ (mit einer invertierbaren Matrix $B$) gilt und definiere die lineare Abbildung $\varphi(x) := B^T x$. Für "$\Leftarrow$" darf die Aussage von Aufgabe 14b benutzt werden, welche (aufgrund der Linearität von $\varphi$) auch in diesem Fall gilt, obwohl $\mathbb{R}^n$ unbeschränkt ist.]

**16. Hölder-stetige Funktionen.** Diese Aufgabe zeigt, weshalb man keine Hölder-Räume $C^{0,\alpha}(\Omega)$ für $\alpha > 1$ betrachtet. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, d.h. offen und zusammenhängend. Weiter sei $\alpha > 1$ und $u \in C^{0,\alpha}(\Omega)$. Zeigen Sie: $u$ ist differenzierbar mit $\nabla u \equiv 0$, d.h. $u \equiv \text{const.}$ in $\Omega$. [Tipp: Abschätzung des Differenzenquotienten mit Hilfe der Hölderkonstanten] *(6 Punkte)*