Martin Schmidt
Tobias Simon

Partielle Differentialgleichungen
7. Übung
(abzugeben in der Vorlesung am 20. Oktober 2014)

13. Oktober 2014

21. Stetige Fortsetzung linearer Operatoren

Sei Y ein Banachraum und X ein normierter Vektorraum. Sei $V \subseteq X$ ein in X dichter Unterraum, d.h. $\overline{V} = X$. Weiter sei eine stetige lineare Abbildung $T : V \to Y$ gegeben. Zeigen Sie: T ist auf ganz X stetig fortsetzbar. *(8 Punkte)*

22. Nicht-kompakte Einbettungen

Sei $\Omega := (0, 1)$. Zeigen Sie: Die Einbettung $C^0(\overline{\Omega}) \to L^2(\Omega)$ ist nicht kompakt. *(6 Punkte)*
[Tipp: Verwenden Sie die Folge $u_n(x) := \sin(n\pi x)$ für $n \in \mathbb{N}$.]

23. Rechnen in Sobolevräumen (Teil 1)

Sei $\Omega := (0, \frac{1}{2})$. In welchen Sobolevräumen $W^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, liegt die Funktion $u : (0, \frac{1}{2}) \to \mathbb{R}$, definiert durch $u(x) := \frac{1}{|\ln(x)|}$? *(8 Punkte)*

24. Rechnen in Sobolevräumen (Teil 2)

Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 1 + x & \text{für } -1 \leq x \leq 0 \\ 1 - x & \text{für } \quad 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

sowie die von ihr induzierte Distribution

$$F : C_0^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ \phi \mapsto F(\phi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot \phi(x) \,\mathrm{d}x \ .$$

(a) Skizzieren Sie den Graphen von f. *(1 Punkt)*

(b) Bestimmen Sie die erste Ableitung der Distribution F. *(4 Punkte)*

(c) Zeigen Sie, dass die zweite Ableitung der Distribution F eine Linearkombination von Dirac-Distributionen ist. *(3 Punkte)*

(d) Folgern Sie aus (b) und (c), dass $f \in W^{1,1}(\mathbb{R})$, aber $f \notin W^{2,1}(\mathbb{R})$ gilt. *(3 Punkte)*