Martin Schmidt
Tobias Simon

Partielle Differentialgleichungen
6. Übung

6. Oktober 2014

(abzugeben in der Vorlesung am 13. Oktober 2014)

17. Zur Stetigkeit linearer Operatoren.

Seien X, Y normierte Räume und $T : X \to Y$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass folgende drei Aussagen äquivalent sind:

(i) T ist stetig.

(ii) T ist im Nullpunkt stetig.

(iii) Es gibt ein $C < \infty$, so dass $\|T(x)\|_Y \leq C \cdot \|x\|_X$ für alle $x \in X$ gilt.

(7 Punkte)

18. Über kompakte Mengen in Banachräumen.

Es sei X ein Banachraum. Zeigen Sie die folgende Äquivalenz:

$$dim(X) < \infty \quad \Longleftrightarrow \quad \overline{B(0,1)} := \{\, x \in X \mid \|x\| \leq 1 \,\} \quad \text{ist kompakt.}$$ *(8 Punkte)*

[Tipp zu "$\Leftarrow$": Man überdecke $\overline{B(0,1)}$ mit endlich vielen offenen Kugeln mit Radius $\frac{1}{2}$, etwa $\overline{B(0,1)} \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(a_i, \frac{1}{2})$. Sei V der durch $a_1, \ldots, a_n$ erzeugte endlich-dimensionale Unterraum von X. Man konstruiere zu $x \in X$ rekursiv eine Folge $(x_k)_k \subseteq V$ und zeige, dass diese Folge gegen x konvergiert. Hieraus folgere man $X = V$. Generell darf verwendet werden, dass auf endlich-dimensionalen normierten $\mathbb{K}$-Vektorräumen (mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) alle Normen äquivalent sind (dies ist letztlich eine Folgerung daraus, dass solche Räume isomorph zu $\mathbb{K}^n$ sind und in $\mathbb{K}^n$ alle Normen äquivalent sind).]

19. Kompakte Operatoren in Banachräumen.

Es seien X, Y zwei Banachräume. Dann heißt $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ *kompakt*, wenn es für jede beschränkte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ gibt, so dass $(Tx_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ in Y konvergiert.

(a) Zeigen Sie, dass $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ genau dann kompakt ist, wenn das Bild der offenen Einheitskugel $B(0,1) = \{\, x \in X \mid \|x\| < 1 \,\}$ von X unter T relativ-kompakt ist, d.h. wenn $\overline{T[B(0,1)]}$ kompakt ist. *(8 Punkte)*

[Tipp: Man verwende, dass eine Teilmenge eines metrischen Raums genau dann (überdeckungs-)kompakt ist, wenn sie folgenkompakt ist.]

(b) Zeigen Sie: Die identische Abbildung $\mathbb{1}_X$ von X ist genau dann kompakt, wenn X endlich-dimensional ist. [Tipp. Aufgabe 18.] *(2 Punkte)*

Bitte wenden.

20. Über Hölder-Stetigkeit.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$.

(a) Zeigen Sie: Ist $u \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ für ein $0 < \alpha \leq 1$, so ist u gleichmäßig stetig. *(3 Punkte)*

(b) Dieses Beispiel zeigt, dass die Umkehrung von (a) nicht gilt. Sei

$$f : \left[-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \frac{-1}{\ln|x|} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}.$$

Zeigen Sie: f ist gleichmäßig stetig, aber für *kein* $0 < \alpha \leq 1$ hölder-stetig. *(6 Punkte)*