Martin Schmidt
Tobias Simon

Partielle Differentialgleichungen
10. Übung

3. November 2014

(abzugeben in der Vorlesung am 10. November 2014)

32. Über schwache Lösungen elliptischer Differentialgleichungen.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, L ein elliptischer Differentialoperator wie in Definition 4.1,

$$\mathcal{L}(u,v) := \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}\partial_j u + b_i u \right) \partial_i v - \left(\sum_{i=1}^n c_i \partial_i u + du \right) v \right) d\mu \ ,$$

$u \in W^{1,2}(\Omega)$ und $f \in L^2(\Omega)$.

(a) Zeigen Sie: Wenn sowohl $Lu \geq f$ als auch $Lu \leq f$, d.h. $-\mathcal{L}(u,v) \geq \langle f,v \rangle$ und $-\mathcal{L}(u,v) \leq \langle f,v \rangle$ für alle $0 \leq v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ gilt, so gilt für *alle* $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ (also nicht nur für $v \geq 0$): $-\mathcal{L}(u,v) = \langle f,v \rangle$. Ist dies der Fall, so schreiben wir auch kurz $Lu = f$ im schwachen Sinne. *(3 Punkte)*

(b) Zeigen Sie, dass die folgende, durch Lu definierte Abbildung eine Distribution ist:

$$C_0^\infty(\Omega) \to \mathbb{R},\ \phi \mapsto -\mathcal{L}(u,\phi)\ .$$ *(3 Punkte)*

(c) Sei nun $u \in W_{\text{loc}}^{1,2}(\Omega)$, $f \in L_{\text{loc}}^2(\Omega)$, so dass $\triangle u = f$ im schwachen Sinne gilt. Zeigen Sie, dass für $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\triangle(\phi u) = (\triangle\phi)u + 2\nabla\phi \cdot \nabla u + \phi f$$

im Sinne von Distributionen gilt. [Erinnerung: Eine Gleichung $g = h$ gilt *im Sinne von Distributionen*, wenn $F_g = F_h$ gilt (wobei wir mit $F_g : \psi \mapsto \int_\Omega g\psi\, d\mu$ für $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ wie üblich die von einer Funktion g induzierte Distribution bezeichnen).] *(7 Punkte)*

33. Schwache Lösungen der Poisson-Gleichung.

Im folgenden untersuchen wir ein Beispiel für Funktionen $u, f \in C(\Omega)$, so dass u eine schwache Lösung der Poisson-Gleichung zu f ist (d.h. $\triangle u = f$ im schwachen Sinne gilt), jedoch $u \notin C^2(\Omega)$ ist. Zu diesem Zweck betrachten wir in $\mathbb{R}^2$ die offene Kreisscheibe

$$\Omega := B(0, \tfrac{1}{2}) := \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 < \tfrac{1}{4} \}\ ,$$

setzen $\dot\Omega := \Omega \setminus \{0\}$, und definieren für $(x,y) \in \dot\Omega$

$$u(x,y) := (x^2 - y^2) \cdot \log|\log(r)| \quad \text{mit} \quad r := |(x,y)| = (x^2+y^2)^{1/2}\ .$$

(a) Zeigen Sie: Es ist $u \in C^2(\dot\Omega)$ und u lässt sich durch die Setzung $u(0,0) := 0$ stetig auf Ω fortsetzen. *(3 Punkte)*

[Tipp: Man zeige, dass für hinreichend kleine $r > 0$ gilt: $0 \leq \log|\log(r)| \leq \frac{1}{r}$.]

Bitte wenden.

(b) Man rechne nach, dass für $(x,y) \in \dot{\Omega}$

$$\frac{\partial}{\partial x}u(x,y) = 2x\log|\log(r)| + (x^3 - y^2x)\frac{1}{r^2\log(r)} \ ,$$
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,y) = 2\log|\log(r)| + (5x^2 - y^2)\frac{1}{r^2\log(r)} - (x^4 - x^2y^2)\frac{2\log(r)+1}{r^4(\log(r))^2}$$

gilt und folgere daraus $u \in W^{1,2}(\Omega)$, jedoch $u \notin C^2(\Omega)$. *(8 Punkte)*

(c) Man begründe, dass für $(x,y) \in \dot{\Omega}$ gilt: $\frac{\partial^2}{\partial y^2}u(x,y) = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(y,x)$, und folgere hieraus mittels (b):

$$\triangle u(x,y) = (x^2 - y^2)\left(\frac{4}{r^2\log(r)} - \frac{1}{r^2(\log(r))^2}\right) \ .$$

Aus dieser Gleichung entnehme man $\lim\limits_{r\to 0}\triangle u(x,y) = 0$; daher läßt sich $\triangle u$ zu einer stetigen Funktion f auf Ω fortsetzen. *(5 Punkte)*

(d) Zeigen Sie für $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ und $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ die Formel

$$\int_{\Omega\setminus\overline{B(0,\varepsilon)}} u\triangle\phi \,\mathrm{d}\mu = \int_{\Omega\setminus\overline{B(0,\varepsilon)}} f\phi \,\mathrm{d}\mu - \int_{\partial B(0,\varepsilon)} (u\nabla\phi - \phi\nabla u)\cdot N \,\mathrm{d}\sigma$$

und folgern Sie hieraus, dass $\triangle u = f$ im schwachen Sinne auf Ω gilt. *(6 Punkte)*