Martin Schmidt
Tobias Simon

Partielle Differentialgleichungen
13. Übung

24. November 2014

(abzugeben in der Vorlesung am 1. Dezember 2014)

39. Mehr über die Spektraltheorie des Laplace-Operators.

Es sei $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit $\partial\Omega \in C^{0,1}$. Im Anschluss an Aufgabe 38 setzen wir unsere Untersuchung des Spektrums und der Eigenfunktionen des Laplace-Operators $\triangle$ auf Ω mit Nullrandwerten fort. Wir verwenden die dort eingeführten Bezeichnungen. Insbesondere bezeichnen wir als das (Punkt-)Spektrum des Operators $\triangle$ auf $W_0^{1,2}(\Omega)$ die Menge seiner Eigenwerte.

(a) Sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von in $L^2(\Omega)$ paarweise orthonormalen Funktionen $u_n \in W_0^{1,2}(\Omega)$, so dass jeweils u_n eine Eigenfunktion des Laplace-Operators zum Eigenwert $\lambda_n \in \mathbb{R}$ ist. Zeigen Sie, dass die Folge $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt ist. *(7 Punkte)*

[Tipp: Unter der Annahme, dass (λ_n) beschränkt wäre, zeige man mittels des Satzes von Rellich 3.39, dass die Folge (u_n) eine in $L^2(\Omega)$ gegen ein $u \in L^2(\Omega)$ konvergente Teilfolge besitzt. Man zeige dann, dass einerseits $\|u\|_{L^2(\Omega)} = 1$ gelten muss, dass aber andererseits aus der Orthonormalität der u_n folgt: $\|u\|_{L^2(\Omega)} = 0$.]

(b) Folgern Sie aus (a): Die Eigenräume von $\triangle$ sind endlich-dimensional und das Spektrum von $\triangle$ ist diskret. Daher existiert eine kleinste reelle Zahl $\lambda_1 > 0$ im Spektrum von $\triangle$.

(7 Punkte)

(c) Zeigen Sie, dass das in Aufgabe 38(c),(d) konstruierte Orthonormalsystem (a_n) tatsächlich sogar eine „abzählbare Orthonormalbasis" von $L^2(\Omega)$ ist, d.h. dass für jedes $f \in L^2(\Omega)$ die folgende Gleichung gilt, wobei die rechtsstehende Reihe in $L^2(\Omega)$ absolut konvergiert:

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, a_n \rangle_{L^2(\Omega)} \cdot a_n \,.$$

(6 Zusatzpunkte)

(d) Zeigen Sie, dass aufgrund der in Teil (c) bewiesenen Tatsache (ohne Verwendung des Existenzsatzes 4.3) für $f \in L^2(\Omega)$ das Dirichlet-Problem $-\triangle u = f$, $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ eine schwache Lösung $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ besitzt und konstruieren Sie diese.

(9 Zusatzpunkte)

40. Eine Interpolationsungleichung.

Sei $B(0,1) \subseteq \mathbb{R}^n$ und $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum, der $C^1(\overline{B(0,1)})$ derart enthält, dass eine stetige, injektive Abbildung $I : C^1(\overline{B(0,1)}) \hookrightarrow X$ existiert. Zeigen Sie, dass ein $C < \infty$ existiert, so dass

$$\|u\|_{C^2(\overline{B(0,1)})} \leq C \left(\|D^2 u\|_{L^\infty(B(0,1))} + \|I(u)\|_X \right)$$

gilt. *(7 Punkte)*

[Tipp: Man zeige zunächst, dass die Einbettungen $C^2(\overline{B(0,1)}) \to C^1(\overline{B(0,1)}) \hookrightarrow X$ die Voraussetzungen des Lemmas von Ehrling 3.3 erfüllen, d.h. dass die Abbildung $T : C^2(\overline{B(0,1)}) \to C^1(\overline{B(0,1)})$ kompakt ist.]

Hinweis: Die Termine der mündlichen Prüfungen sind nun der 22.12.2014 und der 6.2.2015. Denken Sie daran (falls noch nicht geschehen), dass eine offizielle Anmeldung im Studienbüro erforderlich ist.