Martin Schmidt
Tobias Simon

Partielle Differentialgleichungen
3. Übung
(abzugeben in der Vorlesung am 22. September 2014)

15. September 2014

7. Fundamentallösung der Laplace-Gleichung.

(a) Es sei $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ rotationssymmetrisch, d.h. es gelte $u(x) = v(\|x\|)$ mit einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion $v : [0, \infty) \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass dann

$$\triangle u(x) = \|x\|^{1-n} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\bigg|_{r=\|x\|} (r^{n-1} \cdot v'(r))$$

gilt. *(5 Punkte)*

[Tipp: Man betrachte zunächst $x \neq 0$. Die Behauptung für $x = 0$ folgt dann mit einem Stetigkeitsargument.]

(b) Es sei nun $n \geq 3$. Wir bezeichnen mit $\omega_n := \int_{\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}} 1 \, \mathrm{d}^n x$ das Volumen der Einheitsvollkugel im $\mathbb{R}^n$. Bezeichne $c_n := \frac{1}{n\,(n-2)\,\omega_n}$. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$\Phi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto c_n \cdot \|x\|^{2-n}$$

harmonisch ist. Φ heißt die *Fundamentallösung der Laplace-Gleichung.*

Zeigen Sie auch:

$$\nabla\Phi(x) = -\frac{1}{n\,\omega_n} \frac{x}{\|x\|^n}, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$ *(4+3 Punkte)*

[Tipp: Aufgabe 7(a)]

(c) Zeigen Sie, dass $\int_{B(0,\varepsilon)} \Phi(x) d^n x$ für $\varepsilon \to 0$ gegen 0 konvergiert. *(3 Punkte)*

[Tipp: Es darf verwendet werden, dass für $\Phi(x) =: v(\|x\|)$ (mit auf $\mathbb{R}^+$ glattem v, vgl. Aufgabe 7(a)) $\int_{B(0,\varepsilon)} \Phi(x) d^n x = const \cdot \int_0^\varepsilon v(r) \cdot r^{n-1} dr$ gilt.]

8. Lösungen der Poisson-Gleichung. Es sei $n \geq 3$ und Φ die Fundamentallösung der Laplace-Gleichung aus Aufgabe 7. Weiter sei eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger gegeben. Wir wollen zeigen, dass die Faltung von f mit Φ eine Lösung der sog. *Poisson-Gleichung* $-\triangle u = f$ auf $\mathbb{R}^n$ ist.

Dazu gehen wir in mehreren Schritten vor:

(a) Begründen Sie, dass das Integral $\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\,\Phi(y)\,\mathrm{d}^n y$ für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ wohldefiniert ist (obwohl Φ in Null nicht definiert ist). Zeigen Sie weiter, dass die hierdurch definierte Funktion

$$u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ x \mapsto (f * \Phi)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\,\Phi(y)\,\mathrm{d}^n y$$

zweimal stetig differenzierbar ist und dass

$$\triangle u = \int_{\mathbb{R}^n} \triangle f(x-y) \cdot \Phi(y)\,\mathrm{d}^n y \qquad (*)$$

gilt. *(2+2 Punkte)*

[Tipp: Zum Nachweis der Wohldefiniertheit beachte man den Tipp von Aufgabe 7(c).]

Bitte wenden.

(b) Sei nun $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann zerlegen wir das Integral $(*)$ in einen Anteil nahe der Singularität von Φ und einen von der Singularität entfernten Anteil:

$$I_\varepsilon := \int_{B(0,\varepsilon)} \triangle f(x-y) \cdot \Phi(y) \, \mathrm{d}^n y \, ,$$
$$J_\varepsilon := \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\varepsilon)} \triangle f(x-y) \cdot \Phi(y) \, \mathrm{d}^n y \, .$$

Zeigen Sie, dass $\lim_{\varepsilon \to 0+} I_\varepsilon = 0$ ist. *(3 Punkte)*

[Tipp: Aufgabe 7(c)]

(c) Zeigen Sie, dass für J_ε gilt:

$$J_\varepsilon = -\int_{\partial B(0,\varepsilon)} f(x-y) \cdot \nabla_y \Phi(y) \cdot N \mathrm{d}\sigma(y) + L_\varepsilon \, ,$$

wobei L_ε ein Ausdruck ist, der für $\varepsilon \to 0$ gegen Null konvergiert (man zeige dies). N bezeichnet die äußere Normale auf $\partial B(0,\varepsilon)$, betrachtet als Rand von $\mathbb{R}^n \setminus B(0,\varepsilon)$.

(7 Punkte)

[Tipp: mehrmaliges Anwenden von Aufgabe 2(a) und dem Gaußschen Integralsatz. Man nutze weiter aus, dass Φ nach Aufgabe 7(b) auf $\mathbb{R}^n \setminus B(0,\varepsilon)$ harmonisch ist. Es darf außerdem verwendet werden, dass das Maß von $\partial B(0,\varepsilon)$ gleich $n\omega_n\varepsilon^{n-1}$ ist.]

(d) Zeigen Sie, dass $\int_{\partial B(0,\varepsilon)} f(x-y) \cdot \nabla_y \Phi(y) \cdot N \mathrm{d}\sigma(y)$ gleich dem Mittelwert von f auf $\partial B(x,\varepsilon)$ ist, d.h. gleich $m(x,\varepsilon) := \frac{1}{\varepsilon^{n-1} n\omega_n} \int_{\partial B(x,\varepsilon)} f(y) \, \mathrm{d}\sigma(y)$ und folgern Sie daraus $-\triangle u = f$.

(5 Punkte)

[Tipp: Man verwende die Formel für $\nabla\Phi$ aus Aufgabe 7(b) und überlege sich, dass das zum Nullpunkt weisende Einheitsnormalenfeld an $\partial B(0,\varepsilon)$ durch $N(x) = -\frac{x}{\|x\|}$ gegeben ist. Es darf verwendet werden, dass $\lim_{\varepsilon \to 0} m(x,\varepsilon) = f(x)$ gilt.]