UNIVERSITÄT
MANNHEIM

Seminararbeit zu ausgewählten Themen gewöhnlicher Differentialgleichungen und Dynamischen Systeme

Thema: Hyperbolische lineare Flüsse

im Studiengang Wirtschaftsmathematik
HWS 2014

eingereicht von: Van Hoan Nguyen

Dozent: Herr Prof. Dr. Martin U. Schmidt

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

In dieser Arbeit wird der Begriff der Hyperbolizität eingeführt. Dabei werden aber zunächst nur die hyperbolische lineare Flüsse betrachtet.
Im Folgenden betrachten wir den allgemeinen Fall eines beliebigen $\mathbb{K}$-Vektorraums $E = (E, |.|)$ mit $dim_{\mathbb{K}}(E) = m < \infty$. Die entsprechende Norm auf $\mathcal{L}(E)$ bezeichnen wir mit $\|.\|_E$. Für $A \in \mathcal{L}(E)$ schreiben wir e^{tA} *den von* A *erzeugte lineare Fluss auf* E, statt

$$\varphi : \mathbb{R} \times E \to E, (t, x) \mapsto e^{tA}x$$

Satz 1.1. *Für* $A \in \mathcal{L}(E)$ *gilt genau dann* $\Re(\sigma(A)) < 0$, *wenn für jede Lösung* $u \neq 0$ *von* $\dot{x} = Ax$

$$\lim_{t\to\infty} \|u(t)\| = 0.$$

Analog gilt $\Re(\sigma(A)) > 0$ *genau dann, wenn für jede Lösung* $u \neq 0$ *von* $\dot{x} = Ax$ *in* E *ist*

$$\lim_{t\to\infty} \|u(t)\| = \infty.$$

Beweis. Wir bringen A auf Jordansche Normalform. Da alle Normen auf endlichdimensionalen Räumen äquivalent sind, genügt es den Satz für die Jordansche Normalform von A zu beweisen.
Offensichtlich ist $u(t) = e^{tA}x$ die Lösung von $\dot{x} = Ax$ mit $x \neq 0$ und $t > 0$. Aus der Vorlesung Differentialgleichung wissen wir, dass alle Lösungen u von $\dot{x} = Ax$ Linearkombination von Funktionen der Form $t^n e^{t\lambda} y$ mit $\lambda \in \sigma(A)$ und $y \in E$ sind. Wegen $|e^{t\lambda}| = e^{t\Re(\lambda)}$ gilt genau dann für $\Re(\sigma(A)) < 0$

$$\lim_{t\to\infty} \|u(t)\| = \lim_{t\to\infty} \|e^{tA}x\| \leq \lim_{t\to\infty} \|e^{tA}\| \|x\| = \|x\| \lim_{t\to\infty} \|e^{t\lambda}\| = \|x\| \lim_{t\to\infty} (e^{t\Re(\lambda)}) = 0$$

also $\lim_{t\to\infty} \|u(t)\| = 0$. Analog gilt $\lim_{t\to\infty} \|u(t)\| = \infty$ genau dann für $\Re(\sigma(A)) > 0$, da $\lim_{t\to\infty} (e^{t\Re(\lambda)}) = \infty$ für $\Re(\lambda) > 0$. □

2 Senke und Quelle

Der Nullpunkt von E ist natürlich ein kritischer Punkt von e^{tA} und zwar der einzige, falls A injektiv ist.

Defintion 2.1. *Der Nullpunkt von* e^{tA} *heißt eine Senke (bzw. eine Quelle), wenn für alle* $x \in E\backslash\{0\}$ *gilt:*

$$\lim_{t\to\infty} e^{tA}x = 0 \quad (bzw. \quad \lim_{t\to-\infty} e^{tA}x = 0)$$

Wegen Satz (1.1) ist 0 genau dann eine Senke (bzw. Quelle), wenn für alle $\lambda \in \sigma(A)$ gilt:

$$\Re(\lambda) < 0 \quad bzw. \quad \Re(\lambda) > 0$$

3 Kontraktion und Expansion

Definition 3.1. *Ist 0 eine Senke, so heißt der lineare Fluss e^{tA} eine Kontraktion. Analog heißt er eine Expansion, falls 0 eine Quelle ist.*

Mit Hilfe des folgenden Lemma wollen wir zeigen, dass bei einer Kontraktion (bzw. Expansion) jede Flusslinie $\varphi_x(t) = e^{tA}x$ mit $x \neq 0$ für $t \to \infty$ exponentiell gegen 0(bzw. „gegen ∞") konvergiert.
Ist $M \in \mathbb{C}$ nicht leer und ist $\beta \in \mathbb{R}$, so schreiben wir im Folgenden

$$\Re(M) < \beta,$$

wenn $\Re(m) < \beta$ für alle $m \in M$ gilt. Analog sind verwandte Ungleichungen zu interpretieren.
Unter einer Hilbertnorm $\|\cdot\|$ verstehen wir eine aus einem Skalarprodukt abgeleitete Norm, d.h für ein geeignetes Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf E gilt $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$.

Lemma 3.2. *Für $A \in \mathcal{L}(E)$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gelte $\Re(\sigma(A)) < \alpha$.Dann existitert eine Hilbertnorm $\|.\|$ auf E mit $\|e^{tA}\| \leq e^{\alpha t}\, \forall t \in \mathbb{R}_+$.*

Beweis. Zuerst betrachten wir den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
Mit einer geeigneten Basis können wir A in die Form $A = D + N$ schreiben, wobei D eine Diagonalmatrix mit

$$D = diag[\lambda_1, ..., \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_2, ..., \lambda_k, ..., \lambda_k] = diag[\mu_1, ..., \mu_m]$$

ist und N eine nilpotente Matrix mit Nilpotenzgrad m ($N^m = 0$) ist und ihre Einträge auf der ersten oberen Nebendiagonale 0 oder 1 sind sowie $DN = ND$.
Wir wählen eine Basis $B = \{e_1, ..., e_m\}$ von E so, dass $Ne_j = e_{j-1}$ oder 0 gilt. Nun ersetzen wir e_j durch $a_j = \delta^j e_j$ mit $\delta > 0$, damit D unverändert bleibt und für N gilt: $Na_j = \delta a_{j-1}$ oder 0.
Also hat die Matrix N bezüglich der Basis $\{a_1, ..., a_m\}$ in den Einträgen der ersten oberen Nebendiagonale 0 oder δ. Daraus haben wir für $\|x\| \leq 1$:

$$\|N\| := max\ \|Nx\| = max\ \|(\delta x_1, ..., \delta x_m, 0)\| \leq \delta$$

Verwenden wir jetzt die zu dieser Basis gehörige euklidische Norm, so folgt, dass es zu jedem $\epsilon > 0$ eine Hilbertnorm $\|\cdot\|$ auf E mit $\|N\| \leq \epsilon$ gibt.
Da $D = diag[\mu_1, ..., \mu_m]$ ist $e^{tD} = diag[e^{t\mu_1}, ..., e^{t\mu_m}]$. Wir müssen nun die Operatornorm, die durch die Hilbertnorm definiert wird, näher betrachten:

$$\|D\| = sup\{\|Dx\| | x \in E, \|x\| \leq 1\}$$

Für jedes $x \in E$ mit $\|x\| \leq 1$ existieren $\alpha_1, ..., \alpha_m \in \mathbb{R}$, so dass $x = \alpha_1 a_1 + ... + \alpha_m a_m$.

Daraus haben wir:

$$\begin{aligned}
\|Dx\|^2 &= \|D(\alpha_1 a_1 + ... + \alpha_m a_m)\|^2 \\
&= \|\mu_1\alpha_1 a_1 + ... + \mu_m\alpha_m a_m\|^2 \\
&= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \mu_i\mu_j\alpha_i\alpha_j\langle a_i, a_j\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{m} \mu_j\alpha_j\delta^{2j} \\
&\leq \max_{j\in\{1,..m\}} \mu_j^2 \sum_{j=1}^{m} \alpha_j^2\delta^{2j} \\
&= \max_{j\in\{1,..m\}} |\mu_j^2|\langle x, x\rangle \\
&= \max_{j\in\{1,..m\}} |\mu_j^2|
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|e^{tD}\| = \max_{j\in\{1,..m\}} |e^{t\mu_j}| \overset{|e^{it\Re(\mu_j)}=1|}{=} \max_{j\in\{1,..m\}} |e^{t\Re(\mu_j)}|$$

Wähle ϵ mit $0 < \epsilon \leq \alpha - \Re(\sigma(A))$ und $\delta \in (0, \epsilon)$, dann folgt für alle $t > 0$:

$$\|e^{tA}\| = \|e^{t(D+N)}\| = \|e^{tD+tN}\| = \|e^{tD}e^{tN}\| \leq \|e^{tD}\|\|e^{tN}\| \leq e^{t(\alpha-\epsilon)}e^{t\epsilon} = e^{\alpha t}$$

Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ übertragen wir das Problem auf $\mathbb{C}$, d.h wir führen die Komplexifizierung von A auf $A_\mathbb{C}$ durch. Da der Realteil eines komplexen Skalarproduktes ein reelles Skalarprodukt ist, induziert eine Hilbertnorm $\|\cdot\|_{E_\mathbb{C}}$, die auf der Komplexifizierung $E_\mathbb{C}$ eines reellen Vektorraumes E difiniert ist, auf dem reellen Untervektorraum E eine Hilbertnorm $\|\cdot\|_E$. Außerdem ist $\|Ax\|_E = \|A_\mathbb{C}x\|_{E_\mathbb{C}}$, also erhalten wir die Behauptung im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ durch Anwendung der obigen Resultate auf die Komplexifizierung. □

Korollar 3.3:

(a) *Gilt $\Re(\sigma(A)) < \alpha$, so existiert eine Kontanste $\beta \geq 0$ mit*

$$\|e^{tA}\|_E \leq \beta e^{\alpha t} \quad \forall t \geq 0$$

(b) *Gilt $\Re(\sigma(A)) > \alpha$, so existiert eine Konstante $\gamma > 0$ mit*

$$\|e^{tA}x\|_E \geq \gamma e^{\alpha t}\|x\|_E \quad \forall x \in E \textit{ und } t \geq 0.$$

Beweis: (a) Da alle Normen auf endlichdimensionalen Räumen äquivalent sind, existiert ein $\beta > 0$, so dass:

$$\|e^{tA}\|_E \leq \beta\|e^{tA}\| \overset{\textit{Lemma } 3.2}{\leq} \beta e^{\alpha t} \quad \forall t \geq 0$$

(b) Es gilt $\Re(\sigma(A)) > \alpha \Leftrightarrow -\Re(\sigma(A)) < -\alpha \Leftrightarrow \Re(\sigma(-A)) < -\alpha$. Dann folgt aus Lemma (3.2) für $t \geq 0$, dass $\|e^{-tA}\| = \|e^{t(-A)}\| \leq e^{-\alpha t}$. Wir haben dann für $x \in E$ und $t \geq 0$:

$$\|x\| = \|e^{-tA+tA}x\| = \|e^{-tA}e^{tA}x\| \leq \|e^{-tA}\|\|e^{tA}x\| \leq e^{-\alpha t}\|e^{tA}x\|$$

$$\Leftrightarrow \|e^{tA}x\| \geq e^{\alpha t}\|x\|$$

Daraus folgt die Behauptung wegen der Äquivalenz der Normen. □

4 Das exponentielle Abklingen bzw. Anwachsen der Flusslinien

Nach den Vorbereitungen in dem vorherigen Abschnitt erhalten wir das folgende Theorem über das exponentielle Abklingen bzw. Anwachsen der Flusslinien im Falle einer Senke bzw. Quelle:

Theorem 4.1: *Es sei $A \in \mathcal{L}(E)$. Dann sind äquivalent:*

(i) *Der Nullpunkt ist eine Senke.*

(ii) *Es existieren Konstanten $\alpha > 0$ und $\beta \geq 0$ mit $\|e^{tA}x\|_E \leq \beta e^{-\alpha t}\|x\|_E$ für alle $t \geq 0$ und $x \in E$.*

(iii) *Es existieren eine Hilbertnorm $\|\cdot\|$ auf E und $\alpha > 0$ mit $\|e^{tA}\| \leq e^{-\alpha t}$für $t \geq 0$.*

Ebenso sind äquivalent:

(i') *Der Nullpunkt ist eine Quelle.*

(ii') *Es existieren Konstanten $\alpha > 0$ und $\beta \geq 0$ mit $\|e^{tA}x\|_E \geq \beta e^{\alpha t}\|x\|_E$ für alle $t \geq 0$ und $x \in E$.*

(iii') *Es existieren eine Hilbertnorm $\|\cdot\|$ auf E und $\alpha > 0$ mit $\|e^{tA}\| \geq e^{\alpha t}$für $t \geq 0$.*

Beweis: **(i)$\Rightarrow$(ii)**:Der Nullpunkt ist eine Senke

$$
\begin{aligned}
&\overset{(2.1)}{\Leftrightarrow} \forall x \in E\backslash\{0\} : lim_{t\to\infty} e^{tA}x = 0 \\
&\overset{(1.1)}{\Leftrightarrow} \Re(\sigma(A)) < 0 \\
&\Leftrightarrow \exists\, \alpha > 0 : \Re(\sigma(A)) < -\alpha \\
&\Rightarrow \exists\, \beta \geq 0 : \|e^{tA}\|_E \leq \beta e^{-\alpha t} \quad f\ddot{u}r\ t \geq 0, x \in E \\
&\Leftrightarrow \exists\, \beta \geq 0 : \|e^{tA}x\|_E \leq \|e^{tA}\|_E \|x\|_E \leq \beta e^{-\alpha t}\|x\|_E \quad f\ddot{u}r\ t \geq 0, x \in E
\end{aligned}
$$

(ii)$\Rightarrow$(iii): Wegen der Äquivalenz aller Normen existiert eine Hilbertnorm $\|\cdot\|$ auf E mit $\|e^{tA}\| \leq \frac{1}{\beta}\|e^{tA}\|_E \overset{(ii)}{\leq} e^{-\alpha t}$ für $t \geq 0$.

(iii)$\Rightarrow$(i): $\|e^{tA}x\| \leq \|e^{tA}\|\|x\| \overset{(iii)}{\leq} e^{-\alpha t}\|x\| \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$
$\Rightarrow e^{tA}x \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$ für $t \geq 0, x \in E$
$\overset{(2.1)}{\Rightarrow}$ Der Nullpunkt ist eine Senke.
Analog läuft der Beweis für **(i'),(ii')** und **(iii')**. Im Schritt von **(iii')** $\Rightarrow$ **(i')** verwendet man für $x \in E\backslash\{0\} : \|e^{tA}x\| \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} \infty \ \Rightarrow \Re(\sigma(A)) > 0$. $\square$

5 Hyperbolische lineare Flüsse

Im Folgenden wird *m(*λ*)* als *die algebraische Vielfachheit des Eigenwerts* λ *von* $A \in \mathcal{L}(E)$ bezeichnet.
Zunächst zerlegen wir das Spectrum $\sigma(A)$ disjunkt in 3 Mengen:

$$\sigma(A) = \sigma_s(A) \cup \sigma_n(A) \cup \sigma_u(A)$$

- Das stabile Spectrum

$$\sigma_s(A) := \{\lambda \in \sigma(A) | \Re(\lambda) < 0\}$$

- Das neutrale Spectrum

$$\sigma_n(A) := \{\lambda \in \sigma(A) | \Re(\lambda) = 0\}$$

- Das instabile Spectrum

$$\sigma_u(A) := \{\lambda \in \sigma(A) | \Re(\lambda) > 0)\}$$

Definition 5.1. *Der von* A *erzeugte Fluss* e^{tA} *heißt* ***hyperbolisch****, wenn* $\sigma_n(A) = \emptyset$*, also wenn*

$$\sigma(A) = \sigma_s(A) \cup \sigma_u(A)$$

gilt.

Das folgende Theorem liefert die mehrdimensionale Verallgemeinrung des zweidimensionalen Sattels.

Theorem 5.2. *Sei* e^{tA} *ein hyperbolischer linearer Fluss. Dann gibt es eine direkte Summenzerlegung*

$$E = E_s \oplus E_u,$$

welche A *und damit den linearen Fluss* e^{tA} *wie folgt zerlegt*

$$A = A_s \oplus A_u \text{ und } e^{tA} = e^{tA_s} \oplus e^{tA_u}.$$

derart, dass e^{tA_s} *eine Kontraktion und* e^{tA_s} *eine Expansion. Diese Zerlegung ist eindeutig und es gilt*

$$dim(E_s) = \sum_{\lambda \in \sigma_s(A)} m(\lambda) \quad bzw. \quad dim(E_u) = \sum_{\lambda \in \sigma_u(A)} m(\lambda)$$

Beweis: Wir betrachten zuerst den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Setzen wir

$$E_s = \bigoplus_{\lambda \in \sigma_s(A)} E_\lambda \quad E_u = \bigoplus_{\lambda \in \sigma_u(A)} E_\lambda \quad mit \;\; E_\lambda = \{x \in E | (A - \lambda)^{m(\lambda)} x = 0\},$$

dann ist $E = E_s \oplus E_u$. Diese Zerlegung zerlegt $A = A_s \oplus A_u$. Offensichtlich gilt

$$\sigma(A_s) = \sigma_s(A) \quad und \quad \sigma(A_u) = \sigma_u(A).$$

Aus dem Satz (1.1) ergibt sich, dass e^{tA_s} eine Kontraktion und e^{tA_u} eine Expansion ist. Die Formel für die Dimension von E_s und E_u folgt direkt aus der obigen Wahl von E_s und E_u.

Nun müssen wir noch die Eindeutigkeit dieser Zerlegung zeigen. Sei $E = E_1 \oplus E_2$ eine andere Zerlegung von E, welche A reduziert, $A = A_1 \oplus A_2$, derart, dass e^{tA_1} eine Kontraktion und e^{tA_2} eine Expansion sind. Wir wollen zeigen, dass $E_1 = E_s$ und $E_2 = E_u$ ist.

Sei $x \in E_1$ beliebig, dann gilt $x = y + z$ mit $y \in E_s$ und $z \in E_u$. Wir haben also

$$e^{tA}x = e^{tA_1}x \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Sei $P_u : E \to E_u$ die zur Zerlegung $E = E_s \oplus E_u$ gehörige kanonische Projektion, dann folgt

$$e^{tA}z = e^{tA}P_u x = P_u e^{tA}x \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Da A_u eine Expansion ist und somit der Nullpunkt eine Quelle, existieren nach Theorem (4.1) Konstanten $\alpha > 0$ und $\beta > 0$ mit

$$\beta e^{\alpha t}\|z\| \le \|e^{tA_u}z\| = \|e^{tA}z\| \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Daraus folgt $\|z\| = 0$, also $z = 0$, d.h $E_1 \subset E_s$. Aus Symmetriegründen folgt $E_s \subset E_1$, also $E_1 = E_s$.

Für $x \in E_2$ gilt

$$e^{tA}x = e^{tA_2}x \overset{t\to-\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Zerlegen wir $x = y + z$ mit $y \in E_s$ und $z \in E_u$ wie oben, dann erhalten wir analog zum obigen Fall

$$e^{tA}z = e^{tA}P_s x = P_s e^{tA}x \overset{t\to-\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Wegen $e^{tA} = e^{|t|(-A_s)}$ und $\sigma(-A_s) = -\sigma(A_s)$ folgt aus Theorem (4.1) für $t < 0$ und geeignete Konstanten $\alpha, \beta > 0$

$$\beta e^{\alpha|t|}\|y\| \le \|e^{|t|(-A_s)}y\| = \|e^{tA}y\| \overset{t\to-\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Deswegen ist $y = 0$ und somit gilt $E_2 \subset E_u$. Aus Symmetriegründen folgt $E_u \subset E_2$, also $E_2 = E_u$. Damit haben wir die Eindeutigkeit der Zerlegung gezeigt.

Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ wird die Behauptung mit Hilfe der Komplexifizierung von A bzw. E gezeigt werden, also $E_{\mathbb{C}} = E + iE$ und $A \in \mathcal{L}(E_{\mathbb{C}})$. Wir zerlegen $E_{\mathbb{C}}$ und $A_{\mathbb{C}}$ wie oben und setzen

$$E_s := (E_{\mathbb{C}})_s \cap E \quad und \quad E_u := (E_{\mathbb{C}})_u \cap E.$$

Nun müssen wir zeigen, dass

$$(E_{\mathbb{C}})_s = (E_s)_{\mathbb{C}} \quad und \quad (E_{\mathbb{C}})_u = (E_u)_{\mathbb{C}}.$$

Im Fall $\sigma(A) = \{\lambda, \bar{\lambda}\}$ mit $\Im \neq 0$ betrachten wir die Summe der Haupträume

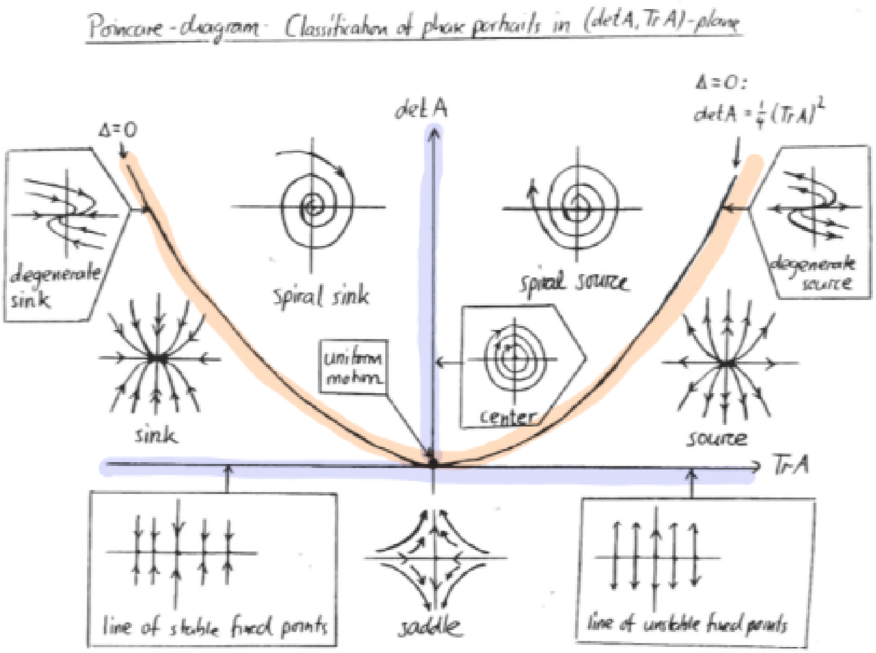
$$H := Hau(A_{\mathbb{C}}, \lambda_j) \oplus Hau(A_{\mathbb{C}}, \bar{\lambda}_j).$$

Für $x \in H \cap E$ gilt $e^{tA}x = e^{tA_{\mathbb{C}}}x$. Ist $z = a + ib \in H$, so folgt, dass auch $\bar{z} = a - ib \in H$ ist. Also sind $a = (z + \bar{z})/2$ und $b = (z - \bar{z})/(2i)$ Elemente von $H \cap E$. Falls $e^{tA_{\mathbb{C}}}$ eine Kontraktion (bzw. eine Expansion) auf H ist, ist e^{tA} ebenso eine Kontraktion (bzw. Expansion) auf $H \cap E$ wegen $e^{tA}a = e^{tA_{\mathbb{C}}}a = e^{tA_{\mathbb{C}}}((z + \bar{z})/2)$ und $e^{tA}b = e^{tA_{\mathbb{C}}}b = e^{tA_{\mathbb{C}}}((z - \bar{z})/(2i))$.
Im Fall $\sigma(A) = \{\lambda\} \subset \mathbb{R}$ betrachten wir den Hauptraum $\tilde{H} := Hau(A_{\mathbb{C}}, \lambda_j)$ und es verläuft analog. Da sich der allgemeine Fall aus derartigen Unterfällen zusammensetzt, ergibt sich $(E_s)_{\mathbb{C}} = (E_{\mathbb{C}})_s$ und analog auch $(E_u)_{\mathbb{C}} = (E_{\mathbb{C}})_u$. Aus Gültigkeit des Theorems im komplexen Fall erhalten wir nun die Behauptung im reellen Fall. $\square$

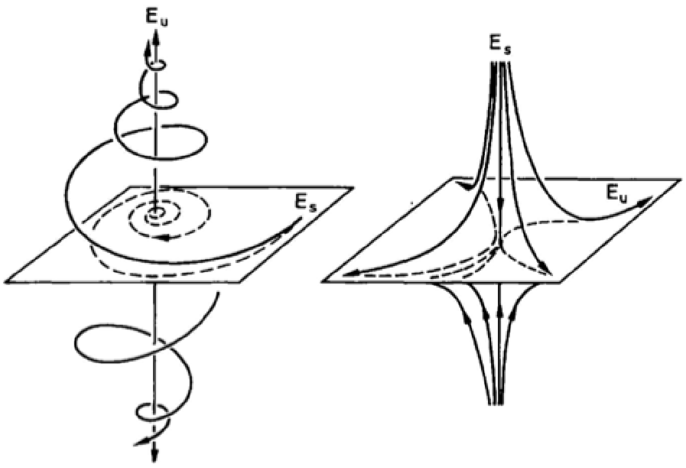
Definition 5.3. *Die invarianten Untervektorräume E_s bzw. E_u des hyperbolischen linearen Flusses e^{tA} heißen **stabile** bzw. **instabile Vektorräume** des Flusses.*

Ein hyperbolischer linearer Fluss kann eine Kontraktion ($E_u = \{0\}$) oder eine Expansion ($E_s = \{0\}$) sein.

Beispiel:
1. Im Falle $E = \mathbb{R}^2$ können die hyperbolischen linearen Flüsse wie die Phasenporträts auf dem folgenden Diagramm aussehen, außer den auf der blauen Linien, wo $det(A) = 0$ ist und für $det(A) \neq 0$ ist $spur(A) = 0$. Denn bei den hyperbolischen linearen Flusslinien ist das neutrale Spektrum leer, also hat A keine Eigenwerte mit Realteil gleich Null. Das ist der Grund dafür, dass sie innerhalb jedes der durch die blauen Linien getrennten Bereichen durch kleine Störungen keine dramatische Veränderungen aufweisen.



2. Im Falle $E = \mathbb{R}^3$ ist und weder der stabile noch der instabile Untervektorraum trivial sind, können die hyperbolischen linearen Flüsse wie in der folgenden Abbildung aussehen.



6 Literaturverzeichnis

[1] AMANN, Herbert: *Gewöhliche Differentialgleichung*. 2. Auflage. Berlin: de Gruyter, 1995.

[2] SCHMIDT, Martin: *Dynamische System*. Universität Mannheim, 2011.

7 Abbildungsverzeichnis

[1] AMANN, Herbert: *Gewöhliche Differentialgleichung*. 2. Auflage. Berlin: de Gruyter, 1995.

[2] http://people.whitman.edu/ hundledr/courses/M244S08/Poincare.jpg