Ljapunovfunktionen I

Hannah Vogel

18. November 2014

Universität Mannheim
Fakutltät für Wirtschaftsinformatik und Wirtschaftsmathematik
Lehrstuhl für Mathematik III
Prof. Dr. M. Schmidt

1 grundlegende Definitionen

Im Folgenden sei X ein normierter Vektorraum und $M \subset X$.

1.1 Anfangswertproblem

Es sei $J \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $E = (E, |\cdot|)$ ein endlichdimensionaler Banachraum über $\mathbb{K}$, $D \subset E$ offen und $f \in C^{0,1-}(J \times D, E)$.
Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = f(t,x),\ x_0 = x_0$$
$$\Leftrightarrow \dot{x}(t) = f(x(t)),\ x(t_0) = x_0$$

Es existiert für jedes $(t_0, x_0) \in J \times D$ genau eine nichtfortsetzbare Lösung $u : J(x) \to D$. Dabei ist $J(x) := (t^-(x), t^+(x))$ das maximale Intervall, auf dem diese Lösung u existiert.
$t^-(x)$ bzw. $t^+(x)$ heißen negative bzw. positive Fluchtzeit von x.
([1] Seite 106, 110, 111)

1.2 Lipschitzstetigkeit

Es seien X und Y metrische Räume und T sei ein topologischer Raum. Dann heißt $f : T \times X \to Y$ gleichmäßig Lipschitz stetig bzgl. $x \in X$, wenn eine Konstante $\lambda \in \mathbb{R}_+$ existiert mit

$$d_1(f(t,x), f(t,\overline{x}) \leq \lambda d_2(x, \overline{x})\ \forall x, \overline{x} \in X,\ \forall t \in T.$$

d_1 bzw. d_2 ist dabei die Metrik auf auf Y bzw. X. Jedes $\lambda \in \mathbb{R}_+$ heißt Lipschitzkonstante für f.
Wir definieren $C^{0,1-}(T \times X, Y) := \{f : T \times X \to Y | f \in C(T \times X, Y)$ und f ist Lipschitzstetig bzgl. $x \in X\}$.
([1] Seite 101)

1.3 Fluss

Sei $\Omega := \bigcup_{x \in X} J(x) \times \{x\}$ und $\varphi : \Omega \to X$ eine Abbildung mit folgenden Eigenschaften

(i) Ω ist offen in $\mathbb{R} \times X$

(ii) $\varphi : \Omega \to X$ ist stetig

(iii) $\varphi(0, \cdot) = id_X \Leftrightarrow \varphi(0, x) = x$
Interpretation: Solange keine Zeit vergeht ($t = 0$), verändert sich der Zustand x nicht.

(iv) für $x \in X, s \in J(x)$ und $t \in J(\varphi(s,x))$ gilt $s + t \in J(x)$ und $\varphi(t, \varphi(s,x)) = \varphi(s + t, x)$

Dann heißt φ Fluss auf X.
Gilt $\Omega = \mathbb{R} \times X$, d.h. $t^-(x) = -\infty$ und $t^+(x) = \infty$ für alle $x \in X$, so heißt φ globaler Fluss.
([1] Seite 137)

1.4 Notation

Ist φ ein gegebener Fluss auf X und sind keine Unklarheiten zu erwarten, so setzt man oft:
$t \cdot x := \varphi(t,x)\ \forall (t,x) \in \Omega$ und für
$B \times A \subset \Omega : B \cdot A := \{t \cdot x | t \in B, x \in A\}$ mit
$B \cdot x := B \cdot \{x\}$ und $t \cdot A := \{t\} \cdot A$.
([1] Seite 137)

1.5 Orbit / Trajektorie

Für jedes $x \in X$ ist

$\gamma^+(x) := [0, t^+(x)) \cdot x = \{t \cdot x | 0 \leq t < t^+(x)\}$ bzw.
$\gamma^-(x) := (t^-(x), 0] \cdot x = \{t \cdot x | t^-(x) < t \leq 0\}$ bzw.
$\gamma(x) := (t^-(x), t^+(x)) \cdot x = \gamma^+(x) \cup \gamma^-(x)$

der positive bzw. der negative Halborbit bzw. der Orbit (oder die Trajektorie) durch x.
([1] Seite 140)

2 Ljapunovfunktion

2.1 Definition

Eine Ljapunovfunktion auf M für das autonome System $\dot{x}(t) = f(x(t))$ ist eine Funktion $V \in C^1(M)$ mit

$$\dot{V}(x) \leq 0\ \forall x \in M$$

Dabei ist $\dot{V}(x)$ die orbitale Ableitung von V mit
$\dot{V}(x) = lim_{h \to\ 0, h>0} \dfrac{V(h \cdot x) - V(x)}{h}$

Bemerkung 1. .
In [1] wird die orbitale Ableitung abweichend wie folgt definiert:
$$\dot{V}(x) = \begin{cases} lim_{h \to\ 0, h>0} \dfrac{V(h \cdot x) - V(x)}{h}, & \text{falls } x \text{ ein Häufungspunkt von } M \cap [0, \epsilon) \cdot x \text{ ist} \\ -\infty, & \text{sonst} \end{cases}$$
Ein Häufungspunkt ist dabei ein Grenzwert einer konvergenten Teilfolge.
Auf unserem normierten Vektorraum X gilt für jedes $x \in X$ und für eine beliebige Nullfolge t_n:
$x = \varphi(0,x) = \varphi(lim_{n\to\infty} t_n, x) \overset{\varphi\ stetig}{=} lim_{n\to\infty} \varphi(t_n, x)$ Also ist jeder Punkt x ein Häufungspunkt von X und beide Definitionen stimmen überein.

2.2 orbitale Ableitung

Sei V eine Ljapunovfunktion für φ auf $M \subset X$. Für die orbitale Ableitung $\dot{V}(x)$, d.h. die Ableitung entlang der Trajektorien, der Ljapunovfunktion V gilt:

(1) $\dot{V}(x) \overset{!}{=} \dfrac{d}{dt} V(x(t))$ (rechtsseitige Ableitung)
Insbesondere gilt, dass $V(\varphi(t,x)) \leq V(\varphi(s,x))\ \forall \varphi(t,x),\ \varphi(s,x) \in M, s \leq t \in J(x)$.

(18.1a) $\dot{V}(x) \stackrel{!}{=} \langle \nabla V(x), f(x) \rangle = V_{x_1}(x) \cdot f_1(x) + \dots + V_{x_n} \cdot f_n(x)$, wobei $\langle .,. \rangle$ das Skalarprodukt in R^d, $d \in \mathbb{N}$, bezeichnet.
Damit kann die orbitale Ableitung $\dot{V}(x)$ ohne Kenntnis des Flusses allein aus dem Vektorfeld $f(x)$ berechnet werden.

(18.1b) Seien V und φ differenzierbare Funktionen. Für $0 \leq t < T < t^+(x)$ gilt:
$V(t \cdot x) = V(x) + \int_0^t \dot{V}(\tau \cdot x) d\tau$.
Sind V und φ nicht differenzierbar, so kann man zeigen:
$V(t \cdot x) \leq V(x) + \int_0^t \dot{V}(\tau \cdot x) d\tau$.

(18.1c) Existiert ein $\alpha > 0$ mit $\dot{V}(x) \leq -\alpha V(x)\ \forall x \in M$, dann gilt für jedes $x \in M$ und $T \in [0, t^+(x))$ mit $[0,T] \cdot x \subset M$: $V(t \cdot x) \leq e^{-\alpha t} V(x)\ \forall t \in [0,T)$.

Beweis. .
Zu (1):

Erinnerung (Differenzenquotient): $\dfrac{df(x)}{dx} = lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$\dot{V}(x) := lim_{h \to 0, h>0} \dfrac{V(h \cdot x) - V(x)}{h} = lim_{h \to 0, h>0} \dfrac{V(\varphi(0+h, x)) - V(\varphi(0,x))}{h} = \dfrac{dV(\varphi(0,x))}{dt}$
$= \dfrac{dV(x)}{dt}$

Zu (18.1a):
$\dfrac{d}{dt} V(x(t)) = \dot{x}(t) \cdot \nabla V(x(t)) = f(x(t)) \cdot \nabla V(x(t)) = \langle f(x), \nabla\ V(x) \rangle = \langle \nabla V(x), f(x) \rangle$
(18.1b) Für differenzierbare Funktionen V und φ gilt nach dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung: $\int_0^t \dot{V}(\tau \cdot x) d\tau = V(\varphi(t,x)) - V(\varphi(0,x)) = V(\varphi(t,x)) - V(x)$
$\Leftrightarrow V(t \cdot x) = V(x) + \int_0^t \dot{V}(\tau \cdot x) d\tau$

Zu (18.1c):
Behauptung: Existiert ein $\alpha > 0$ mit $\dot{V}(x) \leq -\alpha V(x)\ \forall x \in M$, dann gilt für jedes $x \in M$ und $T \in [0, t^+(x))$ mit $[0,T] \cdot x \subset M$: $V(t \cdot x) \leq e^{-\alpha t} V(x)\ \forall t \in [0,T)$.

Erinnerung (18.1b): Für $0 \leq t < T < t^+(x)$ gilt: $V(t \cdot x) \leq V(x) + \int_0^t \dot{V}(\tau \cdot x) d\tau$

Also folgt: $V(t \cdot x) \leq V(x) - \alpha \int_0^t V(\tau \cdot x) d\tau$
$\Leftrightarrow -V(x) \leq -V(t \cdot x) - \alpha \int_0^t V(\tau \cdot x) d\tau$
$\Leftrightarrow V(x) \geq V(t \cdot x) + \alpha \int_0^t V(\tau \cdot x) d\tau \geq V(t \cdot x + \alpha t V(t \cdot x)$
$\Leftrightarrow V(x) \geq (1 + \alpha t) V(t \cdot x)$

Da dies für alle $t \in [0,T)$ gilt, erhalten wir für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$:
$V(x) \geq (1 + \alpha \frac{t}{n}) V(\frac{t}{n} \cdot x) \geq (1 + \alpha \frac{t}{n})(1 + \alpha \frac{t}{n}) V(\frac{t}{n} \cdot (\frac{t}{n} \cdot x)) = (1 + \alpha \frac{t}{n})^2 V(\varphi(\frac{t}{n}, \varphi(\frac{t}{n}, x)))$
$= (1 + \alpha \frac{t}{n})^2 V(\varphi(\frac{t}{n} + \frac{t}{n}, x)) = (1 + \alpha \frac{t}{n})^2 V(\varphi(\frac{2t}{n}, x)) \geq \dots \geq (1 + \frac{\alpha t}{n})^n V(\varphi(\frac{nt}{n}, x))$
$= (1 + \frac{\alpha t}{n})^n V(\varphi(t, x))$

Für $n \to \infty$ folgt damit $V(x) \geq e^{\alpha t} V(t \cdot x) \Leftrightarrow V(t \cdot x) \leq e^{-\alpha t} V(x)$, also die Behauptung.

$\square$

3 positiv invariante Teilmenge

3.1 Definition

Es gilt:

(i) Eine Teilmenge $M \subset X$ eines normierten Vektorraumes X ist positiv (bzw. negativ) invariant

(ii) $\Leftrightarrow \gamma^+(M) \subset M$ (bzw. $\gamma^-(M) \subset M$)

(iii) $\Leftrightarrow \forall m \in M$ gilt $\gamma^+(m) = \{\varphi(t,m) | 0 \leq t < t^+(m)\} \subset M$
(bzw. $\forall m \in M$ gilt $\gamma^-(m) = \{\varphi(t,m) | t^-(x) < t \leq 0\} \subset M$)

M ist invariant, wenn M positiv und negativ invariant ist.
([1] Seite 235)

3.2 Lemma 16.3d

Beliebige Schnitte positiv invarianter Mengen sind positiv invariant

Beweis. siehe Anhang □

3.3 Lemma 16.3f

Für eine abgeschlossene Menge $M \subset X$ gilt:
M ist positiv invariant $\Leftrightarrow \forall x \in \partial M\ \exists \epsilon > 0$ mit $[0, \epsilon) \cdot x \subset M$
Interpretation: Eine Menge M ist positiv invariant, wenn in jedem Randpunkt die Trajektorie nach innen läuft.

Beweis. .
$'' \Rightarrow ''$
Sei $x \in \partial M \Rightarrow \varphi(t,x) \in M\ \forall t \in [0, t^+(x)) \Rightarrow \forall \epsilon < t^+(x)$: $\varphi(t,x) \in M\ \forall t \in [0, \epsilon) \subset [0, t^+(x))$

$'' \Leftarrow ''$
Wir zeigen: "M nicht positiv invariant" $\Rightarrow$ "Bedingung nicht erfüllt".
Sei M nicht positiv invariant.
$\Rightarrow \exists x \in M$ und $\exists t \in (0, t^+(x))$ mit $t \cdot x \notin M$
Da φ stetig und $\forall x \in M\ \varphi(0,x) = x \in M$ gibt es ein $s \in [0,t)$ mit $s \cdot x \in M$. Sei $s = max\{r \in [0,t) | r \cdot x \in M\}$ (M abgeschlossen). Nun existiert ein $\tau \in (s,t]$ mit $\tau \cdot x \notin M$. Dann ist $y := s \cdot x \in \partial M$ und die angegebene Bedingung ist für y nicht erfüllt.

□

Der folgende Satz zeigt, dass Ljapunovfunktionen zur Bestimmung positiv invarianter Mengen verwendet werden können.

3.4 Satz 18.2

Es seien $-\infty \leq \gamma < \beta < \infty$, und $V \in C(X)$ sei eine Ljapunovfunktion auf

$$\{x \in X | \gamma < V(x) < \beta\}.$$

Dann ist

$$M_\alpha := \{x \in X | V(x) \leq \alpha\}$$

für jedes $\alpha \in [\gamma, \beta)$ positiv invariant.

Beweis. .
Sei zunächst $\gamma < \alpha < \beta$. Sei $x \in \partial M_\alpha = \{x \in X | V(x) = \alpha\} \subset V^{-1}(\alpha)$ beliebig. Da $\gamma < \alpha < \beta$ ist (γ, β) eine Umgebung von α. Da V stetig ist $U := V^{-1}((\gamma, \beta))$ eine Umgebung von $V^{-1}(\alpha) = x$. Da U eine Umgebung von x ist und φ stetig, $\exists \epsilon > 0$ mit:
$[0, \epsilon) \cdot x = [0, \epsilon) \cdot \{x\} = \{\varphi(t, x) | t \in [0, \epsilon), x \in \{x\}\} \subset U$ (Es gilt $\varphi(0, x) = x$).

> Erinnerung (orbitale Ableitung): V Ljapunovfunktion auf $M \subset X \Rightarrow V(\varphi(t, x)) \leq V(\varphi(s, x))$ $\forall \varphi(t, x)$, $\varphi(s, x) \in M, s \leq t \in J(x)$.

Hier ist V Ljapunovfunktion auf $\{x \in X | \gamma < V(x) < \beta\}$. $x = \varphi(0, x) \in \partial M_\alpha = \{x \in X | V(x) = \alpha\} \subset \{x \in X | \gamma < V(x) < \beta\}$. Da $[0, \epsilon) \cdot x \subset U$ Umgebung von $V^{-1}(\alpha)$ und $\varphi(t, x)$ stetig, liegt $\varphi(t, x) \in \{x \in X | \gamma < V(x) < \beta\}$ für $t \in [0, \epsilon)$.
$\Rightarrow$ für $t \in [0, \epsilon)$: $V(\varphi(t, x)) \leq V(\varphi(0, x)) = V(x) = \alpha$.
$\Rightarrow [0, \epsilon) \cdot x = \{\varphi(t, x) | t \in [0, \epsilon), x \in \{x\}\} \subset \{x \in X | V(x) \leq \alpha\} = M_\alpha$

> Erinnerung (16.3):
> Eine abgeschlossene Menge $M \subset X$ ist positiv invariant $\Leftrightarrow \forall x \in \partial M \exists \epsilon > 0$ mit $[0, \epsilon) \cdot x \subset M$

Damit ist M_α positiv invariant.

Zum Randpunkt γ:
Für $\gamma < \alpha_1 < \alpha_2 < \beta$ gilt $M_{\alpha_1} := \{x \in X | V(x) \leq \alpha_1 < \alpha_2\} \subset \{x \in X | V(x) \leq \alpha_2\} =: M_{\alpha_2}$
$\Rightarrow M_{\alpha_1} \cap M_{\alpha_2} = M_{\alpha_1}$
$\Rightarrow \bigcap_{\gamma < \alpha < \beta} \{x \in X | V(x) \leq \alpha\} = \{x \in X | V(x) \leq \gamma\} = M_\gamma$.

> Erinnerung (16.3d):
> Beliebige Schnitte positiv invarianter Mengen sind positiv invariant.

Da $\{x \in X | V(x) \leq \alpha\} =: M_\alpha$ positiv invariant ist $\forall \alpha \in (\gamma, \beta)$ ist auch M_γ positiv invariant. $\square$

4 positive Limesmenge

4.1 Definition

Definition 4.1. Die positive Limesmenge $w(x)$ ist definiert als $w(x) := \bigcap_{t > 0} \overline{\gamma^+(t \cdot x)}$

Erinnerung (Definition positiver Halborbit): $\gamma^+(x) := \{\varphi(t,x) | 0 \leq t < t^+(x)\}$.

$\Rightarrow w(x) := \bigcap_{t>0} \overline{\gamma^+(\varphi(t,x))} = \bigcap_{t>0} \overline{\{\varphi(t', \varphi(t,x)) | 0 \leq t' < t^+(\varphi(t,x))\}}$

$\overset{\gamma^+(\varphi(t,x))=t^+(x)-t}{=} \bigcap_{t>0} \overline{\{\varphi(t'+t,x) | t \leq t'+t < t^+(x)\}}$

([1] Seite 248)

4.2 vorbereitende Lemmata

(17.1b) $t^+(x) < \infty \Rightarrow w(x) = \varnothing$

(17.1c) $\forall x \in X$ mit $t^+(x) = \infty$ gilt: $w(x) = \{y \in X | \exists t_k \to \infty \text{ mit } t_k \cdot x \to y\}$

(17.1d) Für jedes $x \in M$ mit $t^+(x) = \infty$ ist $\overline{\gamma^+(x)} = \gamma^+(x) \cup w(x)$.

(17.1e) Für jedes $x \in X$ sind $\overline{\gamma^+(x)}$ und $w(x)$ abgeschlossen und positiv invariant.

Beweis. siehe Anhang □

Bemerkung 2. Lemma 17.1b ist aufgrund von Aussagenlogik äquivalent zu $w(x) \neq \varnothing \Rightarrow t^+(x) = \infty$ (Kontraposition).
Die Rückrichtung $w(x) = \varnothing \Rightarrow t^+(x) < \infty$ gilt dagegen nicht. Denn angenommen $\varphi(t,x) := e^t x$, also $t^+(x) = \infty$. Dann wird jedes $x \in M$ auf ein neues x' abgebildet, sodass der Fluss nicht wieder zu x zurück läuft. Daher fehlen in den $\overline{\gamma^+(t \cdot x)}$ immer mehr Elemente, je größer t wird und $w(x) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\gamma^+(t \cdot x)} = \varnothing$.

Das folgende LaSallsche Invarianzprinzip zeigt, dass Ljapunovfunktionenn zur Lokalisierung positiver Limesmengen verwendet werden können.

4.3 Satz 18.3 Das LaSallsche Invarianzprinzip

Es sei X ein normierter Vektorraum, $M \subset X$ abgeschlossen und $V \in C(M)$ sei eine Ljapunovfunktion auf $M \subset X$ mit $V(x) \geq 0 \ \forall x \in M$. Ist dann $\gamma^+(x) \subset M$, so existiert ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $w(x) \subset V^{-1}(\alpha)$. Insbesondere gilt:
$w(x) \subset \{y \in M | \dot{V}(y) = 0\}$.

Beweis. .
OBdA sei $w(x) \neq \varnothing$ ist (sonst ist die Behauptung trivial).

Erinnerung (17.1b): $t^+(x) < \infty \Rightarrow w(x) = \varnothing \overset{Aussagenlogik}{\iff} w(x) \neq \varnothing \Rightarrow t^+(x) = \infty$

Also gilt: $t^+(x) = \infty$.

Erinnerung (17.1d):
Für jedes $x \in A$ mit $t^+(x) = \infty$ ist $\overline{\gamma^+(x)} = \gamma^+(x) \cup w(x)$

Also ist $w(x) \subset \overline{\gamma^+(x)}$. Da $\gamma^+(x) \subset M$ und M abgeschlossen ist, d.h. alle Randpunkte enthält, ist $w(x) \subset M$. Da V Ljapunovfunktion auf M ist, ist $t \to V(t \cdot x)$ monoton fallend auf $\mathbb{R}_+$. Außerdem ist $V(x)$ nach Voraussetzung durch 0 nach unten beschränkt. Folglich konvergiert $V(t \cdot x)$ für $t \to \infty$ gegen $\alpha := inf\{V(t \cdot x) | t \in \mathbb{R}_+\}$.

Erinnerung (17.1c): $\forall x \in X$ mit $t^+(x) = \infty$ gilt: $w(x) = \{y \in X | \exists t_k \to \infty \text{ mit } t_k \cdot x \to y\}$

Also existiert $\forall y \in w(x)$ eine Folge (t_k) mit $lim_{k\to\infty} t_k = \infty$ und $lim_{k\to\infty} t_k \cdot x = y$, also (aufgrund der Stetigkeit von V) $V(y) = lim_{k\to\infty} V(\varphi(t_k, x)) = inf\{V(t, x) | t \in \mathbb{R}_+\} =: \alpha$
Es gilt also $\forall y \in w(x)$ $V^{-1}(\alpha) = y$ und damit $w(x) \subset V^{-1}(\alpha)$.

Fehlt nur noch zu zeigen: $w(x) \subset \{y \in M | \dot{V}(y) = 0\}$.

Erinnerung (17.1e): Für jedes $x \in M$ sind $\overline{\gamma^+(x)}$ und $w(x)$ abgeschlossen und positiv invariant.
Erinnerung (17.1c): $\forall x \in X$ mit $t^+(x) = \infty$ gilt: $w(x) = \{y \in X | \exists t_k \to \infty \text{ mit } t_k \cdot x \to y\}$

Also ist $w(x) \subset X$ positiv invariant und es gilt $\forall y \in w(x)$ $\dot{V}(y) = \frac{d}{dt} V(y) = \frac{d}{dt} \alpha = 0$
(neben [1] auch [4])

□

5 Korollare

5.1 Definition relativ kompakt

Eine Teilmenge $A \subset Y$ eines topologischen Raums Y heißt relativ kompakt, wenn ihr Abschluss $\overline{A}$ kompakt ist.
([3])

5.2 Entfernung zwischen Punkt und Menge

Sei $x \in X \setminus M$. Dann ist die Entfernung von x und M definiert als: $dist(x, M) := inf_{m \in M} ||x - m||$.
Man sagt eine Folge x_k $(k \in \mathbb{N})$ geht gegen M, kurz $x_k \to M$, wenn $dist(x_k, M) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

5.3 Lemma, Teil von Theorem 17.2

$\gamma^+(x)$ relativ kompakt $\Rightarrow t \cdot x \to w(x)$ für $t \to \infty$

Widerspruchsbeweis. .
Sei U eine offene Umgebung von $w(x)$ und $t_k \to \infty$ sei eine Folge mit $t_k \cdot x \notin U$
Da U offen ist, ist U^c abgeschlossen und da $\gamma^+(x)$ relativ kompakt ist, ist $\overline{\gamma^+(x)}$ kompakt, insbesondere abgeschlossen. Also ist $U^c \cap \overline{\gamma^+(x)}$ als Schnitt zweier abgeschlossener Mengen abgeschlossen.

Korollar 9.25 (ii) aus Skript: Abgeschlossene Teilmengen einer kompakten Menge sind wieder kompakt.

Also ist $U^c \cap \overline{\gamma^+(x)} \subset \overline{\gamma^+(x)}$ kompakt.

Es gilt Korollar 9.24 aus Skript: Ein metrischen Raum (X, d) ist genau dann kompakt, wenn jede Folge in (X, d) eine konvergenze Teilfolge besitzt.

$\Rightarrow \exists$ Teilfolge $(t_{k'})$ und ein $y \in U^c \cap \overline{\gamma^+(x)}$ mit $t_k \cdot x \to y$

$\overset{y \in U^c \cap \overline{\gamma^+(x)} \Rightarrow y \in U^c}{\Longrightarrow} \exists$ Teilfolge $(t_{k'})$ und ein $y \in U^c$ mit $t_k \cdot x \to y$

Erinnerung (17.1c): $\forall x \in X$ mit $t^+(x) = \infty$ gilt: $w(x) = \{y \in X | \exists t_k \to \infty \text{ mit } t_k \cdot x \to y\}$

Also gilt auch $y = lim_{k \to \infty} t_k \cdot x \in w(x)$. Daher ist $w(x) \cap U^c \neq \varnothing$ was unmöglich ist, da U als Umgebung von $w(x)$ definiert war.
Damit haben wir einen Widerspruch und es gilt die Behauptung: $t \cdot x \to w(x)$ für $t \to \infty$. □

6 Korollar 18.4

Satz 6.1. (18.4)
Sei X ein normierter Vektorraum; $M \subset X$ eine abgeschlossene Teilmenge, $V \in C(M)$ eine Ljapunovfunktion M, und $\gamma^+(x)$ sei relativ kompakt mit $\gamma^+(x) \subset M$.
Ferner sei M_v die größte positiv invariante Teilmenge von $\{x \in M | \dot{V}(x) = 0\}$. Dann gilt:

$$t \cdot x \to M_v \text{ für } t \to \infty$$

Beweis. .

Erinnerung (18.3):
Es sei $M \subset X$ abgeschlossen, und $V \in C(M)$ sei eine Ljapunovfunktion auf $M \subset X$. Ist dann $\gamma^+(x) \subset M$, so existiert ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $w(x) \subset V^{-1}(\alpha)$. Insbesondere gilt: $w(x) \subset \{y \in M | \dot{V}(y) = 0\}$.

Also ist $w(x) \subset \{y \in M | \dot{V}(y) = 0\}$.

Erinnerung (17.1e): Für jedes $x \in X$ sind $\overline{\gamma^+(x)}$ und $w(x)$ abgeschlossen und positiv invariant.

Demnach ist $w(x)$ also positiv invariant, und es gilt $w(x) \subset M_v$. Daher reicht es zu zeigen $t \cdot x \to w(x)$ für $t \to \infty$. Dies folgt aus Lemma 17.2.

Erinnerung (17.2): $\gamma^+(x)$ relativ kompakt $\Rightarrow t \cdot x \to w(x)$ für $t \to \infty$

□

6.1 Definition Attraktor

Ein Punkt $x \in X$ wird von der Menge $M \subset X$ angezogen, wenn $t^+(x) = \infty$ und $t \cdot x \to M$ für $t \to \infty$. Die Menge $\mathcal{A}(M) := \{x \in X | x$ wird von M angezogen $\}$ ist der Anziehungsbereich von M und M ist attraktiv (ein Attraktor) wenn $\mathcal{A}(M)$ eine Umgebung von M ist. Im Falle $\mathcal{A}(M) = X$ ist M ein globaler Attraktor.
(Quelle: Seite 252)

6.2 Korollar 18.5

Sei X ein normierter Vektorraum, $M \subset X$ abgeschlossen und positiv invariant, $V \in C(M)$ eine Ljapunovfunktion auf M und $\gamma^+(x)$ relativ kompakt $\forall x \in M$. Dann zieht M_v jeden Punkt von M an, d.h. $M \subset \mathcal{A}(M_v)$.

Beweis. .
z.z. $\forall x \in M$ gilt: 1. $t^+(x) = \infty$ und 2. $t \cdot x \overset{t \to \infty}{\longrightarrow} M_v$
Zu 1.: alle Halborbits $\gamma^+(x)$ sind relativ kompakt, also ist $\forall x \in M$ $\overline{\gamma^+(x)}$ kompakt.

> Es gilt Korollar 9.24 aus Skript: Ein metrischen Raum (X, d) ist genau dann kompakt, wenn jede Folge in (X, d) eine konvergente Teilfolge besitzt.

Also hat eine Folge $\varphi(t_k, x)$ für jedes $x \in M$ mit $k \to \infty$ eine konvergente Teilfolge $\varphi(t_{k_i}, x)$ mit $y = lim_{k_i \to \infty} \varphi(t_{k_i}, x) \in \overline{\gamma^+(x)}$.

> Erinnerung (17.1d): Für jedes $x \in M$ mit $t^+(x) = \infty$ ist $\overline{\gamma^+(x)} = \gamma^+(x) \cup w(x)$.

Also ist $y \in w(x)$ und damit $w(x) \neq \varnothing \overset{17.1b}{\Longrightarrow} t^+(x) = \infty$.

Zu 2.: M positiv invariant

> Erinnerung (positiv invariant):
> M positiv invariant $\Longrightarrow \forall m \in M$ gilt $\gamma^+(m) = \{\varphi(t, m) | 0 \leq t < t^+(m)\} \subset M$

$\Rightarrow \forall x \in M$: $\gamma^+(x) := \{\varphi(t, x) | 0 \leq t < t^+(x)\} \subset M$ Daher gilt nach 18.4 $\forall x \in M$: $t \cdot x \overset{t \to \infty}{\longrightarrow} M_v$

> Erinnerung (18.4): Sei X ein normierter Vektorraum; $M \subset X$ eine abgeschlossene Teilmenge, $V \in C(M)$ eine Ljapunovfunktion M, und $\gamma^+(x)$ sei relativkompakt mit $\gamma^+(x) \subset M$.
> Ferner sei M_v die größte positiv invariante Teilmenge von $\{x \in M | \dot{V}(x) = 0\}$. Dann gilt: $t \cdot x \to M_v$ für $t \to \infty$

□

7 Zusammenfassung

(i) Definition Ljapunovfunktion: $V \in C^1(M)$ mit $\dot{V}(x) < 0 \ \forall x \in M$.

(ii) orbitale Ableitung: $\dot{V}(x) = \dfrac{d}{dt}V(x(t)) = \langle \nabla V(x), f(x) \rangle$
$V(t \cdot x) \leq V(x) + \int_0^t \dot{V}(\tau \cdot x) d\tau$ für $0 \leq t \leq T$
$V(t \cdot x) \leq e^{-\alpha t} V(x) \ \forall t \in [0, T)$.

(iii) positiv invariante Menge: $\gamma^+(M) \subset M$

(iv) Lokalisierung positiv invarianter Mengen:
V Ljapunovfunktion auf $\{x \in X | \gamma < V(x) < \beta\}$. Dann ist $M_\alpha := \{x \in X | V(x) \leq \alpha\}$ positiv invariant $\forall \alpha \in [\gamma, \beta)$.

(v) positive Limesmenge: $w(x) := \bigcap_{t>0} \overline{\gamma^+(t \cdot x)}$

(vi) Lokalisierung positive Limesmgen:
$w(x) \subset V^{-1}(\alpha)$ und $w(x) \subset \{y \in M | \dot{V}(y) = 0\}$

8 Quellen

Dieser Vortrag richtet sich nach [1] Seite 255 - 258. Die Nummerierung der Sätze und Lemmata wurde übernommen, um das Nachschlagen zu vereinfachen.

[1]: "Gewöhnliche Differentialgleichungen" von Herbert Amann, 2., überarbeitete Auflage 1995
[2]: "Analysis I/II" Skript von Prof. Schmidt im HS 2013/FS 2014
[3]: "Algebraische Topologie" von Karl Heinz Mayer, Birkhäuser Verlag, Basel 1989
[4]: www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kuepper/veranstaltungen/ss08/dynsys.pdf vom 28.10.2014

9 Anhang

9.1 Lemma 16.3d

Beliebige Schnitte positiv invarianter Mengen sind positiv invariant

Beweis für zwei Mengen. .
Seien $A, B \subset X$ positiv invariante Teilmengen.
$\Rightarrow A \cap B = \{x \in X | s \in A \text{ und } x \in B\}$
$\Rightarrow \forall c \in A \cap B \ \varphi(t, c) \subset A$ da $c \in A$ und $\varphi(t, c) \subset B$ da $c \in B$
$\Rightarrow \forall c \in A \cap B$ und $\forall t \in [0, t^+(c)]$ gilt $\varphi(t, c) \subset A \cap B$
Dies lässt sich auf überabzählbar viele Mengen ausdehnen. $\square$

9.2 17.1b

$t^+(x) < \infty \Rightarrow w(x) = \varnothing$

Beweis. .
Wenn $t^+(x) < \infty$, dann gilt für $t = t^+(x) + 1 \varphi(t + t', x)$ ist nicht definiert.
$\Rightarrow \nexists y \in X$ mit $\varphi(t + t', x) = y$.

$\Rightarrow \overline{\{\varphi(t'+t,x)|0 \leq t' \leq t^+(x)\}} = \varnothing$
$\Rightarrow w(x) := \bigcap_{t>0} \overline{\gamma^+(t \cdot x)} = \varnothing$

$\square$

9.3 17.1c

$\forall x \in X$ mit $t^+(x) = \infty$ gilt: $w(x) = \{y \in X | \exists t_k \to \infty \text{ mit } t_k \cdot x \to y\}$

Beweis. .
$'' \supseteq''$
Sei (t_k) eine Folge in $\mathbb{R}_+$ mit $t_k \to \infty$ und $t_k \cdot x \to y$ (zu zeigen: $y \in w(x)$)
Wegen $y = lim_{k\to\infty}\varphi(t_k, x)$ ist y ein Randpunkt von $\gamma^+(x) = \{\varphi(t', x)|0 \leq t' < t^+(x)\}$
$\Rightarrow y \in \overline{\gamma^+(x)}$
Außerdem gilt wegen $y = lim_{k\to\infty}\varphi(t_k, x) = lim_{t_k\to\infty}\varphi(t_k - t + t, x) = lim_{t_k\to\infty}\varphi(t_k - t, \varphi(t, x))$, dass $y \in \overline{\gamma^+(t \cdot x)} \forall t \geq 0$, also $y \in w(x)$.
$'' \subseteq''$
Sei $y \in w(x)$, also $y \in \overline{\gamma^+(t \cdot x)} \forall t > 0$
$\Rightarrow \forall t > 0$ ist $y \in \overline{\{\varphi(t + t', x)|t \leq t' < t^+(x)\}}$

(Lemma 9.19 aus Skript): Der Abschluss einer Teilmenge eines normierten Vektorraumes besteht aus allen Grenzwerten von Folgen innerhalb der Teilmenge, die in dem normierten Vektorraum konvergieren.

Daher kann man die Elemente (wie y) einer abgeschlossenen Menge (wie $\overline{\{\varphi(t + t', x)|t \leq t' < t^+(x)\}}$) als Grenzewerte von Folgen aus Elementen aus dieser Menge auffassen.

$\Rightarrow \forall t > 0 \exists$ Folge t_l mit $\varphi(t_l, x) \xrightarrow{l\to\infty} y$

Hier habe ich beispielhaft einige Folgen dargestellt (für $t = \frac{1}{2}, t, \sqrt{2}, 2, 3, 4$). Mit den rot umkreisten Indizes werden wir nach dem Diagonalverfahren einzelnen Folgenglieder für unsere neue Folge auwählen.

$\vdots$
$t = \frac{1}{2}$: $\exists t_l^{(\frac{1}{2})}$: $t_1^{(\frac{1}{2})}$ $t_2^{(\frac{1}{2})}$ $t_3^{(\frac{1}{2})}$ $t_4^{(\frac{1}{2})}$ $\cdots$
$\vdots$
$t = 1$: $\exists t_l^{(1)}$: $t_1^{(1)}$ $t_2^{(1)}$ $t_3^{(1)}$ $\cdots$ $t_4^{(1)}$ $t_{k_1^*}^{(1)}$ mit $\varphi(t_l^{(1)}, x) \in B(y, 1)$ ab $t_{k_1^*}^{(1)}$
$\vdots$
$t = \sqrt{2}$: $\exists t_l^{(\sqrt{2})}$: $t_1^{(\sqrt{2})}$ $t_2^{(\sqrt{2})}$ $t_3^{(\sqrt{2})}$ $t_4^{(\sqrt{2})}$
$\vdots$
$t = 2$: $\exists t_l^{(2)}$: $t_1^{(2)}$ $t_2^{(2)}$ $t_3^{(2)}$ $t_4^{(2)}$ $t_5^{(2)}$ $t_6^{(2)}$ $\cdots$ $t_{k_2^*}^{(1)}$ mit $\varphi(t_l^{(2)}, x) \in B(y, \frac{1}{2})$ ab $t_{k_2^*}^{(1)}$
$\vdots$
$t = 3$: $\exists t_l^{(3)}$: $t_1^{(3)}$ $t_2^{(3)}$ $t_3^{(3)}$ $t_4^{(3)}$ $t_5^{(3)}$ $t_6^{(3)}$ $t_7^{(3)}$ $\cdots$ $t_{k_1^*}^{(3)}$ mit $\varphi(t_l^{(3)}, x) \in B(y, \frac{1}{3})$ ab $t_{k_3^*}^{(1)}$

$\vdots$

$t = 4$: $\exists t_l^{(1)}$: $t_1^{(4)}\ t_2^{(4)}\ t_3^{(4)}\ t_4^{(4)}\ t_5^{(4)}\ t_6^{(4)}\ t_7^{(4)}\ t_8^{(4)}\ t_9^{(4)}\ t_{10}^{(4)} \cdots\ t_{k_4^*}^{(1)}$ mit $\varphi(t_l^{(4)}, x) \in B(y, \frac{1}{4})$ ab $t_{k_4^*}^{(1)}$

$\vdots$

Damit $y \in \{y \in X | \exists t_k \to \infty$ mit $t_k \cdot x \to y\}$ gilt, müssen wir jetzt eine Folge $n(k)$, $k \in \mathbb{N}$ finden, die die Rolle des t_k übernimmt.
Es muss also gelten:

(1) $n(k) \to \infty$
Das wollen wir darstellen indem wir zwei andere Eigenschaften für unser $n(k)$ fordern:

(1a) $n(k+1) > n(k)\ \forall k \in \mathbb{N}$, (d.h. $n(k)$ ist wachsend) das brauchen wir natürlich für $n(k) \to \infty$ und

(1b) $n(k) > k$ Das brauchen wir später, um sicherzustellen, dass unsere Folge nicht irgendwann z.B. Bei $n(1.000.000)$ abbricht und es kein $n(1.000.001)$ mehr gibt.

(2) $n(k) \to y$ Das wollen wir durch $n(k) \cdot x \in B(y, \frac{1}{k})$ darstellen.

Wozu brauchen wir die Eigenschaft $n(k) > k$? Angenommen $n(1)$ wäre sehr groß, z.B. $n(1) = 1.000$. Finden wir dann auch immer ein $n(2)$ mit den geforderten Eigenschaften und insbesondere $n(2) > n(1) = 1.000$? Ja, weil $n(k) > k$

Wie finden wir eine solche Folge $n(k)$?

$k = 1$: Betrachte $t_l^{(2)}$: $\varphi(t_l^{(2)}, x) \to y$ und $t_l^{(2)} \geq 2 > 1\ \forall l \in \mathbb{N}$
$\forall \epsilon > 0\ \exists k_1 \in \mathbb{N}$ mit $||\varphi(t_l^{(2)}, x) - y|| < \epsilon\ \forall l \geq k_1$
$\overset{für\ \epsilon=1}{\Rightarrow} \exists k_1 \in \mathbb{N}$ mit $||\varphi(t_l^{(2)}, x) - y|| < 1\ \forall l \geq k_1$
$\Rightarrow \exists k_1 \in \mathbb{N}$ mit $\varphi(t_l^{(2)}, x) \in B(y, 1)$
Da $k_1 \in \mathbb{N}\ \exists k_1^*$ mit $k_1^* = min\{k_1 \in \mathbb{N}\colon \varphi(t_l^{(2)}, x) \in B(y, 1)\ \forall l \geq k_1\}$
Wähle $n(1) = t_{k_1^*}^{(2)}$.

$k = 2$: Betrachte $t_l^{(3)}$: $\varphi(t_l^{(3)}, x) \to y$ und $t_l^{(3)} \geq 3 > 2\ \forall l \in \mathbb{N}$
mit denselben Überlegungen und analogen Definitionen wie oben folgt:
$\exists k_2^*$ mit $k_2^* = min\{k_2 \in \mathbb{N}\colon \varphi(t_l^{(3)}, x) \in B(y, \frac{1}{2}\ \forall l \geq k_2\}$
Können wir jetzt $n(2) = t_{k_2^*}^{(3)}$ wählen?
Nein, denn wir müssen sicherstellen, dass $n(k+1) > n(k)$ gilt.
Können wir dann $n(2) = max\{t_{k_1^*}^{(2)}, t_{k_2^*}^{(3)}\}$ wählen?
Nein, denn abgesehen davon, dass dann nur $n(k+1) \geq n(k)$ gelten würde, hätten wir ein Problem, wenn $t_{k_2^*}^{(3)} < t_{k_1^*}^{(2)}$ wäre. Natürlich gilt, $t_{k_1^*}^{(2)} > 1$ und $t_{k_2^*}^{(3)} > 2$, aber das ist noch nicht ausreichend um $t_{k_2^*}^{(3)} < t_{k_1^*}^{(2)}$ zu verhindern. Warum wäre diese Relation ein Problem? Weil dann $n(2) \cdot x \in B(y, 1)$ gelten würde. Wir wollen jedoch, dass $n(2) \cdot x \in B(y, \frac{1}{2})$ gilt, damit $n(k) \cdot x \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} y$ gilt.
Also müssen wir $n(2)$ wie folgt wählen: $n(2) := min\{j \in \{t_{k_1^*}^{(1)}, t_{k_2^*}^{(2)}, t_{k_3^*}^{(3)}, t_{k_4^*}^{(4)}, \cdots\} \mid j > n(1)\}$
Als nächstes bekommen wir $n(3) = min\{j \in \{t_{k_1^*}^{(1)}, t_{k_2^*}^{(2)}, t_{k_3^*}^{(3)}, t_{k_4^*}^{(4)}, \cdots\} \mid j > n(2)\}$

und somit insgesamt: $n(2) := min\{j \in \{t_{k_1^*}^{(1)}, t_{k_2^*}^{(2)}, t_{k_3^*}^{(3)}, t_{k_4^*}^{(4)}, \cdots\} \mid j > n(k-1)\}$

Damit haben wir eine Folge $n(k)$ konstruiert mit $n(k) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} y$ und damit gilt die Behauptung.

□

9.4 17.1d

Für jedes $x \in M$ mit $t^+(x) = \infty$ ist $\overline{\gamma^+(x)} = \gamma^+(x) \cup w(x)$

Beweis. .

> (Lemma 9.19 aus Skript):
> Der Abschluss einer Teilmenge eines metrischen Raumes besteht aus allen Grenzwerten von Folgen innerhalb der Teilmenge, die in dem metrischen Raum konvergieren.

Sei also $\varphi(t_k, x)$ eine konvergente Folge in $\gamma^+(x)$. Falls $t_k \to \infty$ wissen wir schon aus Lemma (17.1c), dass deren Grenzwert in $w(x)$ liegt.

> Erinnerung (17.1c):
> $\forall x \in X$ mit $t^+(x) = \infty$ gilt: $w(x) = \{y \in X | \exists t_k \to \infty \text{ mit } t_k \cdot x \to y\}$

Falls t_k nicht gegen ∞ läuft, liegt ihr Grenzwert in $\gamma^+(x) := [0, t^+(x))\cdot x = \{t\cdot x | 0 \leq t < t^+(x)\}$. □

9.5 17.1e

Für jedes $x \in X$ sind $\overline{\gamma^+(x)}$ und $w(x)$ abgeschlossen und positiv invariant.

Beweis. .
$\overline{\gamma^+(x)}$ ist natürlich abgeschlossen

> Erinnerung (16.3d): Beliebige Schnitte positiv invarianter Mengen sind positiv invariant

Also ist auch $w(x) = \bigcap_{t>0} \overline{\gamma^+(x)}$ abgeschlossen.
Jetzt zeige ich, dass $\gamma^+(x)$ positiv invariant ist:

> Erinnerung (positiv invariant): Eine Menge M heißt positiv invariant, wenn $\forall m \in M$ gilt $\gamma^+(m) = \{\varphi(t, m) | 0 \leq t < t^+(m)\} \subset M$.

$\forall a \in \gamma^+(x)\ \exists t^* \in [0, t^+(x))$ mit $a = \varphi(t^*, x)$
$\Rightarrow \varphi(t, a) = \varphi(t, \varphi(t^*, x)) = \varphi(t + t^*, x) \in \gamma^+(x)$
Dabei kann es nicht zu Problemen mit dem Definitionsbereich $t, t^* \in [0, t^+(x))$ kommen.

> Erinnerung (Definition Fluss): für $x \in X, s \in J(x)$ und $t \in J(\varphi(s, x))$ gilt $s + t \in J(x)$ und $\varphi(t, \varphi(s, x)) = \varphi(s + t, x)$

Also gilt, mit $x \in X$, $t^* \in J(x)$ und $t \in J(\varphi(t^*, x))$, dass $t + t^* \in J(x)$ liegt und da $t, t^* \geq 0$ gilt $t + t^* \in [0, t^+(x))$.

$$\boxed{\text{(16.3e): Der Abschluss einer positiv invarianten Menge ist auch positiv invariant}}$$

Nach 16.3e ist $\overline{\gamma^+(x)}$ positiv invariant und damit auch dessen unendlicher Durchschnitt $\bigcap_{t>0} \overline{\gamma^+(x)} = w(x)$. $\square$