Seminararbeit: Ljapunovfunktionen II (Stabilität)

Antoine Jockers

24.11.2014

Institut für Mathematik III
Fakultät für Wirtschaftsinformatik und Wirtschaftsmathematik
Universität Mannheim
Dozent: Prof. Dr. Martin Ulrich Schmidt

Inhaltsverzeichnis

1 Stabilitätsbegriffe

1.1 Einführende Definitionen

Definition 1. *(Abstand Punkt zu Menge/Ball um eine Menge)*
Sei M eine nichtleere Teilmenge von X, so definieren wir:

$$d(x, M) := dist(x, M) = inf_{m \in M} ||x - m||$$
$$B(M, r) := \{x \in X \mid d(x, M) < r\}$$

Definition 2. *(Anziehungsbereich)*
$\mathcal{A}(M) := \{x \in X \mid t^+(x) = +\infty \text{ und } \varphi(t, x) \to M \text{ wenn } t \to \infty\}$

1.2 Stabilität

Definition 3. *(Stabilität einer Menge)*
Eine Menge M heisst:

1. *stabil, wenn* $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0$: $\varphi(t, x) \subset B(M, \epsilon)\ \forall x \in B(M, \delta)$
2. *asymptotisch stabil, wenn M stabil ist und* $B(M, \epsilon) \subset \mathcal{A}(M)$
3. *exponentiell stabil mit Exponent* α, *wenn* $\exists \alpha, \eta, \delta > 0$ *Konstanten* : $\forall x \in B(M, \delta)$ $t^+(x) = +\infty$ *und* $d(\varphi(t, x), M) \leq \eta e^{-\alpha t} d(x, M)$.
   Falls dies $\forall x \in X$ *gilt, so nennt man M global exponentiell stabil.*

Bemerkung 4.
M global exponentiell stabil + M kompakt $\Rightarrow$ *M asymptotisch stabil*
f Lipschitzstetig, M exponentiell stabil $\Rightarrow$ *M asymptotisch stabil*
M asymptotisch stabil $\Rightarrow$ *M stabil*

1.3 Weitere Definitionen

Definition 5. *(Ljapunovfunktion)*
Eine Ljapunovfunktion ist eine stetige Funktion $V : M \to \mathbb{R}$ *mit* $\dot{V}(x) \leq 0$ *für das autonome System* $\dot{x}(t) = f(x(t))$.

Definition 6. *(relativ kompakt)*
Eine Teilmenge $M \subset X$ *eines topologischen Raumes X heisst relativ kompakt, wenn ihr Abschluss* $\overline{A}$ *kompakt ist.*

Definition 7. *(positive Limesmenge)*
Die positive Limesmenge $\omega(x)$ *ist definiert als* $\omega(x) := \cap_{t>0} \overline{\gamma^+(\varphi(t, x))}$

Definition 8. *(positiv invariant)*
M ist positiv invariant, falls $\gamma^+(m) \subset M \ \forall m \in M$

Definition 9. *($\mathcal{W}_r$)*
$\mathcal{W}_r$ ist die Menge der wachsenden Funktionen $g : [0, r) \to \mathbb{R}$ für die gilt: g(0)=0 und $g(\xi) > 0 \ \forall \xi > 0$.

2 Wiederholung Sätze

(I) $\gamma^+(x)$ relativ kompakt $\Rightarrow t^+(x) = +\infty$ (Kor. 10.13 (Amann))

(II) V sei eine Ljapunovfunktion auf $\{x \in X \mid \gamma < V(x) < \beta\}$ mit $-\infty \leq \gamma < \beta < +\infty$
$\Rightarrow M_\alpha := \{x \in X \mid V(x) \leq \alpha\}$ ist $\forall \alpha \in (\gamma, \beta)$ positiv invariant

(III) $M \subset X$ abgeschlossen, V Ljapunovfunktion auf M mit $V(x) \geq 0$ $\forall x \in M$
$\gamma^+(x) \subset M \Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}$ mit $\omega(x) \subset V^{-1}(\alpha)$
Insbesondere gilt: $\omega(x) \subset \left\{ y \in M \mid \dot{V}(y) = 0 \right\}$

(IV) V Ljapunovfunktion auf M und $\exists \alpha > 0$ mit $\dot{V}(y) \leq -\alpha V(y) \ \forall y \in M$
$\Rightarrow \forall x \in M$ und $\forall T \in [0, t^+(x))$ mit $\varphi([0, T], x) \subset M$:

$$V(\varphi(t, x)) \leq e^{-\alpha t} V(x) \ \forall t \in [0, T)$$

(V) $X \subset E$, X offen und E reeller Banachraum, f das Vektorfeld zu $\dot{x} = f(x)$
$V : X \to \mathbb{R}$ differenzierbar $\Rightarrow \dot{V}(x) = \langle DV(x), f(x) \rangle \ \forall x \in X$

(VI) V Ljapunovfunktion auf M, $V(\varphi(t, y)) \subset M$ für $0 \leq t \leq T < t^+(x)$
$\Rightarrow V(\varphi(t, y))$ ist fallend auf $[0, T]$
und $V(\varphi(t, y)) \leq V(y) + \int_0^t \dot{V}(\varphi(\tau, y))\, d\tau$ auf $[0, T)$

Die Aussagen (II)-(VI) wurden im Vortrag "Ljapunovfunktionen I" von H.Vogel besprochen und bewiesen.
Einen Beweis zu Aussage I findet man im Buch: *Gewöhnliche Differentialgleichungen.* 2.Auflage. Berlin: de Gruyter, 1995 von AMANN H. in Teill II Kap.10.

3 Satz zur Stabilität

Theorem 10. *(Stabilität)*
Es sei $V \in C(X,\mathbb{R})$ und $M := V^{-1}(-\infty,0]$ sei kompakt und nicht leer.
Ferner sei $r > 0$ und V eine Ljapunovkunktion auf $B(M,r) \setminus M$.
Schließlich sei jeder in B(M,r) enthaltene positive Halborbit relativ kompakt.

(i) $\exists g \in \mathcal{W}$ *mit* $V(x) \geq g(d(x,M))$ $\forall x \in B(M,r) \setminus M$

$\Rightarrow$ *M ist stabil*

(ii) *Wenn zusätzlich gilt:*
$\exists h \in \mathcal{W}$ *mit* $\dot{V}(x) \leq -h(d(x,M))$ $\forall x \in B(M,r) \setminus M$

$\Rightarrow$ *M ist asymptotisch stabil*

(iii) *Existieren Konstanten* $\alpha, \beta, \overline{\eta}, \widehat{\eta} > 0$ *mit* $\dot{V}(x) \leq -\alpha V(x)$ *und*
$\overline{\eta}\,[d(x,M)]^{\beta} \leq V(x) \leq \widehat{\eta}\,[d(x,M)]^{\beta}$ $\forall x \in B(M,r)$

$\Rightarrow$ *M ist exponentiell stabil mit Exponent* α/β

In (ii) und (iii) gilt außerdem:
$\mathcal{A}(M) \supset V^{-1}(-\infty,\overline{\alpha})$, *wobei* $\overline{\alpha} := sup\{\alpha \geq 0 \mid V^{-1}(-\infty,\alpha] \subset B(M,r)\}$

Beweis.

Nach Satz(I) gilt: $\gamma^+(x)$ ist relativ kompakt $\Rightarrow$ $t^+(x) = +\infty$. Da nach Vorraussertzung jeder in B(M,r) enthaltene positive Halborbit relativ kompakt ist gilt somit: $\forall x : \gamma^+(x) \subset B(M,r)$ ist $t^+(x) = +\infty$.
Außerdem ist M kompakt $\Rightarrow \exists \epsilon \in (0,r)$ mit $B(M,\epsilon) \subset U$ für eine beliebige Umgebung U von M

(i) ZZ.: M ist stabil $\Leftrightarrow$
Zu jeder Umgebung B(M,ϵ) von M gibt es eine Umgebung W von M mit $\varphi(t,x) \subset W$

Sei M_α:=$\{x \in X \mid V(x) \leq \alpha\}$. Wir wollen zeigen, dass diese Menge für $0 < \alpha < \beta < g(\epsilon)$ die gesuchte Umgebung W ist.
Sei $0 < \beta < g(\epsilon)$ (β existiert, da $g(\epsilon) > 0$) und $M_\beta = \{x \in X \mid V(x) \leq \beta\}$

Beh.: $V(x) \leq \beta \Rightarrow d(M,x) < \epsilon \; \forall x \in B(M,r) \setminus M$

Beweis. Ang. $d(M,x) \geq \epsilon$
$\Rightarrow g(d(M,x)) \geq g(\epsilon)$, da g monoton wachsend
$\Rightarrow g(d(M,x)) > \beta$, da $\beta < g(\epsilon)$
$\Rightarrow V(x) > \beta$, da $V(x) \geq g(d(x,M))$ □

Somit gilt: $M_\beta = \{x \in X \mid V(x) \leq \beta\} \subseteq \{x \in X \mid d(M,x) < \epsilon\} = B(M,\epsilon)$
Also auch: $M_\beta \subset U$, da $B(M,\epsilon) \subset U$
Sei nun $\alpha \in (0,\beta)$. Da V stetig ist, ist M_α eine Umgebung von M.
Es bleibt uns also zu zeigen, dass $\varphi(t,x) \subset M_\alpha \; \forall x \in U$.
Dafür wollen wir Satz(II) anwenden.
Wir setzen γ=0(in VSS) und da V eine Ljapunovfunktion auf $V^{-1}(0,\beta) \subset B(M,r) \setminus M$ erhalten wir, dass M_α positiv invariant ist.
Somit folgt nach Def.(positiv invariant): $\varphi(t,x) \subset M_\alpha$
Also ist M stabil.

(ii) ZZ.: M ist asymptotisch stabil $\Leftrightarrow$ M stabil + M attraktiv
Die Stabilität folgt aus (i). Es bleibt also zu zeigen: $\mathcal{A}(M)$ ist eine Umgebung von M (Def. M attraktiv)

Sei $0 < \alpha < \beta < g(r)$
Beh.:Für kein $x \in M_\beta \setminus \mathring{M}_\alpha$ ist $\gamma^+(x)$ ganz in $M_\beta \setminus \mathring{M}_\alpha$

Beweis. Ang. $\gamma^+(x)$ sei ganz in $M_\beta \setminus \mathring{M}_\alpha$
Da $\mathring{M}_\alpha$ offen ist, ist $\left(\mathring{M}_\alpha\right)^C$ abgeschlossen.
Weiter ist $(\beta,+\infty)$ offen und somit $(-\infty,\beta]$ abgeschlossen und da V stetig ist, $V^{-1}((-\infty,\beta])$ abgeschlossen.
Nun ist $M_\beta \setminus \mathring{M}_\alpha$ die Vereinigung dieser Mengen und somit wiederrum abgeschlossen.
Weiter ist $M_\beta \setminus \mathring{M}_\alpha \subset B(M,r) \setminus M$ (da $\beta < g(r)$), also ist V eine Ljapunovfunktion aus $M_\beta \setminus \mathring{M}_\alpha$.
Schließlich gilt: $x \in M_\beta \setminus \mathring{M}_\alpha \Rightarrow x \in \{x \in X \mid V(x) \in [\alpha,\beta]\}$ und da $\alpha > 0$ ist V(x)>0.
Somit sind alle Vorraussetzungen von Satz(III) erfüllt und wir erhalten:
1.) $\exists \xi \in \mathbb{R}$ und ein $y \in \omega(x)$ mit $V(y) = \xi$
2.) $\omega(x) \subset \left\{y \in M_\beta \setminus \mathring{M}_\alpha \,|\dot{V}\,(y) = 0\right\}$
$x \notin M \Rightarrow d(x,M) > 0 \stackrel{h \in \mathcal{W}}{\Rightarrow} h(d(x,M)) > 0 \Rightarrow -h(d(x,M)) < 0.$
Aus $\dot{V}\,(x) \leq h(d(x,M))$ folgt nun $\dot{V}\,(x) < 0 \stackrel{2.)}{\Rightarrow} \omega(x) \subset \emptyset \Rightarrow \omega(x) = \emptyset.$

Nach 1. gibt es aber ein y, so dass $\omega(x) \subset V^{-1}(\xi) \neq \emptyset$ und erhalten somit einen Widerspruch. $\square$

Somit gilt: $\forall x \in M_\beta \setminus \mathring{M}_\alpha\ \exists t_0 > 0$: $\varphi(t_0, x) \subset M_\alpha$, da wir aus (i) wissen wir, dass M_β positiv invariant ist.
Da α beliebig klein gemacht werden kann folgt daraus, dass M ein Attraktor mit $M_\beta \subset \mathcal{A}(M)$

(iii) ZZ.: M ist exponentiell stabil $\Leftrightarrow \exists \alpha, \beta, \delta, \eta$ Konstanten: $\forall x \in B(M, \delta)$ $t^+(x) = +\infty$ und $d(\varphi(t,x), M) \leq \eta e^{-\frac{\alpha}{\beta}t} d(x, M)$

Es gilt $t^+(x) = +\infty$. (siehe oben)
Sei $x \in M_\delta$ mit$0 < \delta < g(r)$ und $g(\xi) := \overline{\eta}(\xi)^\beta$.
Dann gilt $g(0) = 0$, $g(\xi) > 0$ für $\xi > 0$ und g wachsend, somit $g \in \mathcal{W}$ und $\overline{\eta}[d(x,M)]^\beta \leq V(x) \Rightarrow V(x) \geq g(d(x,M))\ \forall x \in B(M,r) \setminus M$.
Die Vorrausetzungen von (i) sind erfüllt und wir können analog folgern, dass M_δ positiv invariant ist, also $\varphi(t,x) \subset M_\delta \subset B(M,r)$.
Aus $\dot{V}(x) \leq -\alpha V(x)$, V Ljapunovfunktion auf $B(M,r) \setminus M$ und $\varphi(t,x) \subset B(M,r)$ folgt nach Satz(IV)
$V(\varphi(t,x)) \leq e^{-\alpha t} V(x)\ \forall x \in B(M,r) \setminus M$
$\Rightarrow V(\varphi(t,x)) \leq e^{-\alpha t}\widehat{\eta}[d(x,M)]^\beta$, da $V(x) \leq \widehat{\eta}[d(x,M)]^\beta$
Andererseits ist $V(x) \geq \overline{\eta}[d(x,M)]^\beta\ \forall x \in B(M,r)$ und $\varphi(t,x) \in B(M,r)$
$\Rightarrow \overline{\eta}[d(\varphi(t,x),M)]^\beta \leq V(\varphi(t,x))$
$\Rightarrow \overline{\eta}[d(\varphi(t,x),M)]^\beta \leq e^{-\alpha t}\widehat{\eta}[d(x,M)]^\beta$
$\Rightarrow d(\varphi(t,x),M) \leq \left(\frac{\widehat{\eta}}{\overline{\eta}} e^{-\alpha t}\right)^{\frac{1}{\beta}} d(x,M)$
$\Rightarrow d(\varphi(t,x),M) \leq \eta e^{\frac{\alpha}{\beta}t} d(x,M)$ mit $\eta := (\frac{\widehat{\eta}}{\overline{\eta}})^{\frac{1}{\beta}}$ für $x \in M_\delta$
$\Rightarrow$ M ist exponentiell stabil mit $M_\delta \subset \mathcal{A}(M)$

Nun gilt $\overline{\alpha} \leq \beta, \delta$, also $M_{\overline{\alpha}} = V^{-1}(-\infty, \overline{\alpha}) \subset \mathcal{A}(M)$ für (ii) und (iii). $\square$

4 Korollar zur Stabilität

Im Folgenden seien:

- E ein endlichdimensionaler Banachraum
- X eine offene Teilmenge von E
- $f \in C^{1-}(X, E)$ das Vektorfeld zu $\dot{x}(t) = f(x(t))$

Korollar 11. *(Stabilität)*
Es sei $V \in C(X, \mathbb{R})$ und M:=$V^{-1}(-\infty, 0]$ sei kompakt und nicht leer.
Ferner sei $\overline{B_E(M, r)} \subset X$ für ein r>0 und
V sei auf $B(M, r) \setminus M$ stetig differenzierbar.

(i) $<DV(x), f(x)> \leq 0 \ \forall x \in B(M, r) \setminus M$

$$\Rightarrow \ M \text{ ist stabil}$$

(ii) *Falls zusätzlich:*
$<DV(x), f(x)> < 0 \ \forall x \in B(M, r) \setminus M$

$$\Rightarrow \ M \text{ ist asymptotisch stabil}$$

mit $\mathcal{A}(M) \supset V^{-1}(-\infty, \overline{\alpha})$, *wobei* $\overline{\alpha} := sup\{\alpha \geq 0 \mid V^{-1}(-\infty, \alpha] \subset B(M, r)\}$

Beweis. Wir wollen in beiden Fällen Th.10 anwenden. Dafür fehlen uns die Vorraussetzungen: a) V Ljapunovfunktion auf $B(M, r) \setminus M$ und
b) Jeder in B(M,r) enthaltene positive Halborbit ist relativ kompakt

(a) Nach Satz(V):
V ist differenzierbar $\Rightarrow \dot{V}(x) = <DV(x), f(x)> \forall x \in B(M, r) \setminus M$
$\Rightarrow \dot{V}(x) \leq 0$ nach Vorraussetzung und somit ist V nach Definition eine Ljapunovfunktion

(b) ZZ.: $\gamma^+(x)$ mit $\gamma^+ \subset B(M, r)$ ist relativ kompakt
Wir zeigen, dass B(M,r) relativ kompakt ist, woraus direkt folgt, dass $\gamma^+(x)$ relativ kompakt ist
M ist kompakt $\Rightarrow$ M ist beschränkt $\Rightarrow$ B(M,r) ist beschränkt
Da $M \subset X \subset E$ und $dim(E) < +\infty$ (E Banachraum)
$\Rightarrow$B(M,r) ist relativ kompakt

(i) Nun müssen wir ein $g \in \mathcal{W}$ mit $V(x) \geq g(d(x, M))$ finden.
Definiere:
g(0):=0 und $g(\xi) := min\{V(x) \mid \xi \leq d(x, M) \leq r\}$ für $\xi \in (0, r)$
Somit gilt: $\xi > 0 \Rightarrow d(x, M) > 0 \Rightarrow x \notin M \Rightarrow V(x) > 0$

$\Rightarrow g(\xi) > 0$ für $\xi \in (0, r)$ und
$\{V(x) \mid \xi_1 \leq d(x, M) \leq r\} \subset \{V(x) \mid \xi_2 \leq d(x, M) \leq r\}$ für $\xi_1 \geq \xi_2$
$\Rightarrow g(\xi_1) \geq g(\xi_2)$
Da g(0)=0 und $V(x) \geq g(d(x, M))$ offensichtlich erfüllt sind, gelten alle Vorraussetzungen von Theorem 1, also ist M stabil.

(ii) Hier müssen wir noch ein $h \in \mathcal{W}$ mit $\dot{V}(x) \leq -h(d(x, M))$ finden.
Definiere:
h(0):=0 und $h(\xi) := min\,\{-{<}DV(x), f(x){>} \mid \xi \leq d(x, M) \leq r\}$ für $\xi \in (0, r)$
Da $\dot{V}(x) = {<}DV(x), f(x){>}$ und V Ljanuovfunktion ist: ${<}DV(x), f(x){>} < 0 \Rightarrow -{<}DV(x), f(x){>} > 0$
$\Rightarrow h(\xi) > 0$ für $\xi \in (0, r)$ und h ist monot0n wachsend. (analog zu g)
Da h(0)=0 und $V(x) \geq h(d(x, M))$ offensichtlich erfüllt sind, gelten alle Vorraussetzungen von Theorem 1, also ist M asymptotisch stabil mit $\mathcal{A}(M) \subset V^{-1}(-\infty, \overline{\alpha})$.

□

Bemerkung 12. *(direkte Ljapunovsche Methode)*
Ist $M = \{x_0\}$, also ein isoliertes Minimum von V, so ist x_0 ein kritischer Punkt von f. Also gibt das Korollar in diesem Fall hinreichende Bedingungen für die (asymptotische) Stabilität eines kritischen Punktes. Da man bei dieser Methode die Lösungen der Differentialgleichung $\dot{x} = f(x)$ nicht kennen muss, spricht man auch von der direkten Ljapunovschen Methode(oder 2.Ljapunovsche Methode). Die Schwierigkeit liegt darin eine geeignete Ljapunovfunktion zu konstruieren, da es hierfür kein allgemeine Verfahren gibt.

5 Beispiel

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x^3 + y \\ -x - y^5 \end{pmatrix}$$

Dies ist eine autonome Differentialgleichung $\dot{x}= Ax$
mit $A = Df(x,y) = \begin{pmatrix} -3x^2 & 1 \\ -1 & -5y^4 \end{pmatrix}$
Offensichtlich ist (0,0) ein kritischer Punkt da $f(0,0) = 0$.
Unser Ziel ist es die Stabilität dieses Punktes zu untersuchen.

Eine Möglichkeit die wir schon kennengelernt haben, ist es das **Prinzip der linearisierten Stabilität** anzuwenden.
Wir berechen also $Re(\sigma(Df(0,0)))$:
$Df(0,0) = \begin{pmatrix} -3 \cdot 0^2 & 1 \\ -1 & -5 \cdot 0^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
$\Rightarrow \sigma(Df(0,0)) = \{\pm i\} \Rightarrow Re(\sigma(Df(0,0)) = 0$
Somit führt das Prinzip der linearisierten Stabilität zu *keinem Ergebnis.*

Versuchen wir es also mit der **direkten Ljapunov'schen Methode**:
Ziel ist es eine Ljapunovfunktion V zu konstruieren für die gilt:
$M = V^{-1}(-\infty, 0] = \{(0,0)\} \Leftrightarrow V(x,y) > 0 \ \forall (x,y) \neq (0,0)$,
V(0,0)=0 und $\dot{V}\ (x,y) \leq 0$.
Wir machen den Ansatz: $V(x,y) = ax^2 + by^2$
Wodurch die ersten beiden Bedingungen erfüllt sind.
Da f differenzierbar gilt:

$$\begin{aligned} \dot{V}\ (x,y) &= <DV(x,y), f(x)> = \begin{pmatrix} 2ax \\ 2by \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -x^3 + y \\ -x - y^5 \end{pmatrix} \\ &= 2ax(-x^3 + y) + 2by(-x - y^5) \\ &= -2ax^4 + 2axy - 2bxy - 2by^6 \end{aligned}$$

Mit a=b>0 ergibt sich $\dot{V}\ (x,y) = -2ax^4 - 2by^6 < 0 \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$
Also ist V eine Ljapunovfunktion auf $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$ und da $M = \{(0,0)\}$ kompakt und nicht leer gilt nach dem Korollar, dass *(0,0) asymptotisch stabil* ist.

6 Satz zur Instabilität

Theorem 13. *(Instabilität)*
Sei $V \in C(X, \mathbb{R})$ und $x_0 \in X$ ein kritischer Punkt mit $V(x_0) = 0$.
Weiter gelte: $\exists r > 0$ und $h \in \mathcal{W}_\infty$, derart,
dass $\dot{V}(x) \leq -h(-V(x))\ \forall x \in A_r := \{y \in X \mid V(y) < 0\} \cap B(x_0, r)$.
$\forall \epsilon > 0\ A_\epsilon \neq \emptyset$ und $t^+(x) = +\infty\ \forall x$ mit $\gamma^+(x) \subset A_r$

$$\Rightarrow\ x_0 \textit{ ist instabil}$$

Beweis. Sei $\delta \in (0, r)$ so klein, dass $V(x) \geq -1$ für $x \in A_\delta$. Wir wollen diese Aussage zu einem Widerspruch führen indem wir zeigen, dass $\lim_{t\to\infty} V(\varphi(t, y)) = -\infty$ für $\varphi(t, y) \subset A_\delta$

Ang. x_0 ist stabil
$\overset{Def}{\Rightarrow}$ $\exists \epsilon > 0$ mit $\varphi(t, y) \subset B(x_0, \delta)\ \forall y \in A_\epsilon$ und $\varphi(t, y) \subset A_r$, also auch $\varphi(t, y) \subset \{y \in X \mid V(y) < 0\}$, woraus $\varphi(t, y) \subset A_\delta$. Wir wollen Satz(VI) anwenden, müssen also zeigen, dass V eine Ljapunovfunktion auf A_δ ist.
Es gilt: $\forall x \in A_r\ -V(x) > 0 \overset{h\in\mathcal{W}}{\Rightarrow} h(-V(x)) > 0 \Rightarrow -h(-V(x)) < 0$
$\Rightarrow \dot{V}(x) < 0$, da nach Vorraussetzung $\dot{V}(x) \leq -h(-V(x))$ und somit ist V eine Ljapunovfunktion auf A_r, also auch A_δ.
Wir können also Satz(VI) anwenden und erhalten:

$$\begin{aligned}
V(\varphi(t, y)) &\leq V(y) + \int_0^t \dot{V}(\varphi(\tau, y))\, d\tau \\
&\leq V(y) - \int_0^t h(-V(\varphi(\tau, y)))\, d\tau \textit{ nach VSS} \\
&\leq V(y) - \int_0^t h(-V(\varphi(0, y)))\, d\tau,\ \textit{da } -V \textit{ wachend bzgl. } \tau \\
&\leq V(y) - \int_0^t h(-V(y)))\, d\tau,\ \textit{da } \varphi(0, y) = y \\
&= V(y) - t \cdot h(-V(y)),\ \textit{da } h(-V(y)) \textit{ eine Konstante bzgl. } t
\end{aligned}$$

Es folgt $\lim_{t\to\infty} V(\varphi(t, y)) = -\infty$. (Majorantekriterium)
Wir haben jedoch δ so gewählt, dass $V(\varphi(t, y)) \geq -1$ für $\varphi(t, y) \in A_\delta$, was zu einem Widerspruch führt und somit muss x_0 instabil sein.

$\square$

7 Literaturverzeichnis

[1] AMANN, Herbert: *Gewöhnliche Differentialgleichungen.* 2.Auflage. Berlin: de Gruyter,1995.

[2] http://www.math.uni-hamburg.de/home/lauterbach/tuhh/dglI/folien10.pdf

[3] V̄ogel, Hannah: *Ljapunovfunktionen I.* Seminarvortrag 17.11.2014