UniMan.png

Der Hartmansche Linearisierungssatz

Seminar zu ausgewählten Themen gewöhnlicher Differentialgleichungen und dynamischer Systeme

Torben Schick

3. Dezember 2014

Universität Mannheim
Fakultät für Wirtschaftsinformatik und Wirtschaftsmathematik
Lehrstuhl für Mathematik III
Prof. Dr. M. Schmidt

1 Einführung

Im letzten Vortrag wurde gezeigt, dass falls $f \in C^1(M, E)$ mit $f(x_0) = 0$ und $Re\sigma(Df(x_0)) < 0$, dann ist der kritische Punkt x_0 der autonomen Differentialgleichung $\dot{x} = f(x)$ asymptotisch stabil und falls ein $\lambda_0 \in Re\sigma(Df(x_0))$ und $\lambda_0 > 0$, dann ist der kritische Punkt x_0 der autonomen Differentialgleichung $\dot{x} = f(x)$ instabil. Wir wollen mehr qualitative Aussagen bekommen zum Fall, dass $\sigma_s(A) := \{\lambda \in \sigma(A) | Re\lambda < 0\} \neq \emptyset$ und $\sigma_u(A) := \{\lambda \in \sigma(A) | Re\lambda > 0\} \neq \emptyset$.
Hierbei betrachten wir der Einfachheit halber nur den Fall, dass $Df(x_0)$ einen hyperbolischen Fluss erzeugt, d.h. $\sigma_n(D(f(x_0)) = \emptyset$.
Es besteht ein Zusammenhang zwischen Flüssen und Homöomorphismen. Nach Theorem 10.4 im Amann ist jeder lineare Fluss e^{tA} mit $e^{tA} \in GL(E)$ für jedes $t \in R$ ein Homöomorphismus. Deshalb betrachten wir zuerst den Fall von Homöomorphismen wie wir im ersten Vortrag gehört haben, ist jeder Homöomorphismus ein zeitdiskretes dynamisches System. Ich werde das Linearisierungtheorem für den zeitdiskreten Fall beweisen. Daraus lässt sich der zeitkontinuierliche Fall herleiten.

2 Vorbereitungen

Als Motivation der nachfolgenden Definitionen beweisen wir zuerst einen Spezialfall des Spektralabbildungssatzes.

Lemma 1. *Für $A \in L(E)$ gilt*

$$\sigma(e^A) = e^{\sigma(A)} := \{e^\lambda | \lambda \in \sigma(A)\}$$

Beweis. Durch Komplexifizierung (d.h. $K = \mathbb{C}$) ist E ein komplexer Banachraum. Dies ist sinnvoll, da Eigenwerte von reellen Operatoren komplex seien können. Wegen der direkten Summenzerlegung können wir A in $\lambda I + N$ zerlegen mit $\lambda = \{\lambda_1, ..., \lambda_k\}$, wobei $\lambda_1, ..., \lambda_k$ die paarweise verschiedene Eigenwerten von A sind, und einem nilpotenten Operator $N \in L(E)$. Aus der Definiton von Eigenwerte eines linearen Operators folgt, dass es ein $x \in E \setminus \{0\}$ gibt mit $Ax = \lambda x$, d.h. Nx = 0. Dann folgt:

$$e^A x = e^\lambda e^N x = e^\lambda x$$

d.h. $\sigma(e^A) \subset e^{\sigma(A)}$. Es gilt umgekehrt $e^A y = \mu y$ für $\mu \in \mathbb{C}$ und $y \in E \setminus \{0\}$, daraus folgt:

$$\mu y = e^A y = e^\lambda e^N y = e^\lambda \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{i!} N^i y$$

Da N nilpotent ist, $\exists\, k$ mit $1 \leq k \leq m$ und $N^{k+1} y = 0$. Daraus folgt:

$$\mu N^k y = e^\lambda N^k \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{i!} N^i y = e^\lambda \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{i!} N^{k+i} y = e^\lambda N^k y$$

Also folgt aus $N^k y \neq 0$, dass $\mu = e^\lambda$.
Dies bedeutet $\sigma(e^A) \supset e^{\sigma(A)} \Rightarrow \sigma(e^A) = e^{\sigma(A)}$ □

Korollar 2. *Sei $A \in L(E)$ und A erzeugt einen hyperbolischen linearen Fluss e^{tA}, d.h. $\sigma_n(A) := \{\lambda \in \sigma(A) | Re\lambda = 0\} = \emptyset$.*
Wegen dem Lemma $|\sigma(e^A)| = |e^{\sigma(A)}| = e^{\sigma(A)} \neq 1$. Somit heißt ein Homöomorphismus $T \in GL(E)$ hyperbolisch , wenn T keine Eigenwerte vom Betrag 1 hat.

Sei nun $T \in GL(E)$ hyperbolisch, so gilt

$$\sigma(T) = \sigma_0(T) \cup \sigma_\infty(T)$$

mit

$$\sigma_0(T) := \{\lambda \in \sigma(T) : |\lambda| < 1\}$$

und

$$\sigma_\infty(T) := \{\lambda \in \sigma(T) : |\lambda| > 1\}$$

Daraus folgt $E = E_0 \oplus E_\infty$ und $T = T_0 \oplus T_\infty$ und somit $\sigma(T_0) = \sigma_0(T)$ und $\sigma(T_\infty) = \sigma_\infty(T)$.

Lemma 3. *Sei $T \in GL(E)$ hyperbolisch und es gelte für ein $\alpha \in \mathbb{R}_+$:*

$$|\sigma(T_0)| < \alpha \textit{ und } |\sigma(T_\infty^{-1})| < \alpha$$

Dann existiert eine Hilbertnorm $\|\cdot\|$ auf E mit

$$max\{\|T_0\|, \|T_\infty^{-1}\|\} \leq \alpha$$

Beweis. Wir setzen wieder $K = \mathbb{C}$ und wissen, dass wir T_0 zerlegen können in $D = diag[\lambda_1, ..., \lambda_k]$ und einen nilpotenten Operator $N \in L(E_0)$.
Die Operatornorm von D bezüglich der euklidische Norm ist:

$$\begin{aligned} \|D\| &= \max_{\|x\|_2=1} \|Dx\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i^2 x_i^2 \right)^{1/2} \leq \max_{\|x\|_2=1} \max_i |\lambda_i| \left(\sum_{i=1}^m x_i^2 \right)^{1/2} \\ &= \max_i |\lambda_i| \max_{\|x\|_2=1} \|x\|_2 = \max_i |\lambda_i| \end{aligned}$$

In Algebra haben wir gezeigt, dass es zur jeder nilpotenten Matrix N eine Ähnlichkeitstransformation gibt, so dass

$$P^{-1} * N * P = \begin{pmatrix} S_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & S_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & S_k \end{pmatrix} \text{ mit } S_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Wir können dann eine Basis $B = \{e_1, ..., e_k\}$ von E_0 wählen, so dass
$Ne_j = \begin{cases} e_{j-1} \\ 0 \end{cases}$ gilt. Dann ersetzen wir e_j durch $a_j := \delta^j e_j$ mit $\delta > 0$.

$$Na_j = N\delta^j e_j = \delta^j N e_j = \delta^j e_{j-1} = \delta \delta^{j-1} e_{j-1} = \delta a_{j-1}$$

Also sieht die Matrix von N bezüglich der Basis $\{a_1, ..., a_k\}$ so aus:

$$\begin{pmatrix} 0 & \delta & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \delta \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt, dass $\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta$, so dass es eine Hilbertnorm $\|\cdot\|$ auf E_0 mit $\|N\| \leq \epsilon$ gibt. Da $\alpha - \max_i |\lambda_i| > 0$, gilt

$$\|N\|_0 \leq \alpha - \max_i |\lambda_i|$$

Daraus folgt

$$\|T_0\|_0 \leq \|D\|_0 + \|N\|_0 \leq \max_i |\lambda_i| + \alpha - \max_i |\lambda_i| = \alpha$$

Analog finden wir auf E_∞ eine Hilbertnorm $\|\cdot\|_\infty$, so dass gilt $\|T_\infty^{-1}\|_\infty \leq \alpha$. Dann wird durch

$$\|x\|^2 := \|x_0\|_0^2 + \|x_\infty\|_\infty^2 \;\; \forall \, x = x_0 + x_\infty \in E_0 \oplus E_\infty = E$$

die Hilbertnorm auf E definiert, da sie die Parallelogrammgleichung $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ erfüllt. $\square$

Korollar 4. *Sei $T \in GL(E)$ hyperbolisch, so ist*

$$|\sigma_0(T)| < 1 < |\sigma_\infty(T)|$$

Da gilt

$$\sigma(T^{-1}) = \sigma(T)^{-1} = \left\{ \frac{1}{\lambda} \ : \ \lambda \in \sigma(T) \right\}$$

und somit

$$\sigma_\infty(T^{-1}) < 1$$

Also existieren nach dem Lemma ein $\alpha < 1$ und eine Norm $\|\cdot\|$ auf E mit

$$\|T_0\| \leq \alpha < 1 \text{ und } \|T_\infty^{-1}\| \leq \alpha < 1$$

Definition 5. *Sei X ein topologischer Raum. Wir bezeichnen mit $B(X, E)$ den Banachraum aller beschränkten Abbildungen $u : X \to E$ mit der Supremumsnorm $\|u\|_\infty := \sup_{x \in X} |u(x)|_E$ Dann definieren wir mit:*

$$BC(X, E) := B(X, E) \cap C(X, E)$$

den Banachraum der beschränkten stetigen Funktionen mit der Supremumsnorm.

Betrachtung 6. *$E = E_1 \oplus E_2$ ist eine direkte Summenzerlegung von E, dann gibt es eine Projektion $P_i : E \to E_i, \ i = 1, 2$ mit $|P_i| \leq 1, \ i = 1, 2$. Somit lässt sich jedes Element $u \in B := BC(X, E)$ eindeutig zerlegen:*

$$u = P_1 u + P_2 u$$

Dabei ist $P_i u \in BC(X, E_i) := B_i$. Daraus folgt:

$$\|P_i u\|_{B_i} := \sup_{x \in X} |P_i u(x)| = \|P_i u\|_\infty \leq |P_i| \|u\|_\infty \leq \|u\|_\infty$$

Definieren $(P_i u)(x) := P_i(u(x)) \ \forall x \in X$, dann sind $P_i : B \to B_i, \ i = 1, 2$ mit $P_1 + P_2 = id_B$ stetige Projektionen. Somit gilt $B = B_1 \oplus B_2$.
Dann können wir eine Norm auf B definieren:

$$\|u\|_B := \max\{\|P_1 u\|_{B_1}, \|P_2 u\|_{B_2}\}$$

Lemma 7. *Die Norm $\|u\|_B$ ist eine äquivalente Norm zu $\|u\|_\infty$ auf B.*

Beweis.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\|u\|_\infty = \frac{1}{2}\|P_1 u + P_2 u\|_\infty &\leq \frac{1}{2}\{\|P_1 u\|_\infty + \|P_2 u\|_\infty\} \\ &= \frac{1}{2}\{\|P_1 u\|_{B_1} + \|P_2 u\|_{B_2}\} \leq \|u\|_B \leq \|u\|_\infty \end{aligned}$$

□

Definition 8. *Seien X, Y topologische Räume und $f : X \to X$ sowie $g : Y \to Y$ Homöomorphismen, so heißt ein Homöomorphismus $h : X \to Y$ eine topologische Konjugation von f nach g, falls $h \circ f = g \circ h$.*

3 Globaler Hartmansche Linearisierungssatz

Theorem 9. *Sei $T \in GL(E)$ hyperbolisch und $g \in BC(E,E)$ eine gleichmäßige Lipschitz stetige Funktion mit $\lambda < \frac{1}{2}\min\{1-\alpha, \|T^{-1}\|^{-1}\}$, so sind T und $T+g$ topologisch konjugiert, d.h. $h \circ T = (T+g) \circ h$.*

Beweis. Nach Lemma 3 und Korollar 4 gibt es eine Hilbertnorm $\|\cdot\|$ auf E mit $\max\{\|T_0\|, \|T_\infty\|^{-1}\} \leq \alpha < 1$.

Schritt 1: Zeigen T + g ein Homöomorphismus

1. $T+g$ stetig
2. $(T+g)^{-1}$ existiert
3. $(T+g)^{-1}$ stetig

1. Es ist klar, da die Summe zweier stetiger Funktionen stetig ist.
2. Für ein $x \in E \ \exists\ z \in E$, so dass gilt: $Tx + g(x) = z$. Wir können es zur Fixpunktgleichung umformen.

$$x = T^{-1}(z - g(x)) =: f_z(x)$$

$(T+g)$ ist bijektiv $\Leftrightarrow$ $f_z : E \to E$ genau einen Fixpunkt x(z) hat.
Für festes $z \in E$:

$$\begin{aligned}\|f_z(x) - f_z(y)\| &= \|T^{-1}(z - g(x)) - T^{-1}(z - g(y))\| \leq \|T^{-1}\|\|g(y) - g(x)\| \\ &\leq \lambda\|T^{-1}\|\|x - y\| \leq \frac{1}{2}\|x - y\|\end{aligned}$$

d.h. f_z ist eine Kontraktion. Dann folgt aus dem Banachschen Fixpunktsatz, dass f_z genau einen Fixpunkt hat.
3. Für $z, \hat{z} \in E$:

$$\begin{aligned}\|x(z) - x(\hat{z})\| &= \|f_z(x(z)) - f_{\hat{z}}(x(\hat{z}))\| \\ &\leq \|f_z(x(z)) - f_z(x(\hat{z}))\| + \|f_z(x(\hat{z})) - f_{\hat{z}}(x(\hat{z}))\| \\ &\leq \frac{1}{2}\|x(z) - x(\hat{z})\| + \|T^{-1}(z - g(\hat{z})) - T^{-1}(\hat{z} - g(x(\hat{z})))\| \\ &\leq 2\|T^{-1}\|\|z - \hat{z}\|\end{aligned}$$

Damit ist $x(\cdot) = (T+g)^{-1} : E \to E$ gleichmäßig Lipschitz stetig.
$\Rightarrow T + g$ ein Homöomorphismus.

Schritt 2: Konstruktion von H

In diesem Schritt nehmen wir an, dass für $g, h \in BC(E,E) =: B$ gleichmäßig Lipschitz stetige Funktionen mit der Lipschitzkonstanten λ genau ein $H := H(g,h) \in C(E,E)$ existiert mit $H - id \in B$ und $(T+g) \circ H = H \circ (T+h)$, welches das Theorem 9 erfüllt. Im nächsten Schritt wird die Existenz und Eindeutigkeit von H bewiesen.
Dann gilt für $a := H(g,0)$:

$$(T+g) \circ a = a \circ T$$

und für $b := H(0, g)$:

$$T \circ b = b \circ (T + g)$$

Daraus folgt:

$$(T + g) \circ a \circ b = a \circ T \circ b = a \circ b \circ (T + g)$$

Aufgrund der Eindeutigkeit von H folgt $a \circ b = H(g, g) = id$ und aus

$$T \circ b \circ a = b \circ (T + g) \circ a = b \circ a \circ T$$

folgt $b \circ a = H(g, g) = id$. Aus der eindeutigen Darstellung $a = id + u$ und $b = id + v$ mit $u, v \in B$ ist a ein Homöomorphismus von E und durch $(T + g) \circ a = a \circ T$ eine topologische Konjugation von T+ g nach T.

Schritt 3: Existenz und Eindeutigkeit von u zeigen

d.h. $\exists!\ u \in B$, so dass $(T + g) \circ (id + u) = (id + u) \circ (T + h)$. Wir haben gezeigt, dass T+ h ein Homöomorphismus ist, somit gilt:

$$\begin{aligned} id + u &= (T + g) \circ (id + u) \circ (T + h)^{-1} \\ &= g \circ (id + u) \circ (T + h)^{-1} + T \circ (T + h)^{-1} + T \circ u \circ (T + h)^{-1} \end{aligned}$$

Wegen $id = (T + h) \circ (T + h)^{-1}$ kann man die Gleichung zu einer Fixpunktgleichung umstellen:

$$u = T \circ u \circ (T + h)^{-1} + G(u) := \tilde{F}(u)$$

mit

$$G(u) := g \circ (id + u) \circ (T + h)^{-1} - h \circ (T + h)^{-1}$$

Zeigen, dass $\tilde{F} : B \to B : u \to \tilde{F}(u)$ genau einen Fixpunkt in B hat.
Wir wissen, dass $E = E_0 \oplus E_\infty$, somit ist E_0 und E_∞ orthogonal. Daraus folgt $\|P_0\|$, $\|P_\infty\| \leq 1$ für $P_i : E \to E_i$. Wegen der Betrachtung 6 können wir $u = P_0 u + P_\infty u$ zerlegen und damit die Fixpunktgleichung:

$$\begin{aligned} P_0 u &= T_0 \circ P_0 u \circ (T + h)^{-1} + P_0 G(u) =: F_0(u) \\ P_\infty u &= T_\infty \circ P_\infty u \circ (T + h)^{-1} + P_\infty G(u) =: F_\infty(u) \end{aligned}$$

Wir verketten T_∞^{-1} links und $(T + h)$ rechts an die zweite Gleichung:

$$\begin{aligned} T_\infty^{-1} \circ P_\infty u \circ (T + h) &= P_\infty u + T_\infty^{-1} \circ P_\infty G(u) \circ (T + h) \\ F_\infty(u) &:= T_\infty^{-1} \circ P_\infty u \circ (T + h) - T_\infty^{-1} \circ P_\infty G(u) \circ (T + h) = P_\infty u \end{aligned}$$

Nach der Proposition 6 induziert die Zerlegung $E = E_0 \oplus E_\infty$ die Zerlegung $B = B_0 \oplus B_\infty$ und für die Norm

$$\|u\|_B := \max\{\|P_0 u\|_\infty, \|P_\infty u\|_\infty\}$$

gilt

$$\frac{1}{2}\|u\|_\infty \leq \|u\|_B \leq \|u\|_\infty \ \ \forall\, u \in B$$

Also wird durch $F := F_0 + F_\infty$ eine Abbildung definiert, so dass $u = F(u) = \tilde{F}(u)$ gilt.
Für $u, v \in B,\ x \in E$ und $y := (T+h)^{-1}(x),\ z := (T+h)(x)$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\|F_0(u) - F_0(v)\|_\infty &= \|T_0P_0u(y) + P_0G(u) - T_0P_0v(y) - P_0G(v)\| \\
&\leq \|T_0\|\|P_0u(y) - P_0v(y)\| + \|P_0\|\|G(u) - G(v)\| \\
&\leq \alpha\|P_0(u(y) - v(y))\| + \\
&\quad \|g \circ (id+u)(y) - h(y) - g \circ (id+v)(y) + h(y)\| \\
&\leq \alpha\|P_0(u(y) - v(y))\| + \|g(y+u(y)) - g(y+v(y))\| \\
&\leq \alpha\|P_0(u(y) - v(y))\| + \lambda\|(y+u(y)) - (y+v(y))\| \\
&\leq \alpha\|P_0(u(y) - v(y))\| + \lambda\|u(y) - v(y)\| \\
&\leq \alpha\|P_0(u-v)\|_\infty + \lambda\|u-v\|_\infty
\end{aligned}$$

Analog gilt:

$$\begin{aligned}
\|F_\infty(u) - F_\infty(v)\|_\infty &= \|T_\infty^{-1}P_\infty u(z) - T_\infty^{-1}P_\infty G(u(z)) - T_\infty^{-1}P_\infty v(z) - T_\infty^{-1}P_\infty G(v(z))\| \\
&\leq \alpha\|P_\infty u(z) - P_\infty v(z)\| - \|G(u(z)) - G(v(z))\| \\
&\leq \alpha\|P_\infty(u(z) - v(z))\| - \|g(y+u(z(y))) - g(y+v(z(y)))\| \\
&\leq \alpha\|P_\infty(u-v)\|_\infty + \lambda\|u-v\|_\infty
\end{aligned}$$

Wir wollen die Supremumsnorm überführen in die B-Norm:

$$\begin{aligned}
\|F_0(u) - F_0(v)\|_\infty &\leq \alpha\|P_0(u-v)\|_\infty + \lambda\|P_0(u-v) + P_\infty(u-v)\|_\infty \\
&\leq (\alpha+\lambda)\|P_0(u-v)\|_\infty + \lambda\|P_\infty(u-v)\|_\infty \\
&\leq (\alpha+\lambda)\max\{\|P_0(u-v)\|_\infty, \|P_\infty(u-v)\|_\infty\} + \\
&\quad \lambda\max\{\|P_0(u-v)\|_\infty, \|P_\infty(u-v)\|_\infty\} \\
&= (\alpha+2\lambda)\|u-v\|_B
\end{aligned}$$

Analog gilt für F_∞:

$$\|F_\infty(u) - F_\infty(v)\| \leq (\alpha+2\lambda)\|u-v\|_B$$

Daraus folgt:

$$\|F(u) - F(v)\|_B \leq (\alpha+2\lambda)\|u-v\|_B$$

Wegen $\alpha + 2\lambda < \alpha + \min\{1-\alpha, \|T^{-1}\|^{-1}\} < 1$ ist die Fixpunktgleichung eine Kontraktion und damit folgt die Existenz eines eindeutigen Fixpunktes von F aus dem Banachschen Fixpunktsatz. □

4 Hartman-Grobman Theorem

Theorem 10. *Sei $\dot{x} = f(x)$ mit $f \in C^1$ ein nicht-lineares System mit dem Fluss ϕ_t und das lineare System $\dot{x} = Ax$ mit $A := Df(x_0)$ und x_0 ein kritischer Punkt. Wenn der erzeugte Fluss e^{tA} hyperbolisch ist, dann $\exists$ ein Homöomorphismus $H : U \to V$ (offen $U, V \subset E$) , so dass $\forall\, x \in U \; \exists\, I_0 \subset R$. Dann gilt $\forall\, t \in I_0$:*

$$H \circ \phi_t(x) = e^{tA} \circ H(x)$$

Literatur

[1] Amann, H.: Gewöhnliche Differenzialgleichungen 2.Auflage, de Gruyter

[2] Heinz, H.-P.: Skript Dynamische Systeme und Chaos, Uni Mainz SoSe 2012

[3] Teschl G.: Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems, AMS

[4] https://www.math.hmc.edu/~levy/181_web/Zimmerman_web.pdf, Zugriff 4.11.2014

[5] http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/inhalt/aussage/aussage1081/, Zugriff 4.11.2014