Ljapunovstabilität

Seminar zu ausgewählten Themen gewöhnlicher Differentialgleichungen und dynamischer Systeme

Patrick Bachmann

3. November 2014

Inhaltsverzeichnis

Im Folgenden werden diese Objekte verwendet:

1. $E = (E, |\cdot|)$, ein endlichdimensionaler Banachraum;
2. die offene Menge $D \subset E$;
3. das offene Intervall $J \subset \mathbb{R}$, wobei $\mathbb{R}_+ \subset J$;
4. $f \in \mathcal{C}^{0,1-}(J \times D, E)$ (f ist lokal Lipschitz-stetig in der zweiten Komponente);
5. $u \in \mathcal{C}^{1-}(D_f, D)$ (lokal Lipschitz-stetig) ist die Lösung des AWP

$$\dot{x} = f(t,x), \qquad x(\tau) = \xi, \qquad (\tau, \xi) \in J \times D \quad .$$

Inhaltsverzeichnis

Definition 1 (Ljapunovstabilität)

Sei $f(\cdot, x_0) = 0$. Dann ist die globale Lösung $u(x) \equiv x_0$ eine Lösung des AWP. Die Lösung x_0 heißt *Ljapunov-stabil*, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ und jedem $\tau \in J$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass

$$|u(t, \tau, \xi) - x_0| < \varepsilon, \qquad \forall t \in [\tau, t^+(\tau, \xi)), \quad \forall |\xi - x_0| < \delta \quad .$$

Dabei ist $t^+(\tau, \xi) = \sup\{t \in J \big| u(t, \tau, \xi) \in D\}$ (vgl. [4, Satz 9]). Wenn die Lösung x_0 nicht stabil ist, so ist sie *instabil* (im Sinne von Ljapunov).

Definition 2 (Attraktivität)

Die Lösung x_0 heißt *attraktiv*, wenn für alle $\tau \in J$ eine Umgebung W um x_0 existiert mit

$$\forall \xi \in W: \qquad t^+(\tau, \xi) = \infty \qquad \text{und} \qquad \lim_{t \to \infty} u(t, \tau, \xi) = x_0 \quad .$$

Definition 3 (Asymptotische Stabilität)

Ist die Lösung x_0 stabil und attraktiv, nennt man sie *asymptotisch stabil*.

Definition 4 (Gleichmäßigkeit)

1. Man spricht von *gleichmäßig stabil*, wenn δ nicht von $\tau \in J$ abhängt.
2. Die Lösung x_0 ist *gleichmäßig attraktiv*, wenn W unabhängig von $\tau \in J$ ist und $\lim_{t\to\infty} u(t,\tau,\xi)$ gleichmäßig bzgl. $(\tau,\xi) \in J \times W$ ist. Letzteres bedeutet in diesem Fall, $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists T > 0$:

$$|u(t,\tau,\xi) - x_0| < \varepsilon \qquad \forall t > \tau + T, \quad \forall (\tau,\xi) \in J \times W \quad .$$

3. Sind beide Eigenschaften erfüllt, spricht man von *gleichmäßig asymptotisch stabil*. [1]

Inhaltsverzeichnis

Es sollen nun Aussagen darüber getroffen werden, wann ein kritischer Punkt x_0 in einem dynamischen System stabil ist. Hierfür werden Dynamische Systeme betrachtet, die „annähernd linear“ sind, d.h., für die Differentialgleichung $\dot{x} = Ax + g(t,x)$ gilt $g(t,x) = o(|x|)$ für $x \to x_0$. Im Folgenden werden vorwiegend autonome Differentialgleichungen behandelt, da nicht-autonome Gleichungen durch Translation auf den autonomen Fall zurückgeführt werden können.

Inhaltsverzeichnis

Lemma 5 (Beschränktheitskriterium)

Es sei $A \in \mathscr{L}(E)$. Dann bleibt jede Lösung von $\dot{x} = Ax$ für $t \to \infty$ genau dann beschränkt, wenn gilt:

(i) $\operatorname{Re}\lambda \leq 0 \qquad \forall \lambda \in \sigma(A) \quad .$

(ii) *Jedes $\lambda \in \sigma(A)$ mit $\operatorname{Re}\lambda = 0$ ist ein halbeinfacher Eigenwert, d.h., seine geometrische ist gleich seiner algebraischen Vielfachheit.*

Beweis.

Es genügt, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ zu betrachten. Seien (i) und (ii) erfüllt. Dann wird jede Lösung u der Differentialgleichung eine Linearkombination von Funktionen der Form

$$t^n e^{\lambda t} y, \qquad \lambda \in \sigma(A), y \in E \quad .$$

Wegen (ii) gilt für alle λ mit $\operatorname{Re}\lambda = 0$, dass n=0. Damit ist u beschränkt. Andersherum existiert für jedes $\lambda \in \sigma(A)$ eine Lösung der Form

$$e^{\lambda t}(y_1 + ty_2 + ... + t^{n-1} y_n)$$

mit $y_1, ..., y_n \in \mathbb{C}^m$. Wäre λ nun nicht halbeinfach, so wäre n>1. Damit der Ausdruck aber auch für $\operatorname{Re}\lambda = 0$ beschränkt ist, muss $n \leq 1$ sein. □

Satz 6

Sei $A \in \mathscr{L}(E)$. Die Nulllösung der linearen Differentialgleichung $\dot{x} = Ax$ ist genau dann stabil, wenn

(i) $\operatorname{Re} \sigma(A) \leq 0$

(ii) *jedes $\lambda \in \sigma(A)$ mit $\operatorname{Re} \lambda = 0$ ein halbeinfacher Eigenwert ist.*

Die Nulllösung ist genau dann asymptotisch stabil, wenn $\operatorname{Re} \sigma(A) < 0$.

Beweis.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit genügt es, den Fall $\tau = 0$ zu betrachten (sonst setzt man $t_{neu} = t - \tau$, woraus $\tau_{neu} = 0$ folgt). Der Fluss wird folglich durch $e^{tA} \cdot \xi$ beschrieben. Sei

$$\alpha := \sup\{|e^{tA}| \big| t \in \mathbb{R}_+\} < \infty \quad . \tag{1}$$

Somit ist für $\varepsilon > 0$

$$|e^{tA} \cdot \xi| \leq |e^{tA}| \cdot |\xi| < \varepsilon \qquad \forall (\tau, \xi) \in \mathbb{R}_+ \times \mathrm{B}(0, \tfrac{\varepsilon}{\alpha}) \quad ,$$

d. h. die Nulllösung ist stabil.

Beweis.

Mit der Basis $\{x_1, ..., x_m\}$ von E ergibt sich folgende Zerlegung: $\xi = \sum_{i=1}^{m} \xi_i x_i$ und $e^{tA} \cdot \xi = \sum_{i=1}^{m} \xi_i e^{tA} x_i$. Um Ungleichung (1) erfüllen zu können, muss daher $e^{tA} x_i$ für alle $i = 1, ..., m$ beschränkt sein. Das genau dann der Fall, wenn jede Lösung von $\dot{x} = Ax$ beschränkt ist. Das wiederum ist äquivalent zu (i) und (ii), wie mit Lemma 5 folgt.

Beweis.

Für die Rückrichtung wird angenommen, dass (i) oder (ii) verletzt sind. Nach Lemma 5 folgt:

$$\exists x \in E : \qquad |e^{tA}x| \xrightarrow{t\to\infty} \infty \quad .$$

Dann wächst auch $|e^{tA}\varepsilon x|$ für jedes $\varepsilon > 0$ unbeschränkt und die Nulllösung ist instabil.

Die asymptotische Stabilität folgt, wenn man in einem analogen Beweis [5, Satz 1.1] verwendet. □

Satz 7

Gelte für $A \in \mathscr{L}(E)$, *dass* $\operatorname{Re}\sigma(A) < 0$. *Für* $g \in \mathcal{C}^{0,1-}(J \times D, E)$ *sei*

$$g(t,x) = o(|x|) \qquad \text{für} \qquad x \to 0 \qquad \text{und gleichmäßig in } t \in J. \tag{2}$$

Dann ist die Nulllösung der gestörten linearen Gleichung

$$\dot{x} = Ax + g(t,x)$$

gleichmäßig asymptotisch stabil.

Beweis.

Wir wissen wegen [5, Lemma 3.2] bereits, dass $\alpha, \beta > 0$ existieren, sodass

$$|e^{tA}| \leq \beta e^{-\alpha t} \qquad \forall t \geq 0 \quad .$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\beta > 1$. Sei außerdem u bereits eine Lösung des AWP

$$\dot{x} = Ax + g(t, x) \qquad u(\tau) = \xi \quad .$$

Durch die Anwendung der Variation der Konstanten auf die so erzeugte Differentialgleichung

$$\dot{x} = Ax + g(t, u(t))$$

erhält man die Integralgleichung

$$u(t) = e^{(t-\tau)A}\xi + \int_{\tau}^{t} e^{(t-s)A} g(s, u(s))\ ds \quad .$$

Beweis.

Die Lösung $u(t)$ ist daher beschränkt durch

$$
\begin{aligned}
|u(t)| &= |e^{(t-\tau)A}\xi + \int_\tau^t e^{(t-s)A} g(s, u(s))\, ds| \\
&\leq \beta e^{-\alpha(t-\tau)}|\xi| + \beta \int_\tau^t e^{-\alpha(t-s)} |g(s, u(s))|\, ds \qquad (3)
\end{aligned}
$$

für $\tau \leq t < t^+(t, \xi)$.
Wegen (2) kann für ein beliebiges $\varepsilon \in (0, \alpha)$ ein $\delta \in (0, \varepsilon)$ gefunden werden, sodass

$$
|g(t, x)| \leq (\tfrac{\varepsilon}{\beta})|x| \qquad \forall x : \; |x| \leq \delta, \quad \forall t \geq \tau \quad . \qquad (4)
$$

Beweis.

Für den nächsten Schritt wird benötigt, dass $|u(t)| < \delta$ für $|\xi| < \frac{\delta}{\beta}$ und $t \in [\tau, t^+(t,\xi))$. Der Beweis hierfür wird durch Widerspruch geführt. Man nehme an,

$$\exists(\xi, \bar{t}): \qquad \bar{t} = \inf\{t \in [\tau, t^+(t,\xi)) \big| |u(t)| = \delta\} \quad .$$

Einsetzen von (4) in (3) ergibt

$$|u(t)| \leq \delta e^{-\alpha(t-\tau)} + \varepsilon \int_\tau^t e^{-\alpha(t-s)} |u(s)| \, ds$$

bzw.

$$e^{\alpha t} |u(t)| \leq \delta e^{\alpha \tau} + \varepsilon \int_\tau^t e^{\alpha s} |u(s)| \, ds \quad .$$

Beweis.

Da beide Summanden rechts positiv sind, kann man durch die rechte Seite teilen und erhält nach Multiplikation mit ε

$$\frac{e^{\alpha t}|u(t)| \cdot \varepsilon}{\delta e^{\alpha \tau} + \varepsilon \int_\tau^t e^{\alpha s}|u(s)|\ ds} \leq \varepsilon \quad .$$

Beweis.

Wird diese Gleichung nach t integriert, kann man die Substitutionsregel anwenden:

$$\log(\delta e^{\alpha\tau} + \varepsilon \int_\tau^t e^{\alpha s}|u(s)|\ ds) - \log(\delta e^{\alpha\tau}) \leq \int_\tau^t \varepsilon\ dt = \varepsilon(t-\tau) \quad ,$$

so dass sich

$$e^{\alpha t}|u(t)| \leq \delta e^{\alpha\tau} + \varepsilon \int_\tau^t e^{\alpha s}|u(s)|\ ds \leq \delta e^{\alpha\tau} \cdot e^{\varepsilon(t-\tau)}$$

oder

$$|u(t)| \leq \delta e^{-\alpha(t-\tau)+\varepsilon(t-\tau)} = \delta e^{-(\alpha-\varepsilon)(t-\tau)} < \delta \tag{5}$$

ergibt.[3]

Beweis.

Setzt man jetzt $\bar{t}$ ein, hat man mit

$$\delta = |u(\bar{t})| < \delta$$

einen Widerspruch erzeugt.
Wegen (5) für alle $|\xi| < \frac{\delta}{\beta}$ und $t \in [\tau, t^+(t, \xi))$ ist die Nulllösung gleichmäßig attraktiv. $\square$

Lemma 8

Für $A \in \mathscr{L}(E)$ gelte

$$\alpha < \operatorname{Re}\sigma(A) < \beta$$

Dann existiert eine euklidische Norm $\|\cdot\|$ auf E, sodass für das Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ gilt

$$\alpha\|x\|^2 \leq \operatorname{Re}\langle Ax, x\rangle \leq \beta\|x\|^2 \qquad \forall x \in E.$$

Beweis.

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Analog zu [5, Lemma 3.2] kann A aufgeteilt werden in $A = D + N$ mit $D = \text{diag}[\mu_1, ..., \mu_m]$, wobei $\mu_1, ..., \mu_m$ die nach ihrer Vielfachheit geordneten Eigenwerte sind. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine euklidische Norm $\|\cdot\|$ mit $\|N\| \leq \varepsilon$. Wähle nun ein ε mit

$$\varepsilon \leq \min\{\beta - \max[\text{Re}\,\sigma(A)], \min[Re\sigma(A)] - \alpha\} \quad .$$

Bezeichne mit $x_1, ..., x_m$ die Basis zur Norm. Weiter ist $\langle Dx, x\rangle = \sum_{i=1}^{m} \mu_i |x_i|^2$. Daher folgt

$$\min[\text{Re}\,\sigma(A)]\|x\|^2 \leq \text{Re}\,\langle Dx, x\rangle \leq \max[\text{Re}\,\sigma(A)]\|x\|^2 \quad . \tag{6}$$

Beweis.

Jetzt lässt sich mit $\operatorname{Re}\langle Ax, x\rangle = \operatorname{Re}\langle Dx, x\rangle + \operatorname{Re}\langle Nx, x\rangle$ und $\operatorname{Re}\langle Nx, x\rangle \leq \|N\|\|x\|^2 \leq \varepsilon\|x\|^2$ die Abschätzung

$$\operatorname{Re}\langle Dx, x\rangle - \varepsilon\|x\|^2 \leq \operatorname{Re}\langle Ax, x\rangle \leq \operatorname{Re}\langle Dx, x\rangle + \varepsilon\|x\|^2$$

herleiten. Wegen (6) und der Wahl von ε ist nun

$$\alpha\|x\|^2 \leq \min[\operatorname{Re}\sigma(A)]\|x\|^2 - \varepsilon\|x\|^2 \leq \operatorname{Re}\langle Dx, x\rangle - \varepsilon\|x\|^2 \leq \operatorname{Re}\langle Ax, x\rangle$$

bzw.

$$\operatorname{Re}\langle Ax, x\rangle \leq \operatorname{Re}\langle Dx, x\rangle + \varepsilon\|x\|^2 \leq \max[\operatorname{Re}\sigma(A)]\|x\|^2 + \varepsilon\|x\|^2 \leq \beta\|x\|^2 \quad .$$

Es verbleibt der Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Durch Komplexifizierung kann der reelle Fall auf den komplexen zurückgeführt werden. Sei also $A_{\mathbb{C}}$ in $E_{\mathbb{C}}$. Die Hilbertnorm $\|\cdot\|_{\mathbb{C}}$ induziert eine Hilbertnorm $\|\cdot\|$ auf E (vgl. [5, Lemma 3.2]).

Beweis.

Da für die Skalarprodukte gilt:

$$\operatorname{Re}\langle \xi, \eta \rangle_{\mathbb{C}} = \tfrac{1}{4}(\|\xi+\eta\|_{\mathbb{C}}^2 - \|\xi-\eta\|_{\mathbb{C}}^2) \qquad \forall \xi, \eta \in E_{\mathbb{C}}$$

und

$$\langle x, y \rangle = \tfrac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) \qquad \forall x, y \in E \quad .$$

Nach Zusammensetzen folgt

$$\alpha\|x\|^2 = \alpha\|x\|_{\mathbb{C}}^2 \leq \operatorname{Re}\langle A_{\mathbb{C}}x, x\rangle_{\mathbb{C}} = \langle Ax, x\rangle \leq \beta\|x\|_{\mathbb{C}}^2 = \beta\|x\|^2 \qquad \forall x \in E.$$

□

Satz 9

Der Operator $A \in \mathscr{L}(E)$ habe einen Eigenwert mit positivem Realanteil. Es existiere wieder ein $g \in \mathcal{C}^{0,1-}(J \times D, E)$ mit

$$g(t,x) = \mathrm{o}(|x|) \qquad \text{für} \qquad x \to 0 \qquad \text{und gleichmäßig in } t \in J. \tag{7}$$

Dann ist die Nulllösung der gestörten linearen Gleichung

$$\dot{x} = Ax + g(t,x)$$

instabil.

Inhaltsverzeichnis

In diesem Satz werden nun alle bisherigen Ergebnisse zusammengefasst.

Satz 10

Sei $f \in \mathcal{C}^1(D, E)$ *mit* $f(x_0) = 0$*. Gilt dann*

$$\operatorname{Re} \sigma(Df(x_0)) < 0 \quad ,$$

so ist der kritische Punkt x_0 *der autonomen Differentialgleichung* $\dot{x} = f(x)$ *asymptotisch stabil. Ist*

$$\sigma(Df(x_0)) \cap \{z \in \mathbb{C} \,|\, \operatorname{Re} z > 0\} \neq \emptyset \quad ,$$

so ist x_0 *instabil.*

Beweis.

Sei $A := Df(x_0) \in \mathscr{L}(E)$ und $g(y) := f(y + x_0) - Df(x_0) \cdot y$. Wegen

$$\lim_{y \to 0} \left| \frac{g(y)}{|y|} \right| = \lim_{y \to 0} \frac{|f(y + x_0) - Df(x_0) \cdot y|}{|y|} = \lim_{y \to 0} \frac{|f(y + x_0) - f(x_0) - Df(x_0) \cdot y|}{|y|},$$

der Differenzierbarkeit von f und der Definition der Jacobimatrix folgt das Grenzverhalten $\lim_{y \to 0} \left| \frac{g(y)}{|y|} \right| = 0$. Also gilt $g(y) = o(|y|), \ y \to 0$. Dann ist

$$\dot{y} = f(y + x_0) = Ay + g(y)$$

Mit den Sätzen 7 und 9 folgt direkt die Behauptung. □

Literatur

Wikipedia - Lyapunov stability.
http://en.wikipedia.org/wiki/Lyapunov_stability.
Version: September 2014, Abruf: 8. September 2014

Amann, H. :
Gewöhnliche Differentialgleichungen.
New York : Walter de Gruyter, 1995

Cesari, L. :
Asymptotic behavior and stability problems in ordinary differential equations.
Berlin ; Heidelberg [u.a.] : Springer, 1971

Dosch, T. :
Vortrag Differentialgleichungen, Dynamische Systeme, Flüsse und Vektorfelder.
http://analysis.math.uni-mannheim.de/lehre/hs1415/dglsem/skript/dosch_ausarbeitung.pdf.
Version: 2014

Nguyen, V. H.:
Hyperbolische lineare Flüsse.
http://analysis.math.uni-mannheim.de/lehre/hs1415/dglsem/skript/van_hoan_nguyen_ausarbeitung.pdf.
Version: 2014

Der Vortrag orientiert sich im Wesentlichen an *Gewöhnliche Differentialgleichungen* von Herbert Amann.