Vortag Differentialgleichungen, Dynamische Systeme, Flüsse und Vektorfelder

Tatjana Dosch

6.10.2014

Inhaltsverzeichnis

1 Vorwort

Eine Differentialgleichung ist eine Gleichung für eine gesuchte Funktion, in der auch Ableitungen dieser Funktion vorkommen. Diese Funktion kann von einer oder mehreren Variablen abhängen. Differentialgleichungen haben viele verschiedene Anwendungsbereiche. Hier sind ein paar Beispiele:
-Populationsmodelle
-Räuber-Beute-Modelle
-Klassische Mechanik
Es gibt mehrere Typen von Differentialgleichungen. Für uns sind hauptsächlich die gewöhnlichen Differentialgleichungen von Bedeutung. Was bedeutet das? Sie hängen nur von *einer* Variablen ab!

2 Gewöhnliche Differentialgleichungen

2.1 Definition

Definition 1. *Differentialgleichungen von der Form*

$$q^{(k)}(t) = F(q^{(k-1)}(t), ..., \dot{q}(t), q(t), t)$$

heißen gewöhnliche Differentialgleichungen.

2.2 Wichtige Begriffe rund um die gewöhnlichen Differentialgleichungen

Definition 2. *(Ordnung einer Differentialgleichung) Die Ordnung einer Differentialgleichung ist die höchste vorkommende Ordnung aller auftauchenden Ableitungen einer Differentialgleichung.*

Definition 3. *(Lösung einer Differentialgleichung) Eine Lösung ist eine Funktion q, die so oft differenzierbar ist, dass alle in der Differentialgleichung vorkommenden Ableitungen existieren, und die zusammen mit diesen Ableitungen die Differentialgleichung erfüllt.*

Definition 4. *(Anfangswertproblem) Die Suche nach einer Lösung q einer gewöhnlichen Differentialgleichung der Ordnung n, die an einem Wert t_0 der Variablen t (nach der abgeleitet wird) zusammen mit den ersten $n-1$ Ableitungen die Werte*

$$q(t_0) = q_0, \frac{dq}{dt}(t_0) = q_1, ..., \frac{d^{n-1}u}{dt^{n-1}}(t_0) = q_{n-1}$$

annimmt, heißt Anfangswertproblem.

Die Funktion, die man sucht, ist $t \mapsto q(t)$. Sie kann gar vektorwertig sein.

Mit dem Anfangswertproblem muss man sich nun einige Fragen bezüglich der Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung stellen: Wann gibt es Lösungen bzw. sind diese immer eindeutig? Im Folgenden sind einige Sätze zur Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen von gewöhnlichen Differentialgleichungen aufgeführt, die bei der Beantwortung dieser Fragen helfen können.

2.3 Sätze zu Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen von gewöhnlichen Differentialgleichungen

Satz 5. ***Banachscher Fixpunktsatz*** *Gegeben seien ein vollständiger metrischer Raum X und eine lipschitzstetige Abbildung $f : X \to X$ mit Lipschitzkonstante $L < 1$. Somit gilt für alle $x, y \in X : d(f(x), f(y)) \leq Ld(x, y)$.*
Dann besitzt f genau einen Fixpunkt $x \in X$ mit $f(x) = x$. Des weiteren konvergiert für jedes $x_0 \in X$ die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_{n+1} = f(x_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gegen den Fixpunkt. [1]

Beweis:
(i) Nutze Lipschitzstetigkeit:
Wegen der Voraussetzungen des Satzes ist f lipschitzstetig. Deswegen darf man folgendes bilden: $d(f^n(x), f^n(y)) \leq L^n d(x, y)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x, y \in X$. f^n bedeutet $f \circ f \circ \cdots \circ f$ (n-malige Verknüpfung von f). Eine Verknüpfung ändert nichts an der Lipschitzstetigkeit.
(ii) Dreiecksungleichung:
Man benutzt nun die Dreiecksungleichung, also die dritte Eigenschaft der Metrik (Fußnote 1). Damit darf man dann für alle $m > n \in \mathbb{N}$ folgendes bilden:

$$\begin{aligned} d(f^m(x_0), f^n(x_0)) \quad &\leq \textstyle\sum_{l=n}^{m-1} d(f^{l+1}(x_0), f^l(x_0)) \quad &&\leq \textstyle\sum_{l=n}^{m-1} L^l d(f(x_0), x_0) \\ &= (1 - L^{m-n}) \tfrac{L^n}{1-L} d(f(x_0), x_0) \quad &&\leq \tfrac{L^n}{1-L} d(f(x_0), x_0). \end{aligned}$$

(iii) Konvergenz der Cauchyfolge und Stetigkeit:
Die Lipschitzkonstante ist nach Voraussetzung $0 < L < 1$, somit konvergiert $\frac{L^n}{1-L} d(f(x_0), x_0)$ gegen Null und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge.[2] Wie in der Fußnote erwähnt, konvergiert diese Folge, da es sich nach Voraussetzung um einen vollständigen metrischen Raum handelt. Da f lipschitzstetig ist, also insbesondere stetig, gilt dann

$$f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Der Grenzwert ist also ein Fixpunkt von f.
(iv) Eindeutigkeit des Fixpunktes:
Beachtet man noch die Lipschitzstetigkeit von f, so ergibt sich, dass der Abstand von zwei Fixpunkten kleiner oder gleich dem L-fachen Abstand sein muss, also

---

[1] Zur Erinnerung:
-Lipschitzstetigkeit:
Eine Abbildung $f : X \to Y, x \mapsto f(x) (X, Y \subset \mathbb{R}$ oder $X, Y \subset \mathbb{C})$ heißt lipschitzstetig auf einer Teilmenge $A \subset X$, wenn es eine Konstante $L > 0$ (die Lipschitzkonstante) gibt, sodass $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ für alle $x, y \in A$ gilt.
-Die Funktion $d(f(x), f(y))$:
Die zweiargumentige Funktion d bezieht sich auf die Metrik („die Abstandsfunktion") des metrischen Raumes X. Sie ist eine Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto d(x, y)$ auf einer Menge X. Sie hat drei Eigenschaften:
(i) $d(x, y) \geq 0$ für alle $x, y \in X$ und $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
(ii) $d(x, y) = d(y, x)$
(iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ für alle $x, y, z \in X$

[2] Zur Erinnerung:
-Cauchyfolge:
Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt Cauchyfolge, wenn es für jedes $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $d(x_n, x_m) < \epsilon$ für alle $n, m \geq N$ gilt.
Cauchyfolgen konvergieren immer in einem vollständigen metrischen Raum.

$d(x,y) <= Ld(x,y)$. Subtrahiert man den Wert auf der rechten Seite, ist somit der $(1-L)$-fache Abstand kleiner oder gleich Null. L ist aber echt kleiner 1, daher ist der Abstand nicht positiv, sondern gleich Null (negativer Abstand existiert nach Definition nicht) und beide Fixpunkte stimmen somit überein (wegen der ersten Eigenschaft der Metrik). **q.e.d.**

Satz 6. ***Lokale Existenz und Eindeutigkeit oder Satz von Picard-Lindelöf***
Gegeben seien ein offenes Intervall I, eine offene Teilmenge $U \subset V$ eines Banachraums V und eine stetige Abbildung $f : I \times U \to V$. f ist bezüglich der zweiten Variablen lokal lipschitzstetig. Dies bedeutet, dass es für jedes $(t_0, q_0) \in I \times U$ ein $\delta > 0$ und ein $L > 0$ gibt, sodass für alle (t,q), $(t,\widetilde{q}) \in (t_0-\delta, t_0+\delta) \times B(q_0, \delta)$

$$||f(t,q) - f(t,\widetilde{q})|| \leq L||q - \widetilde{q}||$$

gilt.
Dann gibt es für jedes $(t_0, q_0) \in I \times U$ ein $\epsilon > 0$, sodass das Anfangswertproblem $\dot{q}(t) = f(t, q(t))$ mit $q(t_0) = q_0$ auf $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$ genau eine Lösung besitzt. [3]

Vor dem Beweis noch die benötigte Definition der lokalen Lipschitzstetigkeit:

Definition 7. *Eine Funktion f von einem metrischen Raum X in den metrischen Raum Y heißt lokal lipschitzstetig, wenn es für jedes $x_0 \in X$ eine Umgebung $U \subset X$ von x_0 gibt und eine Lipschitzkonstante $L > 0$, sodass für alle $x, x' \in U$ gilt:*

$$d(f(x), f(x')) \leq Ld(x, x')$$

Beweis:
(i) Nutze lokale Lipschitzstetigkeit:
Da wir diese vorausgesetzt haben, gilt dann $||f(t,q) - f(t,\widetilde{q})|| \leq L||q - \widetilde{q}||$ für alle $(t,q), (t,\widetilde{q}) \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times \overline{B(q_0, \delta)}$ mit den passenden $\delta > 0$ und $L > 0$. Da f zudem auch stetig ist, gilt des weiteren, dass die folgende Abbildung auch stetig ist: $F(q)(t) = q_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, q(s))ds$. Sie geht von $C([t_0 - \delta, t_0 + \delta], \overline{B(q_0, \delta)})$ nach $C([t_0 - \delta, t_0 + \delta], V)$.
(ii) Bildbereich von F genauer bestimmen:
Wir möchten am Ende den Banachschen Fixpunktsatz anwenden, daher müssen wir den Bildbereich genauer bestimmen, da der Banachsche Fixpunktsatz eine Abbildung eines vollständigen metrischen Raums auf sich selbst benötigt. Hierzu setze man

$$||f(\cdot, q_0)||_\infty = \sup_{s \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]} ||f(s, q_0)||.$$

Wenn es gilt, dass $\epsilon \leq \delta$ und $\epsilon(||f(\cdot, q_0)||_\infty + L\delta) \leq \delta$, dann ist für alle $q \in C([t_0 - \delta, t_0 + \delta], \overline{B(q_0, \delta)})$

$$||F(q) - q_0||_\infty \leq \left\| \int_{t_0}^{t} (f(s, q_0) + f(s, q(s)) - f(s, q_0))ds \right\| \leq \epsilon(||f(\cdot, q_0)||_\infty + L\delta) \leq \delta.$$

Daraus ergibt sich, dass F den vollständigen metrischen Raum $C([t_0 - \delta, t_0 + \delta], \overline{B(q_0, \delta)})$ wieder auf ihn selbst abbildet.

[3] Zur Erinnerung:
-Banachraum:
Ein vollständiger normierter Vektorraum heißt Banachraum.
-Vollständig:
Ein metrischer Raum (X, d) heißt vollständig, wenn jede Cauchyfolge konvergiert.

(iii) Lipschitzstetigkeit der Abbildung F:
Für $q, \widetilde{q} \in C([t_0 - \delta, t_0 + \delta], \overline{B(q_0, \delta)})$ gilt

$$||F(q) - F(\widetilde{q}||_\infty \leq \int_{t_0}^{t} ||f(s, q(s) - f(s, \widetilde{q}(s))||ds \leq \epsilon L ||q - \widetilde{q}||_\infty.$$

Man konstruiere nun ϵ geschickt anhand der Ungleichung, die wir für die Bildbereichsbestimmung nutzten:
$\epsilon < \min \left\{ \delta, \frac{\delta}{||f(\cdot, q_0)||_\infty + L\delta}, \frac{1}{L} \right\} = \min \left\{ \delta, \frac{\delta}{||f(\cdot, q_0)||_\infty + L\delta} \right\}$
Die obig genannte Abbildung F ist so lipschitzstetig mit $\epsilon \cdot L < 1$.
(iv) Differenzierbarer Fixpunkt:
Jeder Fixpunkt ist auf $t \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$ differenzierbar [4] und bietet für das im Satz genannte Anfangswertproblem die Lösung $q(t_0) = q_0$. Betrachte man es nun umgekehrt: q löst demnach das Anfangswertproblem auf $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$. Daraus folgt wiederum, dass $F(q)$ und q die gleichen Ableitungen haben müssen, sowie die gleichen Funktionswerte bei $t = t_0$. Daraus folgt, dass die Funktionen übereinstimmen. Außerdem ist jede Lösung des Anfangswertproblems ein Fixpunkt von F.
(v) Banachscher Fixpunktsatz:
Durch den schon gezeigten Banachschen Fixpunktsatz folgt schlussendlich die Existenz und Eindeutigkeit des Anfangswertproblems (auf $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$). **q.e.d.**

Satz 8. *Gegeben seien ein offenes Intervall I, eine offene Teilmenge $U \subset V$ eines Banachraums V und eine stetige Abbildung $f : I \times U \to V$. Diese soll partiell nach q r-mal stetig differenzierbar sein mit $r \in \mathbb{N}$.*
Dann gibt es für alle $(t_0, q_0) \in I \times U$ eine offene Umgebung W von q_0 in V, $\epsilon > 0$ und eine r-mal stetig differenzierbare Funktion $g : W \to C([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], V)$, sodass für $q_1 \in W$ die Funktion $g(q_1)$ die eindeutige Lösung des folgenden Anfangswertproblems ist:
$\frac{dq}{dt}(t) = f(t, q(t))$ *für alle* $t \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$ *mit* $q(t_0) = q_1$. [5]

Beweis:
(i) Satz der impliziten Funktion/Schrankensatz: [6]
$\frac{\partial f}{\partial q}$ ist stetig, deswegen gibt es ein $\delta > 0$, sodass U den abgeschlossenen Ball $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times \overline{B(q_0, \delta)}$ enthält und $\frac{\partial f}{\partial q}$ auf $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times \overline{B(q_0, \delta)}$ beschränkt ist mit einem Wert L. Aufgrund des Schrankensatzes ist dann f auf $[t_0 - \delta, t_0 +$

[4] Dies liegt an einem zusätzlichen Satz, dem Satz 1.20 aus dem Skript „Dynamische Systeme“, Martin U. Schmidt. Seine Aussage:
Für eine einfache Funktion $f \in B([a, b], V)$ ist $F : [a, b] \to V$ mit $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ stetig und überall dort, wo f stetig ist, differenzierbar mit $F'(t) = f(t)$. (Beweis: Siehe Skript)

[5] Zur Erinnerung:
-Stetige Differenzierbarkeit:
Eine Abbildung f von einer offenen Teilmenge U eines normierten Vektorraums X in einen normierten Vektorraum Y heißt stetig differenzierbar, wenn
(i) f in allen $x_0 \in U$ differenzierbar ist, und
(ii) die Abbildung $f' : U \to L(X, Y), x \mapsto f'(x)$ stetig ist.
-Partielle Ableitung:
Sei f eine Funktion von einer offenen Teilmenge $U \subset X_1 \times X_2$ des kartesischen Produktes der normierten Vektorräume X_1 und X_2 in den normierten Vektorraum Y. Dann heißt f im Punkt $(x_1, x_2) \in U \subset X_1 \times X_2$ partiell differenzierbar, falls die Abbildung $x \mapsto f(x, x_2)$ im Punkt $x = x_1$, und die Abbildung $x \mapsto f(x_1, x)$ im Punkt $x = x_2$ differenzierbar ist.

[6] Für die konkreten Aussagen des Satzes der impliziten Funktion siehe Korollar 11.11 in Skript „Analysis I/II“, Martin U. Schmidt. Der Schrankensatz ist dort Korollar 10.6.

$\delta] \times \overline{B(q_0,\delta)}$ für festes t in q dann gar lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante $L > 0$. Man setze $0 < \epsilon < \min\left\{\delta, \frac{1}{L}\right\}$, dies kann man mit dem Beweis des Satzes der lokalen Existenz und Eindeutigkeit vergleichen. Dann erhält man eine stetige Abbildung durch

$$F : V \times C([t_0-\epsilon, t_0+\epsilon], \overline{B(q_0,\delta)}) \to C([t_0-\epsilon, t_0+\epsilon], V), (q_1, q) \mapsto F(q_1, q)$$

$$\mathit{mit}\ F(q_1,q)(t) = q_1 + \int_{t_0}^{t} f(s, q(s))ds$$

(ii) Bilde die partiellen Ableitungen:
Man benötigt nun die partielle Ableitung $\frac{\partial F(q_1,q)}{\partial q}$. Diese sieht wie folgt aus:

$$\frac{\partial F(q_1,q)}{\partial q} : C([t_0-\epsilon, t_0+\epsilon], V) \to C([t_0-\epsilon, t_0+\epsilon, V), z \mapsto \frac{\partial F(q_1,q)}{\partial q}(z)$$

$$\mathit{mit}\ \frac{\partial F(q_1,q)}{\partial q}(z)(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{\partial f(s,q(s))}{\partial q}(z(s))ds.$$

(iii) Beschränktheit/Konvergenz/Neumannsche Reihe:
Die Ableitungen $\frac{\partial f(s,q(s))}{\partial q}$ sind genauso wie f durch L beschränkt. Dies bedeutet für die Ableitungen $\frac{\partial F(q_1,q)}{\partial q}$, dass diese durch $L\epsilon < 1$ beschränkt sind. Die Neumannsche Reihe [7]

$$\left(\mathbb{1}_{C([t_0-\epsilon,t_0+\epsilon],V)} - \frac{\partial F(q_1,q)}{\partial q}\right)^{-1} = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{\partial F(q_1,q)}{\partial q}\right)^{l}$$

konvergiert für $q_1 \in V$ und $q \in C([t_0-\epsilon, t_0+\epsilon], B(q_0,\delta))$ in $\mathcal{L}(C([t_0-\epsilon, t_0+\epsilon], V))$ gegen $\left(\mathbb{1}_{C([t_0-\epsilon,t_0+\epsilon],V)} - \frac{\partial F(q_1,q)}{\partial q}\right)^{-1}$. Hier sei noch erwähnt, dass die Funktion $\mathbb{1}$ die Identität eines Raumes ist, d.h. jedes Element wird auf sich selbst abgebildet.
(iv) Punktweise Differenz:
Man bilde nun die punktweise Differenz von F für $q_1, q_2 \in V$, das ergibt dann offenbar die konstante Abbildung $F(q_1,q) - F(q_2,q) = q_1 - q_2$. Deswegen ist für jedes $q \in C([t_0-\epsilon, t_0+\epsilon], B(q_0,\delta))$ die Abbildung $q_1 \mapsto F(q_1,q)$ eine glatte, also eine stetig differenzierbare Abbildung von V nach $C([t_0-\epsilon, t_0+\epsilon], V)$. Somit ist die Abbildung

$$G : V \times C([t_0-\epsilon, t_0+\epsilon], B(q_0,\delta)) \to C([t_0-\epsilon, t_0+\epsilon], V)$$

$$(q_1, q) \mapsto \left(\mathbb{1}_{C([t_0-\epsilon,t_0+\epsilon],B(q_0,\delta))} - F(q_1,q)\right) = q - F(q_1,q)$$

eine stetig differenzierbare Abbildung und hat eine invertierbare partielle Ableitung nach $q \in C([t_0-\epsilon, t_0+\epsilon], B(q_0,\delta))$ auf dem gesamten Definitionsbereich.
(v) Satz der impliziten Funktion:
Das Urbild der $0 \in C(I,V)$ besteht genau aus den Fixpunkten der Abbildungen

[7] Zur Erinnerung:
-Satz zur Neumannsche Reihe:
Sei V ein Banachraum und $A \in \mathcal{L}(V)$ ein Operator mit $||A|| < 1$. Dann ist $\mathbb{1} - A$ invertierbar und es gilt $(\mathbb{1} - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$.
(Zum Beweis siehe „Analysis I/II", Martin U. Schmidt, HS2013/FS2014, Satz 9.63)

$q \mapsto F(q_1, q)$. Aus dem Satz der impliziten Funktion lässt sich dann schließen, dass eine stetig differenzierbare Abbildung g von einer Umgebung W von $q_0 \in V$ auf die entsprechenden Fixpunkte der Abbildungen $q \mapsto F(q_1, q)$ gibt. Diese Abbildung kann man genauso oft stetig differenzieren wie G.
(vi) Glatte Funktionen:
Das Integral von t_0 nach t ist eine lineare stetige und Abbildung von $C([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], V)$ auf sich selbst. Aus linear und stetig folgt, dass sie glatt ist. Das bedeutet für die partiellen Ableitungen von G nach q, dass sie bis zur selben Ordnung stetig sind, bis zu der auch die partiellen Ableitungen von f nach q stetig sind. Also ist G und genauso die Abbildung g auf die Lösung des jeweiligen Anfangswertproblems r-mal stetig differenzierbar. **q.e.d.**

Satz 9. ***Globale Existenz und Eindeutigkeit*** *Gegeben seien eine offene Teilmenge $O \subset \mathbb{R} \times V$ und eine stetige Abbildung $f : O \to V$, die wie bei der lokalen Existenz und Eindeutigkeit lokal lipschitzstetig ist.*
Dann gibt es für jedes $(t_0, q_0) \in O$ genau ein maximales Intervall $(a, b) \subset \mathbb{R}$, das t_0 enthält, und auf dem das Anfangswertproblem

$$\dot{q}(t) = f(t, q) \text{ mit } q(t_0) = q_0$$

genau eine Lösung q enthält. Das Intervall ist in dem Sinne maximal, dass an beiden Rändern, also bei a und b, eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:
(i) $a = -\infty$ *(bzw. $b = \infty$)*
(ii) $t \mapsto ||f(t, q(t))||$ *ist für alle $\epsilon > 0$ auf $(a, a+\epsilon)$ (bzw. $(b-\epsilon, b)$) unbeschränkt.*
(iii) *Die Lösung q lässt sich stetig auf $[a, b)$ (bzw. $(a, b]$) fortsetzen, der Graph der Fortsetzung liegt aber nicht in O, d.h. $\lim_{t\downarrow a}(t, q(t)) \notin O$ (bzw. $\lim_{t\uparrow b}(t, q(t)) \notin O$).*

Beweis:
(i) Fortsetzung auf einem Intervall:
Wir benötigen ein Intervall (a, b), das t_0 enthält und eine Lösung $\widetilde{q}$ auf dem Anfangswertproblem $\dot{q}(t) = d(t, q(t))$ *mit* $q(t_0) = q_0$ besitzt. Dies soll so verträglich gestaltet sein, dass die Lösung $\widetilde{q}$ sich auf $[a, b)$ oder $(a, b]$ stetig fortsetzen lässt, sowie ist es wichtig, dass der Graph der Fortsetzung in O liegt. Mit diesen Voraussetzungen bildet sich ein neues Anfangswertproblem $\dot{q}(t) = f(t, q(t))$ mit $q(a) = \lim_{t\to a+} \widetilde{q}(t)$ bzw. $q(b) = \lim_{t\to b-} \widetilde{q}(t)$.
(ii) Satz der lokalen Existenz und Eindeutigkeit:
Dieses besitzt aufgrund des Satzes der lokalen Existenz und Eindeutigkeit eine Lösung in einer Umgebung von a bzw. b. Wenn man den Beweis des Satzes der lokalen Existenz und Eindeutigkeit verfolgt, sieht man, dass auf $[a, a + \epsilon)$ bzw. $(b - \epsilon, b]$ dieses Anfangswertproblem eine eindeutige Lösung hat: $\widetilde{q}$. Somit gibt es ein maximales Intervall (a, b), auf dem das Anfangswertproblem eindeutig lösbar ist.
(iii) Betrachtung der Bedingungen:
Wenn a bzw. b die erste und die zweite Bedingung des Satzes nicht erfüllen, dann ist die Ableitung der Lösung auf einer Menge $(a, a+\epsilon)$ bzw. $(b-\epsilon, b)$ beschränkt, wobei die Lösung dort lipschitzstetig ist. Für jede Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegen a bzw. b konvergiert, so konvergiert $((t_n, q(t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R} \times V$. Der Grenzwert ist aber nicht in der Menge O, ansonsten würde die Lösung eine Fortsetzung auf einer Umgebung von a bzw. b haben, was nicht funktioniert, da man nur eine stetige Fortsetzbarkeit zum Rand a bzw. b hat. **q.e.d.**

Satz 10. ***Satz von Peano*** *Gegeben seien ein offenes Intervall I und eine offene Teilmenge $U \subset V$ eines endlichdimensionalen Banachraumes V und eine stetige Abbildung $f : I \times U \to V$.*
Dann gibt es für jedes $(t_0, q_0) \in I \times U$ ein $\epsilon > 0$ und auf $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \subset I$ eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{q}(t) = f(t, q(t)) \text{ mit } q(t_0) = q_0.$$

Beweis:
(i) Kompakte Mengen:
Für jedes $(t_0, q_0) \in I \times U$ gibt es ein $\epsilon > 0$ und $\delta > 0$, sodass

$$[t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon] \times \overline{B(q_0, \delta)} \subset I \times U,$$

d.h. man bildet ein abgeschlossenes Intervall um t_0 mittels ϵ und den Abschluss des offenen Balls um q_0 mittels δ. Diese Menge ist kompakt. Auf ihr ist dann f beschränkt durch $||f||_\infty < \infty$. Verringere notfalls ϵ, damit $||f||_\infty \cdot \epsilon \leq \delta$ erfüllt ist.
(ii) Bilde eine eine endliche Partition:
Man zerlege nun das Intervall $[t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$ in endlich viele abgeschlossene Teilintervalle. Solch eine Partition P sieht dann so aus:

$$[t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon] = [t_{-M}, t_{1-M}] \cup ... \cup [t_{-1}, t_0] \cup [t_0, t_1] \cup ... \cup [t_{N-1}, t_N]$$

mit $t_0 - \epsilon = t_{-M} < t_{1-M} < ... < t_{-1} < t_0 < t_1 < ... < t_{N-1} < t_N = t_0 + \epsilon$. Zu beachten ist noch, dass t_0 als Anfangs- und Endpunkt jeweils eines Teilintervalls vorkommt. Damit kann man nun wie folgt eine Näherungslösung q_P der Differentialgleichung definieren: Auf den Intervallen $[t_{-m}, t_{1-m}]$ definieren wir q_P induktiv für $m = 1, ..., m = M$ dadurch, dass jeweils der Wert bei t_{1-m} für $m = 1$ gleich q_0 ist, d.h. $q_P(t_0) = q_0$, und für $m > 1$ gleich dem Wert $q_P(t_{1-m})$ von dem schon definierten q_P bei t_{1-m} ist. Die Ableitung ist jeweils konstant gleich $f(t_{m-1}, q_P(t_{1-m}))$.
(iii) Konstruiere daraus die Lösung neu:
Die Lösung müssen wir jetzt genauso induktiv definieren und zwar auf den Intervallen $[t_{n-1}, t_n]$ für $n = 1, ..., n = N$. Dies geschieht so, dass jeweils der Wert bei t_{n-1} für $n = 1$ gleich q_0 ist und für $n > 1$ gleich dem Wert $q_P(t_{n-1})$ von dem schon definierten q_P bei t_{n-1} ist. Die Ableitung jeweils konstant gleich $f(t_{n-1}, q_P(t_{n-1}))$ ist. Somit ein völlig analoger Aufbau. Nun benutzt man, dass $||f||_\infty \cdot \epsilon \leq \delta$ gilt und dass f auf $[t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon] \times \overline{B(q_0, \delta)}$ beschränkt ist durch $||f||_\infty$. Das hat nämlich zur Folge, dass dann alle Werte von q_P in $\overline{B(q_0, \delta)}$ liegen.
(iv) Folgen von Partitionen und deren Teilfolgen:
Man nun setze eine Folge von Partitionen $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$, deren maximale Intervalllängen eine Nullfolge bilden. Wir möchten nun beweisen, dass eine Teilfolge der entsprechenden Folge $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Näherungslösungen gegen eine Lösung des Anfangswertproblems konvergiert. Dafür brauchen wir den Satz von Arzela-Ascoli.

(v) Satz von Arzela-Ascoli: [8]
Die Folge $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erfüllt die Voraussetzungen des Satzes von Arzela-Ascoli, d.h. sie ist allgemein gesagt in einem Raum $C(K,V)$ von einem kompakten metrischen Raum K und einem endlichdimensionalen Banachraum V. Darum konvergiert eine Teilfolge von $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $[t_0-\epsilon,t_0+\epsilon]$ gegen eine stetige Funktion q, die bei t_0 gleich q_0 ist.
(vi) Gleichmäßige Stetigkeit und Riemann-Integral:
Die Funktion f ist auf der kompakten Teilmenge $[t_0-\epsilon,t_0+\epsilon]\times\overline{B(q_0,\delta)}$ stetig, das bedeutet zugleich, dass sie gleichmäßig stetig ist. Somit konvergiert auch die Folge von Funktionen $t\mapsto f(t,q_n(t))$ auf $[t_0-\epsilon,t_0+\epsilon]$ gleichmäßig gegen die stetige Funktion $t\mapsto f(t,q_n(t))$, die dann auch Riemann-integrabel ist. Jedes wie oben definierte P definiert auch eine Partition des Intervalls $[t_0,t]$ bzw. $[t,t_0]$ für alle $t\in[t_0-\epsilon,t_0+\epsilon]$. Hierzu wähle man für all diese $t\in[t_0-\epsilon,t_0+\epsilon]$die Endpunkte der Intervalle einer solchen Partition des Intervalls $[t_0,t]$ bzw. $[t,t_0]$. Dann ist $q_P(t)-q_0$ gerade eine entsprechende Riemannsumme des Integrals $\int_{t_0}^t f(s,q_P(s))ds$. Die Differenz der Riemannsummen von zwei stetigen Funktionen auf $[t_0-\epsilon,t_0+\epsilon]$ ist beschränkt durch die Supremumsnorm der Differenz mal 2ϵ.
(vii) Kriterium von Riemann und gleichmäßige Konvergenz:
Aufgrund des Kriteriums von Riemann und der gleichmäßigen Konvergenz von $t\mapsto f(t,q_n(t))$ gegen $t\mapsto f(t,q(t))$ konvergiert $(q_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen

$$q_0+\int_{t_0}^t f(s,q(s))ds=\lim_{n\to\infty}q_n(t)=q(t)\ \textit{für alle}\ t\in[t_0-\epsilon,t_0+\epsilon].$$

Nun benötigt man noch den Satz 1.20 aus dem Skript „Dynamische Systeme“, Martin U. Schmidt, FSS11. [9] Wegen dieses Satzes ist q differenzierbar mit $\dot{q}(t)=f(t,q(t))$. Somit ist q die Lösung für das Anfangswertproblem mit $q(t_0)=q_0$.
q.e.d.

Satz 11. ***Globale Existenz*** *Gegeben seien ein endlichdimensionaler Banachraum V, eine offene Teilmenge $O\subset\mathbb{R}\times V$ und eine stetige Abbildung $f:O\to V$. Dann gibt es für jedes $(t_0,q_0)\in O$ eine (nicht notwendigerweise eindeutige) maximale Lösung des Anfangswertproblems*

$$\dot{q}(t)=f(t,q(t))\text{ mit }q(t_0)=q_0$$

auf einem Intervall (a,b), das t_0 enthält. Die Lösung ist in dem Sinne maximal, dass an beiden Rändern, also bei a und b, eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:
(i) *$a=-\infty$ (bzw. $b=\infty$)*

[8] Satz von Arzela-Ascoli:
Sei K ein kompakter metrischer Raum und V ein endlichdimensionaler Banachraum. Eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $C(K,V)$ besitzt eine konvergente Teilfolge, wenn
(i) für jedes $x\in K$ die Folge $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist und
(ii) für jedes $x\in K$ die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichgradig stetig ist in x, d.h. für jedes $x\in K$ und jedes $\epsilon>0$ gibt es ein $\delta>0$, sodass $f_n(x')\in B(f_n(x),\epsilon)\subset V$ für alle $x'\in B(x,\delta)\subset K$ und für alle $n\in\mathbb{N}$ gilt.
(Beweis siehe Skript „Dynamische Systeme“, Martin U. Schmidt, FSS11)

[9] Aussage des Satzes 1.20:
Für eine einfache Funktion $f\in B([a,b],V)$ ist $F:[a,b]\to V$ mit $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ stetig und überall dort, wo f stetig ist, differenzierbar mit $F'(t)=f(t)$.

(ii) *$t \mapsto ||f(t,q(t))||$ ist für alle $\epsilon > 0$ auf $(a, a+\epsilon)$ (bzw. $(b-\epsilon, b)$) unbeschränkt.*
(iii) *Die Lösung q lässt sich stetig auf $[a,b)$ (bzw. $(a,b]$) fortsetzen, der Graph der Fortsetzung liegt aber nicht in O.* ***q.e.d.***
(Beweis funktioniert nach dem Schema des Satzes der Globalen Existenz und Eindeutigkeit.)

2.4 Bemerkungen

Zwei Dinge sind bei den gezeigten Sätzen auffällig:
(i) Das Anfangswertproblem ist immer in der Form $\dot{q}(t) = f(t, q(t))$, also in der expliziten Form, und nicht in der impliziten Form $f(t, q(t), \dot{q}(t)) = 0$. Das liegt daran, dass man Sätze für Lösungen nur für explizite Formen angeben kann, d.h. die Gleichungen müssen nach $\dot{q}(t)$ auflösbar sein. Andernfalls sind Lösungen teilweise echt schwer zu bestimmen.
(ii) In den Anfangswertproblemen sind nur Ableitungen erster Ordnung aufgetreten, niemals Ordnung 2 oder höher. Das ist auch nicht nötig, da man jede Differentialgleichung höherer Ordnung auf eine Differentialgleichung erster Ordnung zurückführen kann. (Siehe Kap.1 „Gewöhnliche Differentialgleichungen“, Herbert Amann)

3 Dynamische Systeme

3.1 Definition

Definition 12. *Ein dynamisches System ist eine Halbgruppe G zusammen mit einer stetigen Abbildung $\Phi : G \times M \to M$ auf einem metrischen Raum M, die folgendes erfüllt:*
(i) *$\Phi(0, x) = x$ für alle $x \in M$*
(ii) *$\Phi(s, \Phi(t, x)) = \Phi(s + t, x)$ für alle $x \in M, s, t, \in G$* [10]

Dabei ist G im zeitkontinuierlichen *Fall entweder $G = \mathbb{R}$ oder $G = \mathbb{R}_0^+$ und im* zeitdiskreten *Fall $G = \mathbb{Z}$ oder $G = \mathbb{N}_0$. M heißt* Phasenraum.

3.2 Zeitdiskreter Fall ($G = \mathbb{Z}$ oder $G = \mathbb{N}_0$)

Man betrachte die Abbildung

$$G \to \text{ stetige Abbildungen von } M \text{ nach } M, t \mapsto \Phi(t, \cdot) : M \to M, x \mapsto \Phi(t, x)$$

Durch die beiden Bedingungen in der Definition des dynamischen Systems wird diese Abbildung zu einem speziellen Homomorphismus:
Ist $G = \mathbb{Z}$, so ist die Abbildung ein Gruppenhomomorphismus (denn $\mathbb{Z}$ ist eine Gruppe).
Ist $G = \mathbb{N}_0$, so ist die Abbildung ein Halbgruppenhomomorphismus (denn $\mathbb{N}_0$

[10] Zur Erinnerung:
-Halbgruppe:
Eine Abbildung $\circ : M \times M \to M$ heißt Operation auf M. Schreibweise $x \circ y$ für $\circ(x, y)$. Gilt das Assoziativgesetz, d.h. für alle $g_1, g_2, g_3 \in M$ gilt $(g_1 \circ g_2) \circ g_3 = g_1 \circ (g_2 \circ g_3)$, so heißt $(M, \circ)$ (kurz: M) Halbgruppe.

ist eine Halbgruppe).[11]
Die Menge der Gruppen ist somit eine Teilmenge der Menge der Halbgruppen und unsere Betrachtung steht nicht mit der Definition des dynamischen Systems im Widerspruch.
Die Halbgruppe $\mathbb{N}_0$ und die Gruppe $\mathbb{Z}$ werden frei erzeugt und haben den Erzeuger 1. Daraus ergibt sich:
Ein dynamisches System Φ mit $G = \mathbb{Z}$ oder $G = \mathbb{N}_0$ erfüllt $\Phi(n, x) = A^n(x)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ mit $A : M \to M, x \mapsto A(x) = \Phi(1, x)$. Wenn $G = \mathbb{Z}$, dann ist A ein Homöomorphismus und es gilt $\Phi(n, x) = A^n(x)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. Umgekehrt definiert jede stetige Abbildung $A : M \to M$ ein dynamisches System mit $G = \mathbb{N}_0$ und jeder Homöomorphismus $A : M \to M$ ein dynamisches System mit $G = \mathbb{Z}$. [12]

3.3 Zeitkontinuierlicher Fall ($G = \mathbb{R}$ oder $G = \mathbb{R}_0^+$)

Hier geht es nicht mehr um Homomorphismen, aber der Zusammenhang mit Differentialgleichungen wird deutlicher.
Sei Φ ein zeitkontinuierliches dynamisches System auf einem reellen Vektorraum M, dessen Abbildung Φ partiell nach t differenzierbar ist. Dann ist für alle $x \in M$ die Bahn $t \mapsto \Phi(t, x)$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t, x) = F(\Phi(t, x)) \text{ mit } F(x) = \frac{\partial}{\partial t}\Phi(0, x).$$

Zeitkontinuierliche dynamische Systeme sind eindeutig durch eine gewöhnliche Differentialgleichung bestimmt, anders herum definieren viele gewöhnlichen Differentialgleichungen ein zeitkontinuierliches System.
Der Zusammenhang wird im Folgenden noch genauer erklärt. Zuvor noch ein paar Grundbegriffe.

3.4 Wichtige Begriffe rund um die Dynamischen Systeme

Definition 13. *(Fixpunkt bzw. Ruhelage) $x \in M$ heißt Fixpunkt oder Ruhelage eines dynamischen Systems $\Phi : G \times M \to M$, wenn $\Phi(g, x) = x$ für alle $g \in G$.*

Definition 14. *(Orbit bzw. Trajektorie, Bahnkurve, Periode)*
(i) *Für $x \in M$ heißt $\{\Phi(g, x) | g \in G\}$ Orbit oder Trajektorie (durch x), die*

[11] Zur Erinnerung:
-Gruppe:
Eine Gruppe ist ein Paar $(G, \circ)$, bestehend aus einer nichtleeren Menge G und einer Abbildung $\circ : \left\{ \begin{array}{lcl} G \times G & \to & G \\ (g, h) & \mapsto & g \circ h \end{array} \right.$ mit folgenden Eigenschaften:
(i) für alle $g_1, g_2, g_3 \in G$ gilt
$(g_1 \circ g_2) \circ g_3 = g_1 \circ (g_2 \circ g_3)$ („Assoziativgesetz“)
(ii) Es gibt ein $e \in G$ mit
für alle $g \in G$ gilt $e \circ g = g \circ e = g$ („Neutrales Element“)

[12] Zur Erinnerung:
-Homöomorphismus
Es seien Mengen $M \subset \mathbb{R}^n$ und $N \subset \mathbb{R}^m$ gegeben. Eine Abbildung $f : M \to N$ heißt Homöomorphismus, falls gilt:
(i) f ist stetig,
(ii) f ist bijektiv,
(iii) f^{-1} ist ebenfalls stetig.

Abbildung $\Phi(\cdot, x) : G \to M, g \mapsto \Phi(g,x)$ heißt Bahnkurve (durch x).
(ii) *Ein Orbit durch x heißt periodisch mit Periode $g \in G$, wenn $g > 0$ und $\Phi(g,x) = x$. Eine Periode heißt Minimalperiode, wenn $\Phi(\widetilde{g}, x) \neq x$ für $0 < \widetilde{g} < g$.*

3.5 Zusammenhang Dynamische Systeme und Differentialgleichungen

Hier braucht man ein zeitkontinuierliches dynamisches System. Wenn dessen Abbildung Φ auf einem Vektorraum $M = V$ partiell nach t differenzierbar ist, so kann man die zweite Bedingung der Definition der Dynamischen Systeme, also
(ii) $\Phi(s, \Phi(t,x)) = \Phi(s+t, x)$ für alle $x \in M, s, t, \in G$
bei $s = 0$ nach s differenzieren und erhalten

$$\frac{\partial \Phi(t,x)}{\partial t} = F(\Phi(t,x)) \ mit\ F : V \to V, x \mapsto F(x) = \frac{\partial \Phi(0,x)}{\partial t}.$$

Trajektorien durch den Anfangspunkt $x_0 \in M$, d.h. $\{\Phi(g, x_0) | g \in G\}$, erfüllen die gewöhnliche Differentialgleichung $\dot{q}(t) = F(q(t))$.

4 Flüsse und Vektorfelder

Hier geht es darum, aus einem Vektorfeld F das dazugehörige dynamische System Φ zu bauen, also gerade der umgekehrte Fall wie zuvor im zeitkontinuierlichen Fall, in dem ein partiell nach t differenzierbares dynamisches System ein Vektorfeld F definiert hat.

4.1 Wichtige Grundbegriffe

Definition 15. *(lokaler Fluss) Sei X ein metrischer Raum, $W \subset \mathbb{R} \times X$ eine offene Teilmenge und $\Phi : W \to X$ eine Abbildung, die folgende Bedingungen erfüllt:*
(i) *Für alle $x \in X$ ist $\{t \in \mathbb{R} | (t,x) \in W\}$ ein offenes Intervall, das die Null enthält.*
(ii) *Sei $(s,x) \in W$ und $(t, \Phi(s,x)) \in W$, dann ist auch $(t+s, x) \in W$ und es gilt $\Phi(t, \Phi(s,x)) = \Phi(t+s, x)$*
(iii) *Für alle $x \in X$ gilt $\Phi(0,x) = x$.*
Dann heißt Φ ein lokaler Fluss auf X.

Definition 16. *(globaler Fluss)* ***(i)*** *Ein lokaler Fluss $\Phi : W \to X$ auf einem metrischen Raum X heißt globaler Fluss, wenn $W = \mathbb{R} \times X$ ist.*
(ii) *Ein lokal lipschitzstetiges Vektorfeld $F : X \to V$ auf einer offenen Teilmenge eines Banachraumes V heißt vollständig, wenn der entsprechende Fluss Φ_F ein globaler Fluss ist.*

4.2 Aussagen zu Flüssen und Vektorfeldern

Lemma 17. *Gegeben sei ein stetiger lokaler Fluss $\Phi : W \to X$ auf dem metrischen Raum X. Dann gilt:*

(i) *Für alle $t \in \mathbb{R}$ sei $V_t = \{x \in X | (t,x) \in W\}$. Dann ist für alle $t \in \mathbb{R}$ die Menge V_t offen. Für alle $x \in V_t$ ist auch $\Phi(t,x) \in V_{-t}$ und die Abbildung*

$$\Phi(t,\cdot) : V_t \to V_{-t}, x \mapsto \Phi(t,x)$$

ist ein Homöomorphismus mit der inversen Abbildung $\Phi(-t,\cdot)$.
(ii) *Für jedes $x \in X$ gibt es ein $\epsilon > 0$ und eine offene Umgebung $U \subset X$ von x, sodass W die Menge $(-\epsilon,\epsilon) \times U$ enthält. Für alle $t \in (-\epsilon,\epsilon)$ sind insbesondere V_t und V_{-t} offene Umgebungen von x und $\Phi(t,\cdot)$ ein Homöomorphismus von der offenen Umgebung V_t von x auf die offene Umgebung V_{-t} von x.*

Beweis:
(i) Die offenen Mengen von Aussage (i):
Der Definitionsbereich W von Φ ist eine offene Umgebung von $(t,x) \in \mathbb{R} \times X$ für alle $(t,x) \in W$, da $W \subset \mathbb{R} \times X$ offene Teilmenge nach der Definition vom lokaler Fluss. Deswegen existieren ein $\epsilon > 0$ und eine offene Umgebung $U \subset X$ von x, sodass $(t-\epsilon, t+\epsilon) \times U$ in W liegt. Somit sind die Mengen $V_t = \{x \in X | (t,x) \in W\}$ offen für alle $t \in \mathbb{R}$. Damit haben wir schon den ersten Teil der Aussage (i).
(ii) Offene Teilmengen und die Definition des lokalen Flusses:
Der folgende Beweis betrachtet $t > 0$, für $t < 0$ funktioniert er nach analogem Schema. Wir brauchen ein $t \in \mathbb{R}$ und ein $x \in V_t$. Nun ist die Bedingung (i) der Definition des lokalen Flusses notwendig, d.h. „**(i)** Für alle $x \in X$ ist $\{t \in \mathbb{R} | (t,x) \in W\}$ ein offenes Intervall, das die Null enthält." Man nehme ein $s \in [0,t]$, dann liegt wegen Bedingung (i) (s,x) für alle $s \in [0,t]$ in W. $\{(0, \Phi(s,x)) | s \in [0,t]\}$ ist eine kompakte Teilmenge von W, welche eine eine endliche Überdeckung von Mengen hat, die sich durch $(-\epsilon,\epsilon) \times U$ mit $\epsilon > 0$ beschreiben lassen. Außerdem hat die kompakte Teilmenge offene Teilmengen $U \subset X$. Darum ist in W für ein $\epsilon > 0$ das kartesische Produkt von $(-\epsilon,\epsilon)$ mit einer offenen Umgebung von $\{\Phi(s,x) | s \in [0,t]\}$ enthalten. Nun braucht man die zweite Bedingung in der Definition des lokalen Flusses. Nach ihr gilt für alle $s \in [-t, 0]$

$$(r, \Phi(t+s,x)) \in W \textit{ und } \Phi(r, \Phi(t+s,x)) = \Phi(t+s+r,x) \textit{ für alle } r \in (-\epsilon,\epsilon).$$

Die Bedingung bewirkt auch, dass aus $(s, \Phi(t,x)) \in W$ und $(r, \Phi(s, \Phi(t,x))) \in W$ auch $(s+r, \Phi(t,x)) \in W$ und $\Phi(r, \Phi(s, \Phi(t,x))) = \Phi(s+r, \Phi(t,x))$ folgt. Für alle $s \in [-t,0]$ folgt dann induktiv $(s, \Phi(t,x)) \in W$ und $\Phi(s, \Phi(t,x)) = \Phi(t+s,x)$. $\Phi(t,x)$ ist somit in V_{-t} enthalten und $\Phi(-t,\cdot)$ ist die Umkehrabbildung von $\Phi(t,\cdot)$. Φ ist aber stetig, daher sind $\Phi(t,\cdot)$ und $\Phi(-t,\cdot)$ Homöomorphismen, d.h. beide sind stetig und bijektiv. Damit ist Aussage (i) des Lemmas abgeschlossen. Die zweite Aussage ist nun eine Folgerung des vorangegangen Beweises. **q.e.d.**

Satz 18. *Gegeben sei eine offene Teilmenge X eines Banachraumes V.*
Dann definiert für jedes lokal lipschitzstetige Vektorfeld $F : X \to V$ die Vereinigung aller maximalen Integralkurven[13] *aus dem Satz der Globalen Existenz und Eindeutigkeit einen stetigen lokalen Fluss Φ_F auf X. Wenn F $r \in \mathbb{N}$ mal stetig differenzierbar ist, dann ist Φ_F ein r-mal stetig differenzierbarer Fluss mit r-mal stetig differenzierbarer partieller Ableitung $\frac{\partial \Phi_F}{\partial t}$.*

[13]-Integralkurve:
Man hat ein Vektorfeld $F : U \to V$ gegeben, dabei ist U eine offene Teilmenge eines Banachraums V. Dann heißen die Lösungen der Anfangswertprobleme $\dot{q}(t) = F(q(t))$ mit $q(0) = x$ Integralkurven durch x für $x \in U$.

Umgekehrt ist jeder partiell nach t differenzierbare lokale Fluss Φ, dessen partielle Ableitung $F(x) = \frac{\partial \Phi(0,x)}{\partial t}$ lokal lipschitzstetig ist, die Einschränkung von Φ_F auf eine offene Teilmenge $W \subset W_F$.

Beweis:
(i) Einige Vordefinitionen mit Integralkurven:
Man benötigt ein lokal lipschitzstetiges Vektorfeld $F : X \to V$, außerdem die Vereinigung in $\mathbb{R} \times X$ aller kartesischen Produkte der Definitionsbereiche der eindeutigen maximalen Integralkurven aus dem Satz der Globalen Existenz und Eindeutigkeit mit Anfangswert $q(0) = x \in X$ mit den einelementigen Mengen $\{x\}$. Wir nennen diese Vereinigung W_F. Nun setze man $\Phi_F : W_F \to X$ für jedes $x \in X$ als die zugehörige Integralkurve durch x. Wenn $(s, x) \in W_F$ und $(t, \Phi_F(s, x)) \in W_F$ gilt, dann sind die beiden Integralkurven mit Anfangswert $q(0) = x$ und $q(s) = \Phi_F(s, x)$ die selben. Dies liegt daran, dass Integralkurven auf der Schnittmenge der Definitionsbereiche eindeutig sind. Sie formen zusammen eine Integralkurve auf einem gewissen Intervall. In diesem ist sowohl 0, als auch s und $t + s$ enthalten. Des weiteren erfüllt das Intervall die Gleichungen $q(0) = x, q(s) = \Phi_F(s, x)$ und $q(t + s) = \Phi_F(t, \Phi_F(s, x))$. Daraus folgt dann schließlich

$$(t + s, x) \in W_F \textit{ und } \Phi_F(t + s, x) = \Phi_F(t, \Phi_F(s, x)).$$

(ii) Satz der lokalen Existenz und Eindeutigkeit:
Im Beweis der Existenz des Anfangswertproblems im Satz der lokalen Existenz wird das Intervall, auf dem die Integralkurve durch $x \in X$ definiert ist, auch benutzt. Dort hängt es nur von drei Dingen ab: einem $\delta > 0$ (für dieses gilt $\overline{B(x, \delta)} \subset X$), der Lipschitzkonstanten L und dem Supremum von $||F||$ auf dieser kompakten Menge $\overline{B(x, \delta)}$. Daher befindet sich in W_F eine offene Umgebung von $(0, x) \in \mathbb{R} \times X$ für alle $x \in X$. Man betrachte nun die W_F mit einer offenen Umgebung um $(0, \Phi_F(s, x))$. Diese haben auch eine offene Umgebung von (s, x) für alle $(s, x) \in W_F$. Daraus folgt: W_F ist offen.
(iii) Stetige Differenzierbarkeit:
Sei nun $F : X \to V$ r-mal stetig differenzierbar. Nach Satz 8 gilt dann, dass auch Φ_F r-mal stetig differenzierbar ist. Hier hängt f nicht von t ab. Somit kann man die ersten $r + 1$ Ableitungen $\dot{q}(t), ..., q^{r+1}(t)$ der Lösung durch die ersten r Ableitungen der Funktion F nach q bei $q(t)$ formulieren. Die Lösungen des Anfangswertproblems sind demnach sogar $(r + 1)$-mal stetig partiell nach t differenzierbar.
(iv) Stetig differenzierbarer Fluss und Eindeutigkeit von Integralkurven:
Man benötigt jetzt einen partiell nach t stetig differenzierbarer Fluss auf X, d.h. $\Phi : W \to X$. Seine partielle Ableitung nach t soll lokal lipschitzstetig sein. Nun kommt wieder Bedingung (ii) aus der Definition des lokalen Flusses zum tragen. Man darf nach ihr für alle $(t, x) \in W$ und $(s, \Phi(t, x)) \in W$ die Ableitungen wie folgt darstellen:

$$\frac{\partial \Phi(t + s, x)}{\partial t} = \frac{\partial \Phi(t + s, x)}{\partial s} = \frac{\partial \Phi(s, \Phi(t, x))}{\partial s}.$$

Setze man $s = 0$, so ergibt sich, dass die partielle Ableitung $\frac{\partial \Phi(t,x)}{\partial t}$ an der Stelle (t, x) mit der partiellen Ableitung $\frac{\partial \Phi(s,\Phi(t,x))}{\partial s}$ an der Stelle $(0, \Phi(t, x))$ übereinstimmt. Dann ist $t \mapsto \Phi(t, x)$ die eindeutige Integralkurve durch x des

Vektorfeldes $F : X \to V$ (dieses ist lokal lipschitzstetig) mit $F(x) = \frac{\partial \Phi(0,x)}{\partial t}$. Integralkurven sind aber eindeutig, daher ist die Bahn $t \mapsto \Phi(t, x)$ für jedes $x \in X$ eine Einschränkung der maximalen Integralkurve $t \mapsto \Phi_F(t, x)$ des Vektorfeldes F durch x. W ist somit eine offene Teilmenge von W_F und Φ schränkt Φ_F auf W ein. **q.e.d.**

Korollar 19. *Gegeben sei ein lokal lipschitzstetiges Vektorfeld $F : X \to V$ auf einer offenen Teilmenge X eines Banachraumes V.*
Dann ist für alle $t \in R$ die Menge $V_t = \{x \in X | (t, x) \in W_F\}$ eine offene Teilmenge von X und die Abbildung $x \mapsto \Phi_F(t, x)$ ist ein Homöomorphismus von V_t nach V_{-t} mit Umkehrabbildung $x \mapsto \Phi_F(-t, x)$. Wenn F r-mal stetig differenzierbar ist, dann sind diese Abbildungen auf r-mal stetig differenzierbar. Außerdem gibt es für alle $x \in X$ ein $\epsilon > 0$, sodass für alle $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ die Mengen V_t und V_{-t} offene Umgebungen von x sind. ***q.e.d.***
(Das Korollar folgt aus dem Lemma und dem Satz zuvor.)

Korollar 20. ***(i)*** *Ein lokaler Fluss auf einem metrischen Raum X ist genau dann ein globaler Fluss, wenn W eine Menge $(-\epsilon, \epsilon) \times X$ enthält mit $\epsilon > 0$.*
(ii) *Ein lokal lipschitzstetiges Vektorfeld $F : X \to V$ auf einer offenen Menge eines Banachraumes V definiert genau dann einen globalen Fluss, wenn für ein $\epsilon > 0$ die Integralkurven von F durch alle $x \in X$ auf $(-\epsilon, \epsilon)$ definiert sind.*
(iii) *Ein lokal lipschitzstetiges Vektorfeld $F : X \to V$ auf einer offenen Teilmenge eines Banachraumes, das außerhalb einer kompakten Menge verschwindet, definiert einen globalen Fluss.*
(iv) *Auf einem Banachraum $X = V$ definieren beschränkte und lokal lipschitzstetige Vektorfelder einen globalen Fluss.*
(v) *Auf einem Banachraum $X = V$ definieren lipschitzstetige Vektorfelder einen globalen Fluss.*

Beweis:
(i)-(ii) folgt aus dem Beweis von Satz 1.37[14] aus dem Skript „Dynamische Systeme“, Martin U. Schmidt, FSS11. (iv) ist eine Folgerung aus Korollar 1.29[15] (ebenfalls von dort).
Es existiert für jedes $x \in X$ ein $\epsilon > 0$ und eine Umgebung U von x in der Art, dass der jeweilige lokale Fluss auf $(-\epsilon, \epsilon) \times U$ definiert ist und die Integralkurven, die durch Nullstellen verlaufen, auf ganz $\mathbb{R}$ konstant sind. Unter diesen Bedingungen erfüllt ein Vektorfeld, das Aussage (iii) erfüllt, auch (ii).
Man braucht jetzt ein lipschitzstetiges Vektorfeld $F : V \to V$ auf einem Banachraum V mit Lipschitzkonstante L. Aus dem Beweis zum Satz der lokalen Existenz und Eindeutigkeit stammt diese Definition eines ϵ: $\epsilon < min \left\{ \delta, \frac{\delta}{||F(x)|| + L\delta} \right\}$.
Dort haben wir bewiesen, dass für $x \in X$ mit $\delta > 0$ die Integralkurve durch x in dem Ball $B(x, \delta)$ auf dem Intervall $(-\epsilon, \epsilon)$ definiert ist, wenn das ϵ so gewählt ist. Wählt man $\delta = ||F(x)||$, so kann man $\epsilon = \frac{1}{1+L}$ setzen. Nun ist (v) eine Folgerung aus (ii). **q.e.d.**

[14]-Aussage des Satzes 1.37:
Auf einem kompakten metrischen Raum X sind alle lokalen Flüsse auch globale Flüsse.
[15]-Aussage des Korollars 1.29:
Sei F ein stetiges und beschränktes Vektorfeld auf einem (endlichdimensionalen) Banachraum V. Dann sind alle Integralkurven auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.

5 Empfehlung und Quellen

5.1 Meine Empfehlung für die gewöhnlichen Differentialgleichungen

Wer sich später sehr stark mit den gewöhnlichen Differentialgleichungen auseinandersetzen will oder muss, dem empfehle ich im Skript „Dynamische Systeme“ (Martin U. Schmidt, FSS11) das Kapitel 1.6. Dort sind elementare Lösungsverfahren zu den gewöhnlichen Differentialgleichungen aufgeführt.

5.2 Quellen

-Skript „Dynamische Systeme“, Martin U. Schmidt, FSS11, Kap. 1.1, 1.2, 1.4, 1.5, 1.6
-Skript „Lineare Algebra I“, Siegfried Böcherer, HWS2013, Kap. II, IV
-Folien „Formale Grundlagen der Informatik“, HWS2010-11, Matthias Krause, Definition Halbgruppe
-Skript „Analysis I/II“, Martin U. Schmidt, HW2013/FS2014, Kap. 5.2, 5.3, 9.1, 9.2, 9.5, 10.2, 10.3, 11.2
-Buch „Gewöhnliche Differentialgleichungen“, Herbert Amann, 1995, 2. Auflage, Kap. 1
-Buch „Grundkurs Analysis 1“, Klaus Fritzsche, 2. Auflage, S.139