Ljapunovstabilität

Seminar zu ausgewählten Themen gewöhnlicher Differentialgleichungen und dynamischer Systeme

Patrick Bachmann

3. November 2014

Universität Mannheim
Fakultät für Wirtschaftsinformatik und Wirtschaftsmathematik
Lehrstuhl für Mathematik III
Prof. Dr. M. Schmidt

Inhaltsverzeichnis

1 Bezeichnungen

Im Folgenden werden diese Objekte verwendet:

1. $E = (E, |\cdot|)$, ein endlichdimensionaler Banachraum;
2. die offene Menge $D \subset E$;
3. das offene Intervall $J \subset \mathbb{R}$, wobei $\mathbb{R}_+ \subset J$;
4. $f \in \mathcal{C}^{0,1-}(J \times D, E)$ (f ist lokal Lipschitz-stetig in der zweiten Komponente);
5. $u \in \mathcal{C}^{1-}(D_f, D)$ (lokal Lipschitz-stetig) ist die Lösung des AWP

$$\dot{x} = f(t,x), \qquad x(\tau) = \xi, \qquad (\tau, \xi) \in J \times D \quad .$$

2 Definitionen

Definition 1 (Ljapunovstabilität)**.** *Sei $f(\,\cdot\,, x_0) = 0$. Dann ist die globale Lösung $u(x) \equiv x_0$ eine Lösung des AWP. Die Lösung x_0 heißt Ljapunov-stabil, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ und jedem $\tau \in J$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass*

$$|u(t,\tau,\xi) - x_0| < \varepsilon, \qquad \forall t \in [\tau, t^+(\tau,\xi)), \quad \forall |\xi - x_0| < \delta \quad .$$

Dabei ist $t^+(\tau,\xi) = \sup\{t \in J \big| u(t,\tau,\xi) \in D\}$ (vgl. [4, Satz 9]). Wenn die Lösung x_0 nicht stabil ist, so ist sie instabil (im Sinne von Ljapunov).

Definition 2 (Attraktivität)**.** *Die Lösung x_0 heißt attraktiv, wenn für alle $\tau \in J$ eine Umgebung W um x_0 existiert mit*

$$\forall \xi \in W: \qquad t^+(\tau,\xi) = \infty \qquad \textit{und} \qquad \lim_{t\to\infty} u(t,\tau,\xi) = x_0 \quad .$$

Definition 3 (Asymptotische Stabilität)**.** *Ist die Lösung x_0 stabil und attraktiv, nennt man sie asymptotisch stabil.*

Definition 4 (Gleichmäßigkeit)**.**

1. *Man spricht von gleichmäßig stabil, wenn δ nicht von $\tau \in J$ abhängt.*
2. *Die Lösung x_0 ist gleichmäßig attraktiv, wenn W unabhängig von $\tau \in J$ ist und $\lim_{t\to\infty} u(t,\tau,\xi)$ gleichmäßig bzgl. $(\tau,\xi) \in J \times W$ ist. Letzteres bedeutet in diesem Fall, $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists T > 0:$*

$$|u(t,\tau,\xi) - x_0| < \varepsilon \qquad \forall t > \tau + T, \quad \forall (\tau,\xi) \in J \times W \quad .$$

3. *Sind beide Eigenschaften erfüllt, spricht man von gleichmäßig asymptotisch stabil. [1]*

3 Motivation

Es sollen nun Aussagen darüber getroffen werden, wann ein kritischer Punkt x_0 in einem dynamischen System stabil ist. Hierfür werden Dynamische Systeme betrachtet, die „annähernd linear“ sind, d.h., für die Differentialgleichung $\dot{x} = Ax + g(t,x)$ gilt $g(t,x) = \mathrm{o}(|x|)$ für $x \to x_0$. Im Folgenden werden vorwiegend autonome Differentialgleichungen behandelt, da nicht-autonome Gleichungen durch Translation auf den autonomen Fall zurückgeführt werden können.

4 Stabilitätsaussagen

4.1 Stabilität autonomer linearer Differentialgleichungen

Lemma 5 (Beschränktheitskriterium). *Es sei $A \in \mathscr{L}(E)$. Dann bleibt jede Lösung von $\dot{x} = Ax$ für $t \to \infty$ genau dann beschränkt, wenn gilt:*

(i) $\operatorname{Re}\lambda \leq 0 \qquad \forall \lambda \in \sigma(A)$.

(ii) Jedes $\lambda \in \sigma(A)$ mit $\operatorname{Re}\lambda = 0$ ist ein halbeinfacher Eigenwert, d.h., seine geometrische ist gleich seiner algebraischen Vielfachheit.

Beweis. Es genügt, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ zu betrachten. Seien (i) und (ii) erfüllt. Dann wird jede Lösung u der Differentialgleichung eine Linearkombination von Funktionen der Form

$$t^n e^{\lambda t} y, \qquad \lambda \in \sigma(A), y \in E \quad .$$

Wegen (ii) gilt für alle λ mit $\operatorname{Re}\lambda = 0$, dass n=0. Damit ist u beschränkt.
Andersherum existiert für jedes $\lambda \in \sigma(A)$ eine Lösung der Form

$$e^{\lambda t}(y_1 + t y_2 + ... + t^{n-1} y_n)$$

mit $y_1, ..., y_n \in \mathbb{C}^m$. Wäre λ nun nicht halbeinfach, so wäre n>1. Damit der Ausdruck aber auch für $\operatorname{Re}\lambda = 0$ beschränkt ist, muss $n \leq 1$ sein. □

Satz 6. *Sei $A \in \mathscr{L}(E)$. Die Nulllösung der linearen Differentialgleichung $\dot{x} = Ax$ ist genau dann stabil, wenn*

(i) $\operatorname{Re}\sigma(A) \leq 0$

(ii) jedes $\lambda \in \sigma(A)$ mit $\operatorname{Re}\lambda = 0$ *ein halbeinfacher Eigenwert ist.*

Die Nulllösung ist genau dann asymptotisch stabil, wenn $\operatorname{Re}\sigma(A) < 0$.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit genügt es, den Fall $\tau = 0$ zu betrachten (sonst setzt man $t_{neu} = t - \tau$, woraus $\tau_{neu} = 0$ folgt). Der Fluss wird folglich durch $e^{tA} \cdot \xi$ beschrieben. Sei

$$\alpha := \sup\{|e^{tA}| \big| t \in \mathbb{R}_+\} < \infty \quad . \tag{1}$$

Somit ist für $\varepsilon > 0$

$$|e^{tA} \cdot \xi| \leq |e^{tA}| \cdot |\xi| < \varepsilon \qquad \forall (\tau, \xi) \in \mathbb{R}_+ \times \mathrm{B}(0, \tfrac{\varepsilon}{\alpha}) \quad ,$$

d. h. die Nulllösung ist stabil.
Mit der Basis $\{x_1, ..., x_m\}$ von E ergibt sich folgende Zerlegung: $\xi = \sum_{i=1}^m \xi_i x_i$ und $e^{tA} \cdot \xi = \sum_{i=1}^m \xi_i e^{tA} x_i$. Um Ungleichung (1) erfüllen zu können, muss daher $e^{tA} x_i$ für alle $i = 1, ..., m$ beschränkt sein. Das genau dann der Fall, wenn jede Lösung von $\dot{x} = Ax$ beschränkt ist. Das wiederum ist äquivalent zu (i) und (ii), wie mit Lemma 5 folgt.
Für die Rückrichtung wird angenommen, dass (i) oder (ii) verletzt sind. Nach Lemma 5 folgt:

$$\exists x \in E : \qquad |e^{tA} x| \xrightarrow{t \to \infty} \infty \quad .$$

Dann wächst auch $|e^{tA} \varepsilon x|$ für jedes $\varepsilon > 0$ unbeschränkt und die Nulllösung ist instabil.
Die asymptotische Stabilität folgt, wenn man in einem analogen Beweis [5, Satz 1.1] verwendet. □

4.2 Asymptotische Stabilität

Satz 7. *Gelte für* $A \in \mathscr{L}(E)$, *dass* $\operatorname{Re} \sigma(A) < 0$. *Für* $g \in \mathcal{C}^{0,1-}(J \times D, E)$ *sei*

$$g(t, x) = \mathrm{o}(|x|) \qquad \text{für} \qquad x \to 0 \qquad \text{und gleichmäßig in } t \in J. \tag{2}$$

Dann ist die Nulllösung der gestörten linearen Gleichung

$$\dot{x} = Ax + g(t, x)$$

gleichmäßig asymptotisch stabil.

Beweis. Wir wissen wegen [5, Lemma 3.2] bereits, dass $\alpha, \beta > 0$ existieren, sodass

$$|e^{tA}| \leq \beta e^{-\alpha t} \qquad \forall t \geq 0 \quad .$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\beta > 1$. Sei außerdem u bereits eine Lösung des AWP

$$\dot{x} = Ax + g(t, x) \qquad u(\tau) = \xi \quad .$$

Durch die Anwendung der Variation der Konstanten auf die so erzeugte Differentialgleichung

$$\dot{x} = Ax + g(t, u(t))$$

erhält man die Integralgleichung

$$u(t) = e^{(t-\tau)A} \xi + \int_\tau^t e^{(t-s)A} g(s, u(s)) \, ds \quad .$$

Die Lösung $u(t)$ ist daher beschränkt durch

$$\begin{aligned} |u(t)| &= |e^{(t-\tau)A} \xi + \int_\tau^t e^{(t-s)A} g(s, u(s)) \, ds| \\ &\leq \beta e^{-\alpha(t-\tau)} |\xi| + \beta \int_\tau^t e^{-\alpha(t-s)} |g(s, u(s))| \, ds \end{aligned} \tag{3}$$

für $\tau \leq t < t^+(t, \xi)$.

Wegen (2) kann für ein beliebiges $\varepsilon \in (0, \alpha)$ ein $\delta \in (0, \varepsilon)$ gefunden werden, sodass

$$|g(t,x)| \leq (\tfrac{\varepsilon}{\beta})|x| \qquad \forall x: \ |x| \leq \delta, \quad \forall t \geq \tau \quad . \tag{4}$$

Für den nächsten Schritt wird benötigt, dass $|u(t)| < \delta$ für $|\xi| < \frac{\delta}{\beta}$ und $t \in [\tau, t^+(t,\xi))$. Der Beweis hierfür wird durch Widerspruch geführt.
Man nehme an,

$$\exists(\xi, \bar{t}): \qquad \bar{t} = \inf\{t \in [\tau, t^+(t,\xi)) \big| |u(t)| = \delta\} \quad .$$

Einsetzen von (4) in (3) ergibt

$$|u(t)| \leq \delta e^{-\alpha(t-\tau)} + \varepsilon \int_\tau^t e^{-\alpha(t-s)} |u(s)| \ ds$$

bzw.

$$e^{\alpha t}|u(t)| \leq \delta e^{\alpha \tau} + \varepsilon \int_\tau^t e^{\alpha s} |u(s)| \ ds \quad .$$

Da beide Summanden rechts positiv sind, kann man durch die rechte Seite teilen und erhält nach Multiplikation mit ε

$$\frac{e^{\alpha t}|u(t)| \cdot \varepsilon}{\delta e^{\alpha\tau} + \varepsilon \int_\tau^t e^{\alpha s}|u(s)| \ ds} \leq \varepsilon \quad .$$

Wird diese Gleichung nach t integriert, kann man die Substitutionsregel anwenden:

$$\log(\delta e^{\alpha\tau} + \varepsilon \int_\tau^t e^{\alpha s}|u(s)| \ ds) - \log(\delta e^{\alpha \tau}) \leq \int_\tau^t \varepsilon \ dt = \varepsilon(t - \tau) \quad ,$$

so dass sich

$$e^{\alpha t}|u(t)| \leq \delta e^{\alpha\tau} + \varepsilon \int_\tau^t e^{\alpha s}|u(s)| \ ds \leq \delta e^{\alpha\tau} \cdot e^{\varepsilon(t-\tau)}$$

oder

$$|u(t)| \leq \delta e^{-\alpha(t-\tau)+\varepsilon(t-\tau)} = \delta e^{-(\alpha-\varepsilon)(t-\tau)} < \delta \tag{5}$$

ergibt.[3] Setzt man jetzt $\bar{t}$ ein, hat man mit

$$\delta = |u(\bar{t})| < \delta$$

einen Widerspruch erzeugt.
Wegen (5) für alle $|\xi| < \frac{\delta}{\beta}$ und $t \in [\tau, t^+(t,\xi))$ ist die Nulllösung gleichmäßig attraktiv.

$\square$

4.3 Instabilität

Lemma 8. *Für $A \in \mathscr{L}(E)$ gelte*

$$\alpha < \operatorname{Re} \sigma(A) < \beta$$

Dann existiert eine euklidische Norm $\|\cdot\|$ auf E, sodass für das Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ gilt

$$\alpha\|x\|^2 \leq \operatorname{Re}\langle Ax, x\rangle \leq \beta\|x\|^2 \qquad \forall x \in E.$$

Beweis. Sei $\mathbb{K}=\mathbb{C}$. Analog zu [5, Lemma 3.2] kann A aufgeteilt werden in $A=D+N$ mit $D=\operatorname{diag}[\mu_1,...,\mu_m]$, wobei $\mu_1,...,\mu_m$ die nach ihrer Vielfachheit geordneten Eigenwerte sind. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon>0$ eine euklidische Norm $\|\cdot\|$ mit $\|N\|\leq\varepsilon$. Wähle nun ein ε mit

$$\varepsilon\leq\min\{\beta-\max[\operatorname{Re}\sigma(A)],\min[Re\sigma(A)]-\alpha\} \quad .$$

Bezeichne mit $x_1,...,x_m$ die Basis zur Norm. Weiter ist $\langle Dx,x\rangle=\sum_{i=1}^m\mu_i|x_i|^2$. Daher folgt

$$\min[\operatorname{Re}\sigma(A)]\|x\|^2\leq\operatorname{Re}\langle Dx,x\rangle\leq\max[\operatorname{Re}\sigma(A)]\|x\|^2 \quad . \tag{6}$$

Jetzt lässt sich mit $\operatorname{Re}\langle Ax,x\rangle=\operatorname{Re}\langle Dx,x\rangle+\operatorname{Re}\langle Nx,x\rangle$ und $\operatorname{Re}\langle Nx,x\rangle\leq\|N\|\|x\|^2\leq\varepsilon\|x\|^2$ die Abschätzung

$$\operatorname{Re}\langle Dx,x\rangle-\varepsilon\|x\|^2\leq\operatorname{Re}\langle Ax,x\rangle\leq\operatorname{Re}\langle Dx,x\rangle+\varepsilon\|x\|^2$$

herleiten. Wegen (6) und der Wahl von ε ist nun

$$\alpha\|x\|^2\leq\min[\operatorname{Re}\sigma(A)]\|x\|^2-\varepsilon\|x\|^2\leq\operatorname{Re}\langle Dx,x\rangle-\varepsilon\|x\|^2\leq\operatorname{Re}\langle Ax,x\rangle$$

bzw.

$$\operatorname{Re}\langle Ax,x\rangle\leq\operatorname{Re}\langle Dx,x\rangle+\varepsilon\|x\|^2\leq\max[\operatorname{Re}\sigma(A)]\|x\|^2+\varepsilon\|x\|^2\leq\beta\|x\|^2 \quad .$$

Es verbleibt der Fall $\mathbb{K}=\mathbb{R}$. Durch Komplexifizierung kann der reelle Fall auf den komplexen zurückgeführt werden. Sei also $A_{\mathbb{C}}$ in $E_{\mathbb{C}}$. Die Hilbertnorm $\|\cdot\|_{\mathbb{C}}$ induziert eine Hilbertnorm $\|\cdot\|$ auf E (vgl. [5, Lemma 3.2]).
Da für die Skalarprodukte gilt:

$$\operatorname{Re}\langle\xi,\eta\rangle_{\mathbb{C}}=\tfrac{1}{4}(\|\xi+\eta\|_{\mathbb{C}}^2-\|\xi-\eta\|_{\mathbb{C}}^2) \qquad \forall\xi,\eta\in E_{\mathbb{C}}$$

und

$$\langle x,y\rangle=\tfrac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2) \qquad \forall x,y\in E \quad .$$

Nach Zusammensetzen folgt

$$\alpha\|x\|^2=\alpha\|x\|_{\mathbb{C}}^2\leq\operatorname{Re}\langle A_{\mathbb{C}}x,x\rangle_{\mathbb{C}}=\langle Ax,x\rangle\leq\beta\|x\|_{\mathbb{C}}^2=\beta\|x\|^2 \qquad \forall x\in E.$$

□

Satz 9. *Der Operator $A\in\mathscr{L}(E)$ habe einen Eigenwert mit positivem Realanteil. Es existiere wieder ein $g\in\mathcal{C}^{0,1-}(J\times D,E)$ mit*

$$g(t,x)=\mathrm{o}(|x|) \qquad \textit{für} \qquad x\to 0 \qquad \textit{und gleichmäßig in } t\in J. \tag{7}$$

Dann ist die Nulllösung der gestörten linearen Gleichung

$$\dot{x}=Ax+g(t,x)$$

instabil.

Beweis. Da das instabile Spektrum $\sigma_u(A)$ nicht leer ist, existiert ein $\gamma \in (0, \operatorname{Re}\sigma_u(A))$. Definiere $A_\gamma := A - \gamma \cdot \mathbb{1}$. Wegen $\sigma(A_\gamma) = \sigma(A) - \gamma$ ist das neutrale Spektrum $\sigma_n(A_\gamma)$ leer. Daher erzeugt A_γ einen hyperbolischen linearen Fluss e^{tA_γ}. Nach [5, Theorem 5.2] gibt es eine direkte Summenzerlegung

$$E = E_- \oplus E_+ \quad ,$$

die $A_\gamma = (A_\gamma)_- \oplus (A_\gamma)_+$ so zerlegt, dass $\sigma_s(A_\gamma) = \sigma((A_\gamma)_-)$ und $\sigma_u(A_\gamma) = \sigma((A_\gamma)_+)$. Die Zerlegung wirkt dann auch auf

$$A = A_- \oplus A_+$$

mit $\sigma(A_+) = \sigma_u(A)$ und $\sigma(A_-) = \sigma_s(A) \cup \sigma_n(A)$. Folglich gilt

$$\operatorname{Re}\sigma(A_-) \leq 0 \qquad \text{und} \qquad \operatorname{Re}\sigma(A_+) > \alpha > 0$$

für ein geeignetes $\alpha > 0$. Sei nun $\beta \in (0, \alpha)$ fest. Mit vorangegangenem Lemma 8 folgt die Existenz einer Skalarproduktnorm $\|\cdot\|_+$ auf E_+ und $\|\cdot\|_-$ auf E_-, sodass gilt

$$\operatorname{Re}\langle A_- x_-, x_-\rangle_- \leq \beta \|x_-\|_-^2 \qquad \forall x_- \in E_- \tag{8}$$

und

$$\operatorname{Re}\langle A_+ x_+, x_+\rangle_+ \geq \alpha \|x_+\|_+^2 \qquad \forall x_+ \in E_+ \quad . \tag{9}$$

Das innere Produkt des gesamten Raumes $E = E_- \oplus E_+$ ist definiert durch

$$\langle x_- + x_+, y_- + y_+\rangle := \langle x_-, y_-\rangle_- + \langle x_+, y_+\rangle_+ \quad ,$$

da die Teilräume senkrecht auf zueinander sind. Das Skalarprodukt induziert die Norm

$$\|x\|^2 = \|x_- + x_+\|^2 = \|x_-\|_-^2 + \|x_+\|_+^2 \qquad \forall x = x_- + x_+ \in E \quad . \tag{10}$$

Die Ableitung von $\|x\|^2$ mit $x =: a + bi$ ist:

$$\begin{aligned}
(\|x\|^2)' &= (\|a+bi\|^2)' = (\langle a+bi, a+bi\rangle)' \\
&= \langle (a+bi)', a+bi\rangle + \langle a+bi, (a+bi)'\rangle = \langle a' + b'i, a+bi\rangle + \langle a+bi, a'+b'i\rangle \\
&= \langle a', a\rangle + \langle a', bi\rangle + \langle b'i, a\rangle + \langle b'i, bi\rangle + \langle a, a'\rangle + \langle a, b'i\rangle + \langle bi, a'\rangle + \langle bi, b'i\rangle \\
&= 2\langle a', a\rangle + \langle a', bi\rangle - \langle a', bi\rangle + \langle b'i, a\rangle - \langle b'i, a\rangle + 2\langle b'i, bi\rangle \\
&= 2\langle a', a\rangle + 2\langle b'i, bi\rangle + 0 = 2\operatorname{Re}\langle a' + b'i, a+bi\rangle \\
&= 2\operatorname{Re}\langle x', x\rangle \quad .
\end{aligned} \tag{11}$$

Definiere $P : E \to E_+$ und $Q : E \to E_-$ die Projektionen auf den Unterraum,

$$\Phi(x) := \tfrac{1}{2}(\|x_+\|^2 - \|x_-\|^2) = \tfrac{1}{2}(\|Px\|^2 - \|Qx\|^2) \qquad \forall x \in E$$

und $\gamma := \frac{1}{4}(\alpha - \beta)$. Nach (7) existiert ein $\delta > 0$ mit

$$\|(g(t,x))\| \leq \gamma \|x\| \qquad \forall x : \ \|x\| \leq \delta \quad . \tag{12}$$

Sei $\|u(0)\| < \delta$ und $\Phi(u(0)) > 0$. Sei $\varphi(t) := \Phi(u(t))$. Dann folgt aus den Gleichungen (8), (9), (11) und (12), dass $\forall t \geq 0$ mit $\|u(t)\| \leq \delta$ gilt:

$$\begin{aligned}
\dot{\varphi}(t) &= \operatorname{Re}\langle P\dot{u}(t), Pu(t)\rangle - \operatorname{Re}\langle Q\dot{u}(t), Qu(t)\rangle \\
&= \operatorname{Re}\langle A_+u_+(t), u_+(t)\rangle - \operatorname{Re}\langle A_-u_-(t), u_-(t)\rangle \\
&\quad + \operatorname{Re}\langle Pg(t,u(t)), Pu(t)\rangle - \operatorname{Re}\langle Qg(t,u(t)), Qu(t)\rangle \\
&\geq \alpha\|Pu(t)\|^2 - \beta\|Qu(t)\|^2 \\
&\quad - \gamma\|P\|\|u(t)\|\|Pu(t)\| - \gamma\|Q\|\|u(t)\|\|Qu(t)\| \quad .
\end{aligned}$$

Da P und Q Projektionen sind, gilt offensichtlich $\|P\|, \|Q\| \leq 1$. Wegen $\varphi(0) > 0$ folgt außerdem, dass für kleine $t \geq 0$ gilt, $\Phi(u(t)) \geq 0$, oder $\|Qu(t)\| \leq \|Pu(t)\|$. Eingesetzt in (10) ergibt sich $\|u(t)\| \leq 2\|Pu(t)\|$. Damit folgt

$$\begin{aligned}
\dot{\varphi}(t) &\geq \alpha\|Pu(t)\|^2 - \beta\|Qu(t)\| - \gamma\|u(t)\|(\|Pu(t)\| + \|Qu(t)\|) \\
&\geq (\alpha - 4\gamma)\|Pu(t)\|^2 - \beta\|Qu(t)\|^2 \\
&= 2\beta \cdot \varphi(t) \quad .
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\forall t \geq 0, \|u(t)\| \leq \delta : \qquad \varphi(t) \geq \varphi(0)e^{2\beta t}, \qquad \varphi(0) > 0 \quad .$$

D. h. $\dot{\varphi}(t) > 0$ für $t \geq 0$, $\|u(t)\| \leq \delta$. Da $\varphi(t) \leq \frac{1}{2}\|u(t)\|^2$ für alle $t \geq 0$, gibt es ein t, sodass $\|u(t)\| = \delta$. Für jeden Anfangswert, der $\|u(0)\| \leq \delta$ und $\varphi(0) > 0$ erfüllt, erreicht also die Bahnkurve den Rand des Balls $\mathrm{B}(0,\delta)$. Damit ist die Nulllösung instabil. □

5 Prinzip der linearisierten Stabilität

In diesem Satz werden nun alle bisherigen Ergebnisse zusammengefasst.

Satz 10. *Sei $f \in \mathcal{C}^1(D,E)$ mit $f(x_0) = 0$. Gilt dann*

$$\operatorname{Re}\sigma(Df(x_0)) < 0 \quad ,$$

so ist der kritische Punkt x_0 der autonomen Differentialgleichung $\dot{x} = f(x)$ asymptotisch stabil. Ist

$$\sigma(Df(x_0)) \cap \{z \in \mathbb{C} \big| \operatorname{Re} z > 0\} \neq \emptyset \quad ,$$

so ist x_0 instabil.

Beweis. Sei $A := Df(x_0) \in \mathscr{L}(E)$ und $g(y) := f(y + x_0) - Df(x_0) \cdot y$. Wegen

$$\begin{aligned}
\lim_{y \to 0}\left|\frac{g(y)}{|y|}\right| &= \lim_{y\to 0}\frac{|f(y+x_0) - Df(x_0)\cdot y|}{|y|} \\
&= \lim_{y\to 0}\frac{|f(y+x_0) - f(x_0) - Df(x_0)\cdot y|}{|y|} \qquad ,
\end{aligned}$$

der Differenzierbarkeit von f und der Definition der Jacobimatrix folgt das Grenzverhalten $\lim_{y\to 0}\left|\frac{g(y)}{|y|}\right| = 0$. Also gilt $g(y) = \mathrm{o}(|y|)$, $y \to 0$. Dann ist

$$\dot{y} = f(y + x_0) = Ay + g(y)$$

Mit den Sätzen 7 und 9 folgt direkt die Behauptung. □

Literatur

[1] *Wikipedia - Lyapunov stability.* http://en.wikipedia.org/wiki/Lyapunov_stability. Version: September 2014, Abruf: 8. September 2014

[2] Amann, H. : *Gewöhnliche Differentialgleichungen.* New York : Walter de Gruyter, 1995

[3] Cesari, L. : *Asymptotic behavior and stability problems in ordinary differential equations.* Berlin ; Heidelberg [u.a.] : Springer, 1971

[4] Dosch, T. : *Vortrag Differentialgleichungen, Dynamische Systeme, Flüsse und Vektorfelder.* http://analysis.math.uni-mannheim.de/lehre/hs1415/dglsem/skript/dosch_ausarbeitung.pdf. Version: 2014

[5] Nguyen, V. H.: *Hyperbolische lineare Flüsse.* http://analysis.math.uni-mannheim.de/lehre/hs1415/dglsem/skript/van_hoan_nguyen_ausarbeitung.pdf. Version: 2014

Der Vortrag orientiert sich im Wesentlichen an *Gewöhnliche Differentialgleichungen* von Herbert Amann.