Martin Schmidt
Sebastian Klein

Partielle Differentialgleichungen
12. Übung

20. November 2012

(abzugeben in der Vorlesung am 27. November 2012)

39. Mehr über die Spektraltheorie des Laplace-Operators.

Es sei $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit $\partial\Omega \in C^{0,1}$. Im Anschluß an Aufgabe 37 setzen wir unsere Untersuchung des Spektrums und der Eigenfunktionen des Laplace-Operators $\triangle$ auf Ω mit Nullrandwerten fort. Wir verwenden die dort eigeführten Bezeichnungen. Insbesondere bezeichnen wir als das Spektrum des Operators $\triangle$ auf $W_0^{1,2}(\Omega)$ die Menge seiner Eigenwerte.*

(a) Sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von in $L^2(\Omega)$ paarweise orthonormalen Funktionen $u_n \in W_0^{1,2}(\Omega)$, so dass jeweils u_n eine Eigenfunktion des Laplace-Operators zum Eigenwert $\lambda_n \in \mathbb{R}$ ist. Zeige, dass die Folge $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt ist. *(12 Punkte)*

[Tipp. Unter der Annahme, dass (λ_n) beschränkt wäre, zeige man mittels des Satzes von Rellich 3.39, dass die Folge (u_n) eine in $L^2(\Omega)$ gegen ein $u \in L^2(\Omega)$ konvergente Teilfolge besitzt. Man zeige dann, dass einerseits $\|u\|_{L^2(\Omega)} = 1$ gelten muss, dass aber andererseits aus der Orthonormalität der u_n folgt: $\|u\|_{L^2(\Omega)} = 0$.]

(b) Folgere aus (a): Die Eigenräume von $\triangle$ sind endlich-dimensional, und das Spektrum von $\triangle$ ist diskret. Daher existiert eine kleinste reelle Zahl $\lambda_1 > 0$ im Spektrum von $\triangle$.

(10 Punkte)

(c) Bestimme in der Poincaré-Ungleichung für $W_0^{1,2}(\Omega)$

$$\forall u \in W_0^{1,2}(\Omega)\ :\ \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \cdot \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

die kleinstmögliche Wahl für die Konstante $C < \infty$ in Abhängigkeit von λ_1. *(10 Punkte)*

[Tipp. Aufgabe 37(c).]

(d) Man kann zeigen (das soll hier nicht bewiesen werden), dass das in Aufgabe 37(c),(d) konstruierte Orthonormalsystem (a_n) tatsächlich sogar eine „abzählbare Orthonormalbasis“ von $L^2(\Omega)$ ist. Das bedeutet, dass für jedes $f \in L^2(\Omega)$ die folgende Gleichung gilt, wobei die rechtsstehende Summe in $L^2(\Omega)$ absolut konvergiert:

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, a_n \rangle_{L^2(\Omega)} \cdot a_n \,.$$

Man erläutere, auf welche Weise man aufgrund dieser Tatsache (und ohne Verwendung des Existenzsatzes 4.3) zeigen kann, dass für $f \in W_0^{1,2}(\Omega)^*$ das Dirichlet-Problem $-\triangle u = f$, $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ genau eine Lösung besitzt, und wie man diese konstruieren kann.

(10 Punkte)

40. Glattheit von Lösungen der Poisson-Gleichung bei glatter Inhomogenität.

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen, $f \in C^\infty(\Omega)$ und $u \in W_{loc}^{1,2}(\Omega) \cap L_{loc}^\infty(\Omega)$ eine schwache Lösung von $\triangle u = f$ auf Ω. Zeige, dass $u \in C^\infty(\Omega)$ ist, und dass $\triangle u = f$ im starken Sinne gilt. *(8 Punkte)*

[Tipp. Man zeige durch eine lokale Betrachtung, dass $u \in C^k(\Omega)$ für $k \in \mathbb{N}$ ist. Dazu verwende man Satz 4.9 und den Satz von Morrey 3.46.]

*Diese Definition des Spektrums ist auf die konkrete Situation der Aufgabe zugeschnitten. In der allgemeinen Theorie linearer Operatoren auf Banachräumen muss man eine erweiterte Definition des Spektrums verwenden.

41. Die Kontinuitätsmethode.

Es sei $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit $\partial\Omega \in C^{0,1}$, und L ein elliptischer Differentialoperator auf Ω in Divergenzform, das heißt, L ist von der Form von Gleichung (4.1) des Skripts, und es gelten die Gleichungen (4.2), (4.3) mit einem $\Lambda \in (1, \infty)$. Außerdem gelte die Bedingung (4.6) aus dem schwachen Maximumprinzip 4.2.

In der Aufgabe soll ein alternativer Beweis dafür geführt werden, dass für $f \in W_0^{1,2}(\Omega)$ und $\varphi \in W^{1,2}(\Omega)$ das Dirichletproblem

$$Lu = f \text{ auf } \Omega\,; \quad u - \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$$

genau eine Lösung $u \in W^{1,2}(\Omega)$ besitzt. Dafür können wir uns, wie aus der Vorlesung bekannt ist, auf den Fall $\varphi = 0$ beschränken. Man folge nun den folgenden Beweisschritten, ohne den Existenzsatz für das Dirichletproblem 4.3 zu verwenden:

(a) Für $t \in [0, 1]$ betrachten wir

$$L_t := (1-t)\triangle + tL : W_0^{1,2}(\Omega) \to W_0^{1,2}(\Omega)^*\,.$$

Man zeige, dass L_t ein stetiger, linearer und injektiver Operator mit

$$\|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \leq C \cdot \|L_t u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)^*}$$

ist; dabei ist $C < \infty$ eine von $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ und $t \in [0, 1]$ unabhängige Konstante. Daher ist L_t genau dann ein Isomorphismus, wenn L_t surjektiv ist. *(5 Zusatzpunkte)*

[Tipp. Lemma 4.4. Dabei darf ohne Beweis benutzt werden, dass die Konstante C in Lemma 4.4 so gewählt werden kann, dass sie nicht von den spezifischen Differentialoperatoren L_m, L, sondern nur von der zu diesen gehörenden Elliptizitäts-Konstanten Λ abhängt.]

(b) Zeige, dass die Menge

$$A := \{\, t \in [0, 1] \mid L_t \text{ ist ein Isomorphismus} \,\}$$

abgeschlossen in $[0, 1]$ ist. *(5 Zusatzpunkte)*

[Tipp. Sei $f \in W_0^{1,2}(\Omega)^*$ vorgegeben, und (t_n) eine Folge in A, die in $[0, 1]$ gegen ein $t \in [0, 1]$ konvergiert. Dann existiert jeweils ein $u_n \in W_0^{1,2}(\Omega)$ mit $L_{t_n} u_n = f$. Man verwende die Sätze von Rellich (Satz 3.39) und Alaoglu (siehe Aufgabe 37(c)(ii)), um zu zeigen, dass eine Teilfolge von (u_n) in $W_0^{1,2}(\Omega)$ schwach gegen ein $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ konvergiert, und dass für dieses $L_t u = f$ gilt.]

(c) Man entnehme aus Aufgabe 39(d), dass $0 \in A$ ist. *(2 Zusatzpunkte)*

(d) Zeige, dass A in $[0, 1]$ offen ist. *(6 Zusatzpunkte)*

[Tipp. Ist $t_0 \in A$ und $t \in [0, 1]$, so schreibe man die Gleichung $L_t u = f$ als Fixpunktgleichung $u = L_{t_0}^{-1}(f - (t - t_0)Lu)$, und wende den Banachschen Fixpunktsatz an.]

(e) Folgere nun, dass $A = [0, 1]$ ist. *(2 Zusatzpunkte)*