Partielle Differentialgleichungen

Martin Schmidt
Sebastian Klein

7. Übung

16. Oktober 2012

(abzugeben in der Vorlesung am 23. Oktober 2012)

22. Über den Dualraum von $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Sei $1 \leq p < \infty$. Wie in der Vorlesung betrachten wir $L^p(\mathbb{R}^n)$ als Banachraum mittels der Norm

$$\|\cdot\|_p : L^p(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{1/p} .$$

Es sei nun q der zu p konjugierte Exponent, d.h. diejenige Zahl, für die $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gilt. In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass $L^q(\mathbb{R}^n)$ linear isometrisch isomorph zu einem Unterraum des Dualraums $L^p(\mathbb{R}^n)' := \mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}^n), \mathbb{R})$ ist. (Tatsächlich ist $L^q(\mathbb{R}^n)$ zu ganz $L^p(\mathbb{R}^n)'$ isomorph.)

Zu diesem Zweck betrachten wir die lineare Abbildung

$$j : L^q(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)', \; g \mapsto j(g) \quad \text{mit} \quad j(g)(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f g \, \mathrm{d}\mu \text{ für } f \in L^p(\mathbb{R}^n) .$$

Wir werden beweisen, dass j eine isometrische Einbettung ist, d.h. dass $\|g\|_q = \|j(g)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)'}$ für alle $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ gilt.

(a) Zeige mithilfe der Hölderschen Ungleichung, dass die Abbildung j Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante $L = 1$ ist; insbesondere gilt $\|j(g)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)'} \leq \|g\|_q$. *(3 Punkte)*

(b) Finde zu gegebenem $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ eine Funktion $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, für die in der Hölderschen Ungleichung Gleichheit gilt, d.h. so dass $\|f\,g\|_1 = \|f\|_p \cdot \|g\|_q$ gilt. *(4 Punkte)*

(c) Verwende (b), um zu folgern, dass $\|j(g)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)'} \geq \|g\|_q$ für alle $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ gilt. Somit ist j eine isometrische Einbettung. *(3 Punkte)*

23. Rechnen in Sobolevräumen.

(a) Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; x \mapsto \begin{cases} 1 + x & \text{für } -1 \leq x \leq 0 \\ 1 - x & \text{für } \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

sowie die von ihr induzierte Distribution

$$F : C_0^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \; \phi \mapsto F(\phi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot \phi(x) \, \mathrm{d}x .$$

(i) Skizziere den Graphen von f. *(2 Punkte)*

(ii) Bestimme die erste Ableitung der Distribution F. *(4 Punkte)*

(iii) Zeige, dass die zweite Ableitung der Distribution F eine Linearkombination von Dirac-Distributionen ist. *(4 Punkte)*

(iv) Folgere aus (i) und (ii), dass $f \in W^{1,1}(\mathbb{R})$, aber $f \notin W^{2,1}(\mathbb{R})$ gilt. *(2 Punkte)*

(b) Es sei $u \in W^{2,1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ mit $\partial^\alpha u = 0$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| = 2$. Zeige, dass u fast überall affin ist, d.h. es gibt $a \in \mathbb{R}^n$ und $b \in \mathbb{R}$, so dass für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt: $u(x) = a \cdot x + b$. *(6 Punkte)*

[Tipp. Man wende zunächst für $i \in \{1, \dots, n\}$ Proposition 3.20 auf $\partial_i u$ an. Sodann überlege man sich, warum Proposition 3.20 richtig bleibt, wenn die dortige Voraussetzung $\nabla u = 0$ nur fast überall erfüllt ist, und wende dann die derart modifizierte Proposition 3.20 ein weiteres Mal auf $\widetilde{u} := u -???$ an.]

(c) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u, v \in W^{1,2}(\Omega)$.

(i) Zeige, dass $|u| \in W^{1,2}(\Omega)$ ist, und bestimme den schwachen Gradienten von $|u|$. *(6 Punkte)*

(ii) Zeige mit Hilfe von (i), dass auch $w_+ := \max\{u, v\}$ und $w_- := \min\{u, v\}$ in $W^{1,2}(\Omega)$ liegen, und bestimme die Gradienten dieser beiden Funktionen. *(4 Punkte)*
[Tipp. $w_\pm(x) = \frac{1}{2}\big(u(x) + v(x) \pm |u(x) - v(x)|\big)$.]

24. Über die Distributionen zu Sobolevfunktionen auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

(a) Sei $u : \mathbb{R}^n \setminus N \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die auf $\mathbb{R}^n$ mit Ausnahme einer Nullmenge N definiert ist. Zeige, dass wenn $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ ist, dann durch

$$F_u : C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R},\ \phi \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} u \cdot \phi \, \mathrm{d}\mu$$

eine Distribution auf $\mathbb{R}^n$ definiert wird. *(3 Punkte)*

(b) Sei nun $u \in W^{k,1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| \leq k$. Zeige: Dann ist $G := \partial^\alpha F_u - F_{\partial^\alpha u}$ eine Distribution auf $\mathbb{R}^n$ mit Träger $\mathrm{Tr}(G) \subset \{0\}$. *(4 Punkte)*

Bemerkung. Es braucht durchaus nicht immer $G = 0$ zu sein; daher genügt es zur Bestimmung der Ableitung der Distribution F_u *nicht*, die entsprechende Ableitung von u zu berechnen. So kann man beispielsweise zeigen, dass wenn $v = \Phi$ die Fundamentallösung der Laplace-Gleichung ist (siehe Aufgabe 10), dann $-\triangle F_\Phi(\phi) = \delta(\phi)$ gilt.

Die folgende Teilaufgabe läßt sich aber in der Situation von (b) anwenden; sind die Voraussetzungen erfüllt, gilt daher $\partial^\alpha F_u = F_{\partial^\alpha u}$.

(c) Sei $G : C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ eine Distribution auf $\mathbb{R}^n$ mit Träger $\mathrm{Tr}(G) \subset \{0\}$, für die es ein $c > 0$ gebe, so dass

$$\forall \lambda > 0,\ \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)\ :\ G(\phi_\lambda) = \lambda^{-c} \cdot G(\phi)$$

gilt; hierbei definieren wir für $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$: $\phi_\lambda(x) := \phi(\lambda x)$.

Zeige, dass $G = 0$ gilt. *(5 Punkte)*

[Tipp. Sei $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ gegeben. Man fixiere eine Funktion $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\mathrm{Tr}(\psi) \subset B(0,1)$ und $\psi | B(0, \frac{1}{2}) \equiv 1$, und setze $f_\lambda := \lambda^c \cdot \psi \cdot \phi_\lambda$ für $\lambda > 0$. Nun zeige man (1): $G(f_\lambda) = G(\phi)$. Andererseits zeige man, dass für jedes $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ die Funktionen $(\partial^\alpha f_\lambda)$ für $\lambda \to 0$ gleichmäßig gegen Null konvergieren, und folgere hieraus (2): $\lim_{\lambda \to 0} G(f_\lambda) = 0$. Durch Kombination von (1) mit (2) erhält man $G(\phi) = 0$.]