Partielle Differentialgleichungen

Martin Schmidt
Sebastian Klein

8. Übung

23. Oktober 2011

(abzugeben in der Vorlesung am 30. Oktober 2011)

25. Eine Ungleichung für Funktionen aus $W_0^{2,2}(\Omega)$.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt, und mit glattem Rand, sowie $u \in W_0^{2,2}(\Omega)$. Zeige die folgende Ungleichung:

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \cdot \|\triangle u\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} .$$

(12 Punkte)

[Tipp. Betrachte zunächst $u \in C_0^\infty(\Omega)$ und integriere dann $\int_\Omega |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}\mu$ partiell gemäß Aufgabe 2(b).]

26. $\|x\|^\gamma$ als Sobolevfunktion.

Sei $\gamma \in \mathbb{R}$ und $u : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definiert durch $u(x) := \|x\|^\gamma$. Sei weiter $\dot{\Omega} := B(0,1) \setminus \{0\}$, $k \in \mathbb{N}$ und $1 \leq p < \infty$. Wir wollen untersuchen, unter welchen Voraussetzungen (an n, k, p und γ) $u|\dot{\Omega} \in W^{k,p}(B(0,1))$ gilt.

(a) Zeige: Genau dann, wenn $\gamma > -n$ ist, wird durch

$$F_u : C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}, \phi \mapsto F_u(\phi) = \int_{\mathbb{R}^n} u\phi \,\mathrm{d}\mu$$

eine Distribution auf $\mathbb{R}^n$ definiert. *(6 Punkte)*

[Tipp. Aufgabe 24(a). Außerdem beachte man, dass für jede radial-symmetrische Funktion $u(x) = \widehat{u}(\|x\|)$ gilt: $\int_{\overline{B(0,\varepsilon)}} u(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{vol}(\partial B(0,1)) \cdot \int_0^\varepsilon \widehat{u}(r) \cdot r^{n-1}\,\mathrm{d}r$.]

(b) Sei $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Zeige, dass es ein homogenes Polynom P_α vom Grad $|\alpha|$ und in n Variablen gibt, so dass $(\partial^\alpha u)(x) = P_\alpha(x) \cdot \|x\|^{\gamma - 2|\alpha|}$ gilt. *(6 Punkte)*

[Tipp. Vollständige Induktion nach $|\alpha|$. Im Induktionsschritt ist es zweckmäßig, $\|x\|^{\gamma-2|\alpha|} = (x \cdot x)^{\gamma/2 - |\alpha|}$ zu schreiben.]

(c) Zeige für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ die Gleichung

$$\int_{B(0,1)} |\partial^\alpha u(x)|^p \,\mathrm{d}\mu = \int_{\partial B(0,1)} |\partial^\alpha u(x)|^p \,\mathrm{d}\sigma \cdot \int_0^1 r^{(\gamma - |\alpha|)p} \cdot r^{n-1}\,\mathrm{d}r$$

und folgere, dass im Falle $\gamma > |\alpha| - \frac{n}{p}$ gilt: $\partial^\alpha u|\dot{\Omega} \in L^p(B(0,1))$. *(6 Punkte)*

[Tipp. (b) und Kugelkoordinaten.]

(d) Zeige nun, dass $u|\dot{\Omega} \in W^{k,p}(B(0,1))$ für $\gamma > k - \frac{n}{p}$ gilt. *(6 Punkte)*

[Tipp. Man mache sich anhand der Definition von $W^{k,p}(B(0,1))$ klar, dass es für gegebenes $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| \leq k$ wegen (c) ausreicht, $G := \partial^\alpha F_u - F_{\partial^\alpha u} = 0$ zu zeigen. Hierfür verwende man Aufgabe 24(b),(c); man verwende ohne erneuten Beweis, dass die Aussage von Aufgabe 24(b) richtig bleibt, wenn der Raum $W^{k,1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ durch $W^{k,r}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ ersetzt wird.]

27. Der Divergenzsatz von Gauß für Lipschitz-stetige Vektorfelder.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit Lipschitz-stetigem Rand (s.u.), und sei $f = (f_1, \ldots, f_n) \in (C^{0,1}(\Omega))^n$ ein Lipschitz-stetiges Vektorfeld. Da nach Proposition 3.24 $C^{0,1}(\Omega) \subset W^{1,\infty}(\Omega)$ gilt, können wir im schwachen Sinne die Divergenz $\nabla \cdot f$ von f bilden. In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass in dieser Situation der Divergenzsatz von Gauß, d.h. die Formel

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot f \,\mathrm{d}\mu = \int_{\partial\Omega} f \cdot N \,\mathrm{d}\sigma \tag{$*$}$$

gilt.

Dabei sagen wir, dass „ Ω einen Lipschitz-stetigen Rand hat“, wenn es eine Überdeckung des Randes $\partial\Omega$ durch endlich viele offene Mengen $U_1, \dots, U_N \subset \mathbb{R}^n$ sowie zu jedem $i \in \{1, \dots, N\}$ ein $x_i \in U_i \cap \partial\Omega$, eine Zahl $\rho_i > 0$ sowie eine Funktion $\varphi_i \in C^{0,1}(B^{n-1}(0, \rho_i))$ mit $M_i := \|\varphi_i\|_\infty < \infty$ gibt, so dass

$$\begin{aligned} \{x - x_i \mid x \in U_i \cap \Omega\} &= \{(y,t) \in B^{n-1}(0,\rho_i) \times (-M_i, M_i) \mid t > \varphi_i(y)\} \quad \text{und} \\ \{x - x_i \mid x \in U_i \cap \partial\Omega\} &= \{(y,t) \in B^{n-1}(0,\rho_i) \times (-M_i, M_i) \mid t = \varphi_i(y)\} \end{aligned}$$

gilt. Ist dies der Fall, so definieren wir die rechte Seite von $(*)$ mittels einer Zerlegung der Eins $h_1, \dots, h_N$ (siehe Definition 1.3) mit $\mathrm{Tr}(h_i) \subset U_i$ durch

$$\int_{\partial\Omega} f \cdot N \,\mathrm{d}\sigma = -\sum_{i=1}^{N} \int_{B^{n-1}(0,\rho_i)} h_i f(y, \varphi_i(y)) \cdot (\nabla_y \varphi(y), 1) \,\mathrm{d}^{n-1} y \,. \tag{$**$}$$

(a) Zeige, dass Ω genau dann stetig differenzierbaren Rand im Sinne von Definition 1.5 hat, wenn es möglich ist, die obige Definition mit $\varphi_i \in C^1(B^{n-1}(0,\rho_i))$ für $i \in \{1, \dots, N\}$ zu erfüllen. Zeige weiter, dass wenn dies der Fall ist, die Definitionen von $\int_{\partial\Omega} f \cdot N \,\mathrm{d}\sigma$ in $(**)$ bzw. in Definition 1.5 zum selben Ergebnis führen. *(8 Punkte)*

[Tipp. $\Phi_i(z,s) = \big(z - (x_{i,1}, \dots, x_{i,n-1})\,,\; s - x_{i,n} - \varphi_i(z - (x_{i,1}, \dots, x_{i,n-1}))\big)$ für $z \in \mathbb{R}^{n-1}$, $s \in \mathbb{R}$.]

(b) Sei $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ invertierbar mit $\det(A) > 0$ und $f \in (C^\infty(\Omega))^n$. Zeige, dass dann die Gleichung $(*)$ für f über Ω genau dann gilt, wenn sie für $f_A := A \cdot f \circ A^{-1}$ über $\Omega_A := A[\Omega]$ gilt. *(6 Punkte)*

[Tipp. Zur Berechnung der rechten Seite von $(*)$ verwende man Definition 1.5.]

(c) Sei $f \in \left(W_0^{1,\infty}(B^{n-1}(0,\rho) \times (-M, M))\right)^n$ und $\varphi \in C^{0,1}(B^{n-1}(0,\rho))$ mit $\|\varphi\|_\infty < M < \infty$. Wir setzen voraus, dass für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ und alle $y \in B(0,\rho)$ die Abbildung $t \mapsto \varphi(y + te_i)$ auf $\{t \in \mathbb{R} \mid y + te_i \in B(0,\rho)\}$ bijektiv ist.

Zeige, dass dann gilt:

$$\int_{B^{n-1}(0,\rho)} \int_{-M}^{\varphi(y)} \nabla \cdot f(y,t) \,\mathrm{d}^{n-1} y \, dt = \int_{B^{n-1}(0,\rho)} f(y, \varphi(y)) \cdot (\nabla_y \varphi, 1) \,\mathrm{d}^{n-1} y \,.$$

(8 Zusatzpunkte)

(d) Zeige, dass für $f = (f_1, \dots, f_n) \in (C^{0,1}(\Omega))^n$ der Divergenzsatz $(*)$ gilt. *(7 Zusatzpunkte)*

[Tipp. Man wende (c) auf die Produkte $h_i \cdot f$ (an Stelle von f) und φ_i (an Stelle von φ) an. Dabei verwende man den Fortsetzungssatz 3.29, um den Definitionsbereich von $h_i \cdot f$ auf $B^{n-1}(0,\rho) \times (-M, M))$ auszuweiten, und man verwende (b), um die Situation so einzurichten, dass die Bijektivitäts-Voraussetzung aus (c) erfüllt ist.]