Partielle Differentialgleichungen

Martin Schmidt
Sebastian Klein

3. Übung

18. September 2012

(abzugeben in der Vorlesung am 25. September 2012)

9. Ein Detail aus dem Beweis der Mittelwerteigenschaft harmonischer Funktionen.

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, und $\partial B(x_0, r) := \{\, x \in \mathbb{R}^n \,\big|\, \|x - x_0\| = r \,\}$ für $r > 0$. Dann betrachte man die Funktion

$$\Phi(r) := \frac{1}{\sigma(\partial B(x_0, r))} \int_{\partial B(x_0,r)} f(x)\,\mathrm{d}\sigma(x)\,.$$

Zeige $\lim_{r\to 0} \Phi(r) = f(x_0)$. *(5 Punkte)*

10. Fundamentallösung der Laplace-Gleichung. Sei $n \geq 2$.

(a) Es sei $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ rotations-symmetrisch, d.h. es gelte $u(x) = v(\|x\|)$ mit einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion $v : [0, \infty) \to \mathbb{R}$. Zeige, dass dann

$$\triangle u(x) = \|x\|^{1-n} \cdot \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right|_{r=\|x\|} \left(r^{n-1} \cdot v'(r)\right)$$

gilt. *(4 Punkte)*

(b) Wir bezeichnen mit $\omega_n := \int_{\{\, x \in \mathbb{R}^n \,|\, \|x\| \leq 1 \,\}} 1\,\mathrm{d}^n x$ das Volumen der Einheitsvollkugel im $\mathbb{R}^n$. Zeige, dass die Funktion

$$\Phi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log(\|x\|) & \text{für } n = 2 \\ \frac{1}{n\,(n-2)\,\omega_n} \|x\|^{2-n} & \text{für } n \geq 3 \end{cases}$$

harmonisch ist. Φ heißt die *Fundamentallösung der Laplace-Gleichung.*

Zeige auch:

$$\nabla \Phi = -\frac{1}{n\,\omega_n} \frac{x}{\|x\|^n}\,.$$

(6 Punkte)

11. Lösungen der Poisson-Gleichung. Es sei $n \geq 2$ und Φ die Fundamentallösung der Laplace-Gleichung wie in Aufgabe 10. Weiter sei eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger gegeben. Wir wollen zeigen, dass die Faltung von f mit Φ eine Lösung der Poisson-Gleichung $-\triangle u = f$ auf $\mathbb{R}^n$ ist.

Dazu gehen wir in mehreren Schritten vor:

(a) Begründe, dass das Integral $\int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)\,\Phi(y)\,\mathrm{d}^n y$ für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ wohldefiniert ist (obwohl Φ in Null nicht definiert ist), und zeige, dass die hierdurch definierte Funktion

$$u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ x \mapsto (f * \Phi)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)\,\Phi(y)\,\mathrm{d}^n y$$

zweimal stetig differenzierbar ist, und dass

$$\triangle u = \int_{\mathbb{R}^n} \triangle f(x - y) \cdot \Phi(y)\,\mathrm{d}^n y \tag{$*$}$$

gilt. *(4 Punkte)*

(b) Sei nun $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann zerlegen wir das Integral $(*)$ in einen Anteil nahe der Singularität von Φ, und einen von der Singularität entfernten Anteil:

$$I_\varepsilon := \int_{B(0,\varepsilon)} \triangle f(x-y) \cdot \Phi(y) \,\mathrm{d}^n y \,,$$
$$J_\varepsilon := \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\varepsilon)} \triangle f(x-y) \cdot \Phi(y) \,\mathrm{d}^n y \,.$$

Zeige, dass $\lim_{\varepsilon \to 0+} I_\varepsilon = 0$ ist. *(6 Punkte)*

(c) Zeige, dass für J_ε gilt:

$$J_\varepsilon = -\int_{\partial B(0,\varepsilon)} f(x-y) \cdot \nabla_y \Phi(y) \cdot N \mathrm{d}\sigma(y) + L_\varepsilon \,,$$

wobei L_ε ein Ausdruck ist, der für $\varepsilon \to 0$ gegen Null konvergiert. *(6 Punkte)*

[Tipp. Aufgabe 2(b), dann Gaußscher Integralsatz, dann nochmals Aufgabe 2(b), und ausnutzen, dass Φ nach Aufgabe 10(b) auf $\mathbb{R}^n \setminus B(0,\varepsilon)$ harmonisch ist.]

(d) Begründe, dass $\int_{\partial B(0,\varepsilon)} f(x-y) \cdot \nabla_y \Phi(y) \cdot N \mathrm{d}\sigma(y)$ der Mittelwert von f auf $\partial B(x,\varepsilon)$ ist, und folgere daraus $-\triangle u = f$. *(4 Punkte)*

[Tipp. Man verwende die Formel für $\nabla \Phi$ aus Aufgabe 10(b), und überlege sich, dass das nach innen weisende Einheitsnormalenfeld an $\partial B(0,\varepsilon)$ durch $N(x) = -\frac{x}{\|x\|}$ gegeben ist und dass für das Volumen σ_n der Einheitssphäre $\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1 \}$ gilt: $\sigma_n = n \cdot \omega_n$. Für die Folgerung beachte man Aufgabe 9.]

12. Subharmonische Funktionen.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein offenes, zusammenhängendes Gebiet. Eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $v : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ heißt *subharmonisch*, wenn $-\triangle v \leq 0$ auf Ω gilt.

(a) Sei $v : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ subharmonisch. Zeige, dass für alle $x \in \Omega$ und $r > 0$ mit $B(x,r) \subset \Omega$ gilt:

$$v(x) \leq \frac{1}{r^{n-1}\, n\, \omega_n} \int_{\partial B(x,r)} v(y)\, d\sigma(y) \,.$$

[Tipp: Man adaptiere den Beweis der Mittelwerteigenschaft 2.1.] *(5 Punkte)*

(b) Folgere aus (a): Nimmt v auf Ω den Wert $\sup_{x \in \Omega} v(x)$ an, so ist v konstant. *(4 Punkte)*

(c) Sei nun $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ eine harmonische Funktion. Zeige:

(i) $\|\nabla u\|^2$ ist subharmonisch. *(3 Punkte)*

(ii) Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine glatte, konvexe Funktion, so ist $f \circ u$ subharmonisch. *(3 Punkte)*