Partielle Differentialgleichungen

Martin Schmidt
Sebastian Klein

11. Übung

13. November 2012

(abzugeben in der Vorlesung am 20. November 2012)

36. Divergenz und Rotation.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann heißt ein Vektorfeld $f = (f_1, \dots, f_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ mit $f_k \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ eine schwache Lösung der Differentialgleichung $\nabla \cdot f = 0$, falls

$$\int_\Omega f \cdot \nabla\phi = 0 \quad \text{für alle} \quad \phi \in C^1_0(\Omega)$$

gilt.

Sei nun $n = 3$. Dann ist die *Rotation* eines Vektorfeldes $u = (u_1, u_2, u_3) : \Omega \to \mathbb{R}^3$ mit $u_k \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ durch

$$\nabla \times u := (\partial_2 u_3 - \partial_3 u_2,\, \partial_3 u_1 - \partial_1 u_3,\, \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1)$$

definiert.

Man zeige, dass die Rotation $f := \nabla \times u$ von u eine schwache Lösung der Differentialgleichung $\nabla \cdot f = 0$ ist. *(10 Punkte)*

37. Aus der Spektraltheorie des Laplace-Operators.

Sei $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit $\partial\Omega \in C^{0,1}$. Ein $u \in W^{1,2}_0(\Omega) \setminus \{0\}$ heißt *Eigenfunktion des Laplace-Operators mit Nullrandwerten* zum *Eigenwert* $\lambda \in \mathbb{R}$, wenn im schwachen Sinne

$$-\triangle u = \lambda u$$

gilt. Die Menge der Eigenwerte des Laplace-Operators wird dessen *Spektrum* genannt.

(a) Zeige: Sind $u_1, u_2 \in W^{1,2}_0(\Omega)$ Eigenfunktionen von $\triangle$ zu verschiedenen Eigenwerten, so ist $\langle u_1, u_2 \rangle_{L^2(\Omega)} = 0$. *(8 Punkte)*

(b) Zeige, dass für jeden Eigenwert λ von $\triangle$ gilt: $\lambda > 0$. *(8 Punkte)*

(c) Es sei $W \neq \{0\}$ ein abgeschlossener Untervektorraum von $W^{1,2}_0(\Omega)$ derart, dass das Orthokomplement von W in $W^{1,2}_0(\Omega)$ von Eigenfunktionen von $\triangle$ aufgespannt wird. ($W = W^{1,2}_0(\Omega)$ ist zugelassen.) Wir zeigen, dass W eine Eigenfunktion von $\triangle$ enthält. Dazu betrachten wir die „Einheitssphäre“ $S_W := \{\, u \in W \mid \|u\|_{L^2(\Omega)} = 1 \,\}$ in W, auf dieser die Funktion

$$F : S_W \to \mathbb{R},\ u \mapsto \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}\mu\,,$$

und setzen $\lambda := \inf\{\, F(u) \mid u \in S_W \,\} \geq 0$. Wegen der Definition des Infimums λ existiert eine Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in S_W, so dass $\lambda_n := F(u_n) \geq \lambda$ und $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda$ ist.

(i) Zeige mithilfe des Satzes von Rellich 3.39, dass es eine Teilfolge $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von (u_n) gibt, die in $L^2(\Omega)$ gegen ein $u \in L^2(\Omega)$ konvergiert. *(6 Zusatzpunkte)*

(ii) Zeige mithilfe des Satzes von Alaoglu, dass tatsächlich $u \in S_W$ und $F(u) = \lambda$ ist. Dabei besagt der Satz von Alaoglu, dass für jedes $R > 0$ der abgeschlossene Ball $\overline{B(0,R)}$ in $W^{1,2}_0(\Omega)$ schwach folgenkompakt ist, das bedeutet: Ist (u_n) eine beschränkte Folge in $W^{1,2}_0(\Omega)$, so existiert eine Teilfolge (u_{n_k}) von (u_n), die in folgendem schwachen Sinne gegen ein $u \in W^{1,2}_0(\Omega)$ konvergiert: Für jedes $v \in W^{1,2}_0(\Omega)$ gilt $\lim_{k\to\infty} \langle u_{n_k}, v \rangle_{W^{1,2}_0(\Omega)} = \langle u, v \rangle_{W^{1,2}_0(\Omega)}$. *(7 Zusatzpunkte)*

(iii) Zeige, dass u eine Eigenfunktion von $\triangle$ zum Eigenwert λ ist. *(7 Zusatzpunkte)*
[Tipp. Zu zeigen ist, dass für alle $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ gilt: $\langle \nabla u, \nabla v \rangle_{L^2(\Omega)} = \lambda \langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)}$. Dafür unterscheide man drei Fälle: (1) $v \in \mathbb{R}u$, (2) $v \in S_W$ mit $v \perp u$ und (3) $v \perp W$. Für den Fall (2) betrachte man die Kurve $\gamma(t) := \cos(t)\, u + \sin(t)\, v$ in $W_0^{1,2}(\Omega)$. Man zeige, dass γ in S_W verläuft, und untersuche die Funktion $f(t) := F(\gamma(t))$. Im Fall (3) benutze man die Voraussetzung, dass das Orthokomplement von W in $W_0^{1,2}(\Omega)$ von Eigenfunktionen von $\triangle$ aufgespannt wird.]

(d) Zeige, dass es ein abzählbar unendliches Orthonormalsystem in $L^2(\Omega)$ gibt, das aus Eigenfunktionen von $\triangle$ besteht, das heißt: Es existiert eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Eigenfunktionen von $\triangle$, so dass für alle $n, m \in \mathbb{N}$

$$\langle a_n, a_m \rangle_{L^2(\Omega)} = \begin{cases} 1 & \text{falls } m = n \\ 0 & \text{falls } m \neq n \end{cases}$$

gilt. *(9 Punkte)*
[Tipp. Man konstruiere die a_n sukzessive durch vollständige Induktion, und verwende dabei (c) sowohl für den Induktionsanfang als auch im Induktionsschluß.]

38. Über den Satz von Friedrichs.

Wir betrachten die offenen, reellen Intervalle $I := (-2, 2)$ und $J := (-1, 1)$. Es sei $a \in L^\infty(I) \setminus W^{1,2}(J)$ mit $a \geq 1$, und

$$u : I \to \mathbb{R},\ t \mapsto u(t) := \int_0^t \frac{1}{a(x)}\, \mathrm{d}x\,.$$

(a) Zeige $u \in W^{1,2}(I)$ und $u \notin W^{2,2}(J)$. *(5 Punkte)*

(b) Zeige, dass u eine schwache Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$(au')' = 0 \quad \text{auf } I$$

ist. *(5 Punkte)*

(c) Man untersuche, welche der Voraussetzungen des Satzes von Friedrichs 4.6 in dieser Situation erfüllt sind, und welche im Allgemeinen nicht. Warum steht das Ergebnis von (a), (b) nicht im Widerspruch zum Satz von Friedrichs? *(5 Punkte)*