Martin Schmidt
Sebastian Klein

# Partielle Differentialgleichungen
## 9. Übung

30. Oktober 2012

(abzugeben in der Vorlesung am 6. November 2012)

**28. Vertauschbarkeit der zweiten partiellen Ableitungen.**

Seien $1 \leq p < \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u \in W^{2,p}(\Omega)$. Zeige, dass dann für $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ gilt: $\partial_i u, \partial_j u \in W^{1,p}(\Omega)$ und

$$\partial^{e_i + e_j} u = \partial_i(\partial_j u) = \partial_j(\partial_i u)$$

fast überall. *(6 Punkte)*

**29. In $W^{1,2}(\Omega)$ liegen die essentiell beschränkten Funktionen dicht.**

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, und $\chi_\Omega : \mathbb{R}^n \to \{0,1\}$ die Indikatorfunktion der Menge $\Omega$ (d.h. $\chi_\Omega|\Omega \equiv 1$ und $\chi_\Omega|(\mathbb{R}^n \setminus \Omega) \equiv 0$).

**(a)** Zeige: Ist $u \in W^{1,2}(\Omega)$ und $k \in \mathbb{N}$, so ist

$$u_k := \max\{\, -k \cdot \chi_\Omega \,,\, \min\{u, k \cdot \chi_\Omega\} \,\}$$

ein Element von $L^\infty(\Omega) \cap W^{1,2}(\Omega)$. Man bestimme außerdem die schwache Ableitung von $u_k$. *(6 Punkte)*

[Tipp. Aufgabe 23(c)(ii).]

**(b)** Zeige, dass $L^\infty(\Omega) \cap W^{1,2}(\Omega)$ in $W^{1,2}(\Omega)$ dicht liegt. *(6 Punkte)*

[Tipp. Zu gegebenem $u \in W^{1,2}(\Omega)$ betrachte man die in (a) definierte Funktionenfolge $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ und zeige $\lim\limits_{k \to \infty} \|u_k - u\|_{W^{1,2}(\Omega)} = 0$ mittels des Satzes von Lebesgue über die majorisierte Konvergenz.]

**30. Über den Zusammenhang zwischen Sobolev-Funktionen und ihren Randwerten.**

Das folgende Beispiel soll zeigen, dass in Proposition 3.32 auf die Voraussetzung, dass das Gebiet $\Omega$ Lipschitz-stetigen Rand habe, nicht verzichtet werden kann.

Dazu sei $B(0,1) = \{\, x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| < 1 \,\} \subset \mathbb{R}^3$ und $\Omega = B(0,1) \setminus \{0\}$.

**(a)** Man argumentiere kurz, warum $\Omega$ keinen Lipschitz-stetigen Rand besitzt. *(3 Punkte)*

Es sei nun $u \in C_0^\infty(B(0,1))$ beliebig, und $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ eine Funktion mit $0 \leq \psi \leq 1$, $\psi(r) = 1$ für $r \geq 1$ und $\psi(r) = 0$ für $r \leq \frac{1}{2}$. Ferner sei $u_n(x) := \psi(n\,\|x\|) \cdot u(x)$ für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}^3$.

**(b)** Zeige: $u_n \in C_0^\infty(\Omega)$ und $\lim\limits_{n \to \infty} \|u_n - u\|_{L^2(\Omega)} = 0$. *(6 Punkte)*

**(c)** Zeige, dass für die $j$-te partielle Ableitung von $u_n$

$$\partial_j u_n(x) = \psi(n\,\|x\|) \cdot \partial_j u(x) + n \cdot \psi'(n\,\|x\|) \cdot \frac{x_j}{\|x\|} \cdot u(x)$$

gilt. *(6 Punkte)*

**(d)** Zeige mithilfe von (b) und (c), dass $\lim\limits_{n \to \infty} \|u_n - u\|_{W^{1,2}(\Omega)} = 0$ gilt, und folgere daraus $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$. *(6 Punkte)*

**(e)** Folgere nun, dass es Funktionen $u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap W^{1,2}(\Omega)$ gibt, die zwar zu $W_0^{1,2}(\Omega)$ gehören, aber dennoch auf $\partial\Omega$ nicht verschwinden. *(3 Punkte)*

**31. Differentialoperatoren zweiter Ordnung in Divergenzform.**

Sei $\Omega \subset \mathrm{I\!R}^n$ offen. Ein Operator $L$ heißt *Differentialoperator zweiter Ordnung in Divergenzform*, wenn es Funktionen $a_{ij} \in W^{2,2}(\Omega)$, $b_i, c_i \in W^{1,2}(\Omega)$ und $d \in L^2(\Omega)$ gibt, so dass für jedes $u \in W^{1,2}(\Omega)$

$$Lu = \sum_{i=1}^{n} \partial_i \left( \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, \partial_j u + b_i\, u \right) + \sum_{i=1}^{n} c_i\, \partial_i u + d\, u$$

gilt.

Zeige, dass diese Form von Differentialoperatoren äquivalent zur Nicht-Divergenzform von Differentialoperatoren zweiter Ordnung (siehe Gleichung (2.3) in Definition 2.15) ist, das heißt, dass sich jeder in Nicht-Divergenzform gegebene Differentialoperator zweiter Ordnung (dessen Koeffizientenfunktionen aus den entsprechenden Sobolev-Räumen stammen) auch in Divergenzform schreiben lässt, und dass sich umgekehrt jeder in Divergenzform gegebene Differentialoperator zweiter Ordnung auch in Nicht-Divergenzform schreiben lässt. *(8 Punkte)*