Partielle Differentialgleichungen

Martin Schmidt | **10. Übung** | 6. November 2012

Sebastian Klein | (abzugeben in der Vorlesung am 13. November 2012)

32. Über schwache Lösungen elliptischer Differentialgleichungen.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, L ein elliptischer Differentialoperator wie in Definition 4.1,

$$\mathcal{L}(u,v) := \int_\Omega (Lu) \cdot v \ ,$$

$u \in W^{1,2}(\Omega)$ und $f \in W_0^{1,2}(\Omega)^*$.

(a) Wenn sowohl $Lu \geq f$ als auch $Lu \leq f$ gilt, so gilt für alle $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$: $\mathcal{L}(u,v) = -\langle f, v \rangle$. Ist dies der Fall, so schreiben wir auch kurz $Lu = f$ im schwachen Sinne. *(4 Punkte)*

(b) (i) Zeige, dass die folgende, durch Lu definierte Abbildung eine Distribution ist:

$$C_0^\infty(\Omega) \to \mathbb{R},\ \phi \mapsto -\mathcal{L}(u,\phi) \ . \qquad \textit{(3 Punkte)}$$

(ii) Zeige: Wenn sowohl $Lu \geq f$ als auch $Lu \leq f$ gilt, so folgt $Lu = f$ im Sinne von Distributionen. *(4 Punkte)*

(c) Sei nun $u \in W_{\text{loc}}^{1,2}(\Omega)$, $f \in L_{\text{loc}}^2(\Omega)$, so dass $\triangle u \geq f$ und $\triangle u \leq f$ im schwachen Sinne gilt. Zeige, dass für $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ im Sinne von Distributionen

$$\triangle(\phi u) = (\triangle \phi) u + 2 \nabla \phi \cdot \nabla u + \phi f$$

gilt. *(5 Punkte)*

33. Eine Differentialgleichung mit ganz vielen schwachen Lösungen.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen, und L der (nicht-elliptische) Differentialoperator auf Ω

$$Lu := \partial_1(\partial_2 u) - \partial_2(\partial_1 u) \ .$$

Zeige, dass für jedes $u \in W^{1,2}(\Omega)$ im schwachen Sinne $Lu = 0$ gilt. *(6 Punkte)*

[Tipp. Aufgabe 28. Man überlege sich aber auch, warum der bloße Verweis auf diese Aufgabe als Lösung noch nicht ausreicht.]

34. Schwache Lösungen der Poisson-Gleichung.

Im folgenden untersuchen wir ein Beispiel für Funktionen $u, f \in C(\Omega)$, so dass u eine schwache Lösung der Poisson-Gleichung zu f ist (d.h. $\triangle u = f$ im schwachen Sinne gilt), jedoch $u \notin C^2(\Omega)$ ist.

Zu diesem Zweck betrachten wir in $\mathbb{R}^2$ die offene Kreisscheibe

$$\Omega := B(0, \tfrac{1}{2}) := \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < \tfrac{1}{4} \,\} \ ,$$

setzen $\dot{\Omega} := \Omega \setminus \{0\}$, und definieren für $(x,y) \in \dot{\Omega}$

$$u(x,y) := (x^2 - y^2) \cdot \log|\log(r)| \quad \text{mit} \quad r := (x^2 + y^2)^{1/2} \ .$$

(a) Zeige: Es ist $u \in C^2(\dot{\Omega})$, und u lässt sich durch die Setzung $u(0,0) := 0$ stetig auf Ω fortsetzen. *(5 Punkte)*

[Tipp. Man zeige, dass für hinreichend kleine $r > 0$ gilt: $0 \leq \log|\log(r)| \leq \frac{1}{r}$.]

(b) Man rechne nach, dass für $(x,y) \in \dot{\Omega}$ gilt:

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x,y) = 2x \log|\log(r)| + (x^3 - y^2 x) \frac{1}{r^2 \log(r)} \, ,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,y) = 2 \log|\log(r)| + (5x^2 - y^2) \frac{1}{r^2 \log(r)} - (x^4 - x^2 y^2) \frac{2\log(r) + 1}{r^4 (\log(r))^2} \, . \quad \textit{(6 Punkte)}$$

(c) Man begründe, dass für $(x,y) \in \dot{\Omega}$ gilt: $\frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x,y) = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(y,x)$, und folgere hieraus mittels (b):

$$\triangle u(x,y) = (x^2 - y^2) \left(\frac{4}{r^2 \log(r)} - \frac{1}{r^2 (\log(r))^2} \right) \, .$$

Aus dieser Gleichung entnehme man $\lim_{r \to 0} \triangle u(x,y) = 0$; daher läßt(?) sich $\triangle u$ zu einer stetigen Fortsetzung g auf Ω fortsetzen. *(5 Punkte)*

(d) Zeige, dass $\triangle u = g$ im schwachen Sinne auf Ω gilt. Dazu zeige man für $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ und $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ die Formel

$$\int_{B(0,\frac{1}{2}) \setminus B(0,\varepsilon)} u \triangle \phi \, \mathrm{d}\mu = \int_{B(0,\frac{1}{2}) \setminus B(0,\varepsilon)} g \phi \, \mathrm{d}\mu + \int_{\partial B(0,\varepsilon)} (u \nabla \phi - \phi \nabla u) \cdot N \, \mathrm{d}\sigma \, . \quad \textit{(6 Punkte)}$$

(e) Es sei $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ mit $\psi(x,y) = 1$ auf einer Umgebung von 0 und wir setzen

$$f := \psi g + 2 \nabla \psi \cdot \nabla u + (\triangle \psi) u \in C(\Omega) \, .$$

Zeige mithilfe von Aufgabe 32(c), dass $\triangle(\psi u) = f$ im schwachen Sinne gilt. *(6 Punkte)*

35. Über das schwache Maximumprinzip.

Wir wollen zeigen, dass für elliptische Differentialoperatoren, deren Koeffizienten und Lösungen hinreichend glatt sind, das Schwache Maximumprinzip 4.2 aus dem klassischen Maximumprinzip in Gestalt von Korollar 2.18 folgt.

Dazu sei $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ offen, $a_{ij}, b_i, c_i, d \in C^2(\Omega)$ und $1 \le \Lambda < \infty$ derart, dass die Funktionen a_{ij}, $\partial_k a_{ik}$, b_i, $\partial_k b_i$, c_i und d alle durch Λ beschränkt sind, und dass

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \lambda_i \lambda_j \ge \Lambda^{-1} \|\lambda\|^2 \quad \text{für alle } \lambda \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \text{ und } x \in \overline{\Omega}$$

sowie fernerhin

$$\int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n b_i \partial_i v - dv \right) \ge 0 \quad \text{für alle } 0 \le v \in C_0^1(\Omega)$$

gilt. Weiter sei $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ mit

$$Lu := \sum_{i,j=1}^n \partial_i (a_{ij} \partial_j u + b_i u) + \sum_{i=1}^n c_i \partial_i u + du \ge 0 \quad \text{auf } \Omega \, .$$

Zeige mittels des klassischen Maximumprinzips (Korollar 2.18), dass dann $\sup_\Omega u \le \sup_{\partial\Omega} u_+$ gilt. *(10 Zusatzpunkte)*

[Tipp. Schreibe L in Nicht-Divergenzform.]