Partielle Differentialgleichungen

Martin Schmidt
Sebastian Klein

4. Übung

25. September 2012

(abzugeben in der Vorlesung am 2. Oktober 2012)

13. Harmonische Funktionen auf $B(0,1) \subset \mathbb{R}^2$.

Mit $B(0,1) := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 < 1\}$ bezeichnen wir die offene Einheitskreisscheibe in $\mathbb{R}^2$.

(a) Sei $u \in C^2(\overline{B(0,1)})$ eine auf $B(0,1)$ harmonische Funktion, die in Polarkoordinaten als $u = u(r,\varphi)$ (mit $0 \leq r \leq 1$ und $-\pi < \varphi \leq \pi$) gegeben sei. Zeige, dass dann

$$\int_{\partial B(0,1)} \frac{\partial u}{\partial r}(x)\,\mathrm{d}\sigma(x) = 0$$

gilt. *(10 Punkte)*

[Tipp. $0 = \int_{B(0,1)} \triangle u = \ldots$]

(b) „Errate“ jeweils eine Lösung $u \in C^2(\overline{B(0,1)})$ der folgenden sogenannten *Neumann-Probleme*, oder beweise, dass es keine solche Lösung gibt.

(i) $\triangle u = 0$ auf $B(0,1)$ mit $\frac{\partial u}{\partial r} = \sin(\varphi)$ auf $\partial B(0,1)$. *(4 Punkte)*

(ii) $\triangle u = 0$ auf $B(0,1)$ mit $\frac{\partial u}{\partial r} = \sin^2(\varphi)$ auf $\partial B(0,1)$. *(4 Punkte)*

14. Harmonische Polynome.

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $d \in \mathbb{N}_0$. Ein *reelles homogenes Polynom vom Grad d auf $\mathbb{R}^n$* ist eine Linearkombination von *Monomen* der Form $Q := x_1^{d_1} \cdot x_2^{d_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{d_n}$ mit $d_k \in \mathbb{N}_0$ und $d_1 + \ldots + d_n = d$; für jedes derartige Monom Q definieren wir außerdem $m(Q) := \max\{d_1, \ldots, d_n\}$.

Den Vektorraum der reellen homogenen Polynome vom Grad d auf $\mathbb{R}^n$ bezeichnen wir mit $\mathcal{P}(d,n)$. Ziel der Aufgabe ist es, die Dimension des Untervektorraums

$$\mathcal{H}(d,n) := \{ P \in \mathcal{P}(d,n) \,|\, \triangle P = 0 \}$$

der harmonischen Polynome in $\mathcal{P}(d,n)$ zu bestimmen. Dazu gehe man wie folgt vor:

(a) Man gebe ein kombinatorisches Argument an, warum $\dim \mathcal{P}(d,n) = \binom{n+d-1}{d}$ gilt. *(4 Punkte)*

(b) Zeige:

$$\triangle|_{\mathcal{P}(d,n)} \begin{cases} \equiv 0 & \text{für } d \in \{0,1\} \\ \subset \mathcal{P}(d-2,n) & \text{für } d \geq 2 \end{cases}.$$

(5 Punkte)

(c) Zeige, dass im Falle $d \geq 2$ die lineare Abbildung $\triangle : \mathcal{P}(d,n) \to \mathcal{P}(d-2,n)$ surjektiv ist. *(10 Punkte)*

[Tipp. Es genügt zu zeigen, dass die Monome $Q \in \mathcal{P}(d-2,n)$ im Bild von $\triangle|_{\mathcal{P}(d,n)}$ liegen. Dies beweise man durch „endliche Induktion nach $m(Q)$“, indem man zeigt:

(i) Induktionsanfang:
Jedes Monom $Q \in \mathcal{P}(d-2,n)$ mit $m(Q) = d-2$ ist im Bild von $\triangle|_{\mathcal{P}(d,n)}$ enthalten.

(ii) Induktionsschritt:
Sei $M \in \{1, \dots, d-2\}$. Wenn alle Monome $Q \in \mathcal{P}(d-2, n)$ mit $m(Q) \in \{M+1, \dots, d-2\}$ im Bild von $\triangle|_{\mathcal{P}(d,n)}$ liegen, so auch alle Monome $Q \in \mathcal{P}(d-2, n)$ mit $m(Q) = M$.]

(d) Kombiniere die bisherigen Ergebnisse, um $\dim \mathcal{H}(d, n)$ zu bestimmen. *(5 Punkte)*

15. Zum Maximumprinzip für harmonische Funktionen.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene, zusammenhängende, beschränkte Teilmenge und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ sowie $g_1, g_2 : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Weiter seien $u_1, u_2 : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ stetige, auf Ω zweimal stetig differenzierbare, Lösungen des Dirichlet-Problems

$$-\triangle u_k | \Omega = f , \qquad u_k | \partial\Omega = g_k$$

für $k \in \{1, 2\}$.

Zeige: Gilt $g_1 \leq g_2$, so auch $u_1 \leq u_2$. *(8 Punkte)*