Martin Schmidt
Sebastian Klein

Partielle Differentialgleichungen

6. Übung

9. Oktober 2012

(abzugeben in der Vorlesung am 16. Oktober 2012)

19. Über kompakte Mengen in Banachräumen.

Es sei X ein Banachraum. Zeige, dass die folgenden Aussagen zueinander äquivalent sind:

(i) In X gilt der *Satz von Heine-Borel*, d.h. eine Teilmenge A von X ist genau dann kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen in X ist.

(ii) Die Einheitsvollkugel $\overline{B(0,1)} = \{\, x \in X \mid \|x\| \leq 1 \,\}$ ist kompakt.

(iii) X ist endlich-dimensional. *(10 Punkte)*

[Tipp zu (ii) $\Rightarrow$ (iii): Ist $\overline{B(0,1)}$ kompakt, so existiert eine Überdeckung von X durch endlich viele offene Vollkugeln vom Radius $\frac{1}{2}$, etwa $\overline{B(0,1)} \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(a_i, \frac{1}{2})$ mit $a_1, \ldots, a_n \in X$. Sei V der von $a_1, \ldots, a_n$ erzeugte, endlich-dimensionale Vektorraum. Dann zeige man, dass für jedes $r > 0$ gilt: $\overline{B(0,r)} \subset V + \overline{B(0, \frac{r}{2})}$, und folgere hieraus

$$\overline{B(0,1)} \subset V + \overline{B(0, \tfrac{1}{2})} \subset V + \overline{B(0, \tfrac{1}{4})} \subset \ldots \subset V + \overline{B(0, \tfrac{1}{2^n})} \subset \ldots .$$

Warum folgt hieraus $X = V$?]

20. Kompakte Operatoren in Banachräumen.

Es seien X, Y zwei Banachräume. Dann heißt $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ *kompakt*, wenn es für jede beschränkte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ gibt, so dass $(Tx_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ in Y konvergiert.

(a) Zeige, dass $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ genau dann kompakt ist, wenn das Bild der offenen Einheitskugel $B(0,1) = \{\, x \in X \mid \|x\| < 1 \,\}$ von X unter T relativ-kompakt ist, d.h. wenn $\overline{T[B(0,1)]}$ kompakt ist. *(8 Punkte)*

[Tipp. Man verwende, dass eine Teilmenge eines metrischen Raums genau dann (überdeckungs-)kompakt ist, wenn sie folgenkompakt ist.]

(b) Die identische Abbildung $\mathbb{1}_X$ von X ist genau dann kompakt, wenn X endlich-dimensional ist. *(2 Punkte)*

[Tipp. Aufgabe 19.]

21. Über Hölder-Stetigkeit.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$.

(a) Zeige: Ist $u \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ für ein $0 < \alpha \leq 1$, so ist u gleichmäßig stetig. *(4 Punkte)*

(b) Dieses Beispiel zeigt, dass die Umkehrung von (a) nicht gilt. Sei

$$f : \left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{\ln|x|} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases} .$$

Zeige: f ist gleichmäßig stetig, aber für *kein* $0 < \alpha \leq 1$ hölder-stetig. *(6 Punkte)*

(c) Sei $0 < \alpha \leq 1$. Zeige, dass für die Funktion

$$f_\alpha : [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^\alpha$$

$f_\alpha \in C^{0,\alpha}([0,1])$, jedoch $f_\alpha \notin C^{0,\beta}([0,1])$ für jedes $\beta \in (\alpha, 1]$ gilt. *(6 Punkte)*

[Tipp. Man zeige zunächst, dass f_α – wie jede konkave Funktion mit $f_\alpha(0) \geq 0$ – *subadditiv* ist, d.h. dass für $x, y \in [0,1]$ gilt: $f_\alpha(x+y) \leq f_\alpha(x) + f_\alpha(y)$. Dann rechne man wie folgt: $f_\alpha(x) - f_\alpha(y) = f_\alpha((x-y)+y) - f_\alpha(y) \ldots$.]

(d) Diese Teilaufgabe zeigt, warum es ausreicht, $C^{0,\alpha}(\Omega)$ für offene Teilmengen Ω zu betrachten. Sei $0 < \alpha \leq 1$ und $u \in C^{0,\alpha}(\Omega)$. Man zeige, dass es genau eine stetige Funktion $\widetilde{u} \in C(\overline{\Omega})$ mit $\widetilde{u}|\Omega = u$ gibt. Weiter zeige man, dass $\widetilde{u} \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ ist, genauer, dass

$$\operatorname{höl}_{\overline{\Omega},\alpha} \widetilde{u} = \operatorname{höl}_{\Omega,\alpha} u$$

gilt. *(8 Punkte)*

[Tipp. u ist nach (a) gleichmäßig stetig; um $\widetilde{u}$ zu konstruieren, beachte man, dass deswegen für jede Cauchyfolge (x_n) in Ω die Folge $(u(x_n))$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ ist.]

(e) Diese Teilaufgabe zeigt, weshalb man keine Hölder-Räume $C^{0,\gamma}(\Omega)$ mit $\gamma > 1$ betrachtet. Sei $\gamma > 1$ und $u \in C^{0,\gamma}(\Omega)$. Zeige, dass u differenzierbar mit $\nabla u = 0$ ist; daher ist u auf jeder Zusammenhangskomponenten von Ω konstant. *(6 Punkte)*