Martin Schmidt
Sebastian Klein

Partielle Differentialgleichungen
5. Übung

2. Oktober 2012

(abzugeben in der Vorlesung am 9. Oktober 2012)

16. Über das Transformationsverhalten von Differentialoperatoren zweiter Ordnung.

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und L ein Differentialoperator zweiter Ordnung auf Ω in Nicht-Divergenzform, d.h. es gibt reelle Funktionen $a_{ij} \in C^2(\Omega)$, $b_i \in C^1(\Omega)$ und $c \in C(\Omega)$, so dass L die Form

$$(Lu)(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\partial_i\partial_j u(x) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\partial_i u(x) + c(x)u(x) \quad \text{für } u \in C^2(\Omega), x \in \Omega \tag{$*$}$$

hat.

Außerdem sei $\widetilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ eine weitere offene Teilmenge und $\varphi : \Omega \to \widetilde{\Omega}$ ein C^3-Diffeomorphismus, d.h. φ ist bijektiv, dreimal stetig differenzierbar, und $\varphi^{-1} : \widetilde{\Omega} \to \Omega$ ist ebenfalls dreimal stetig differenzierbar.

(a) Man zeige, dass durch $\widetilde{L}(\widetilde{u}) := L(\widetilde{u} \circ \varphi) \circ \varphi^{-1}$, d.h.

$$\widetilde{L}(\widetilde{u}) \circ \varphi = L(\widetilde{u} \circ \varphi)$$

für $\widetilde{u} \in C^2(\widetilde{\Omega})$ ein Differentialoperator zweiter Ordnung $\widetilde{L}$ auf $\widetilde{\Omega}$ definiert wird, d.h. dass es reelle Funktionen $\widetilde{a}_{k\ell} \in C^2(\widetilde{\Omega})$, $\widetilde{b}_k \in C^1(\widetilde{\Omega})$ und $\widetilde{c} \in C(\widetilde{\Omega})$ mit

$$\widetilde{L}\widetilde{u} = \sum_{k,\ell=1}^{n} \widetilde{a}_{k\ell}\, \partial_k\partial_\ell \widetilde{u} + \sum_{k=1}^{n} \widetilde{b}_k\, \partial_k \widetilde{u} + \widetilde{c}\,\widetilde{u}$$

gibt. *(12 Punkte)*

[Tipp. Man werte $(\widetilde{L}\widetilde{u})(\widetilde{x}) = \big(L(\widetilde{u} \circ \varphi)\big)(\varphi^{-1}(\widetilde{x}))$ für $\widetilde{u} \in C^2(\widetilde{\Omega})$ und $\widetilde{x} \in \widetilde{\Omega}$ mit Hilfe der Kettenregel aus.]

(b) Es seien nun darüberhinaus Ω und $\widetilde{\Omega}$ beschränkt, und wir setzen voraus, dass ϕ, ϕ^{-1} sowie alle Ableitungen dieser beiden Funktionen sich stetig auf den Abschluß $\overline{\Omega}$ bzw. $\overline{\widetilde{\Omega}}$ fortsetzen lassen. Zeige, dass unter dieser Voraussetzung $\widetilde{L}$ genau dann elliptisch ist, wenn L elliptisch ist. *(8 Punkte)*

17. Ein Spiegelungsprinzip für Lösungen elliptischer Differentialgleichungen.

Wir betrachten einen elliptischen Differentialoperator zweiter Ordnung L auf $\mathbb{R}^n$ in Nicht-Divergenz-Form, d.h. L habe die Form von Gleichung $(*)$ mit Funktionen $a_{ij} \in C^2(\mathbb{R}^n)$, $b_i \in C^1(\mathbb{R}^n)$ und $c \in C(\mathbb{R}^n)$. Es gelte $a_{in} = a_{nj} = b_n = 0$ für $i, j \in \{1, \ldots, n-1\}$, und

$$a_{ij}(\overline{x}) = a_{ij}(x), \quad b_i(\overline{x}) = b_i(x) \quad \text{und} \quad c(\overline{x}) = c(x)$$

für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ und $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$; hierbei sei $\overline{x} := (x_1, \ldots, x_{n-1}, -x_n)$ die Spiegelung von x an der Hyperebene $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$.

(a) Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\widetilde{\Omega} := \{\, \overline{x} \,|\, x \in \Omega \,\}$, und ist $u \in C^2(\Omega)$, so gilt für

$$\widetilde{u} : \widetilde{\Omega} \to \mathbb{R}, \; x \mapsto -u(\overline{x})$$

die Beziehung $L\widetilde{u}(\overline{x}) = -Lu(x)$ für $x \in \Omega$. Insbesondere gilt: Ist u eine Lösung der partiellen Differentialgleichung $Lu = 0$ auf Ω, so auch $\widetilde{u}$ auf $\widetilde{\Omega}$. *(8 Punkte)*

Wir wollen nun voraussetzen, dass für jedes offene, beschränkte $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und jedes $g \in C(\partial\Omega)$ das Dirichlet-Problem $Lu = 0$, $u|\partial\Omega = g$ eine Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ besitzt. (Später werden wir lernen, dass dies zumindest in einem „schwachen" Sinne tatsächlich stets der Fall ist.)

(b) Wir bezeichnen mit $B^+(0,1) := \{\, x = (x_1, \ldots, x_n) \in B(0,1) \,|\, x_n > 0 \,\}$ den im oberen Halbraum von $\mathbb{R}^n$ enthaltenen Teil der offenen Einheitsvollkugel $B(0,1)$ und mit $B^0(0,1) := \{\, x = (x_1, \ldots, x_n) \in B(0,1) \,|\, x_n = 0 \,\}$ den in $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ enthaltenen Teil von $B(0,1)$.

Sei $u \in C^2(B^+(0,1)) \cap C(\overline{B^+(0,1)})$ eine Lösung von $Lu = 0$ mit $u|B^0(0,1) = 0$. Man zeige, dass dann die Funktion

$$v : \overline{B(0,1)} \to \mathbb{R},\ x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \begin{cases} u(x) & \text{für } x_n \geq 0 \\ -u(\overline{x}) & \text{für } x_n < 0 \end{cases}$$

eine Lösung von $Lv = 0$ auf ganz $B(0,1)$ ist. *(12 Punkte)*

18. Ein Detail aus dem Beweis des Schwachen Maximumprinzips.

Es sei H eine symmetrische, negativ semidefinite, reelle $(n \times n)$-Matrix, d.h. es gilt $H^t = H$ und $x^t\, H\, x \leq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Zeige, dass es dann eine Matrix D mit $H = -D \cdot D^t$ gibt. *(10 Punkte)*

[Tipp. Aus der Linearen Algebra ist bekannt, dass H als symmetrische Matrix orthogonal diagonalisierbar ist, d.h. es gibt eine orthogonale Matrix S, so dass $S^{-1}HS = S^t\, H\, S$ Diagonalgestalt hat.]