Partielle Differentialgleichungen

Martin Schmidt
Sebastian Klein

2. Übung

11. September 2012

(abzugeben in der Vorlesung am 18. September 2012)

5. Eine verallgemeinerte Leibnizregel.

Es sei $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \mathbb{N}_0^n$ und $u, v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zwei $|\gamma|$-fach stetig differenzierbare Funktionen. *Zeige,* dass dann die folgende verallgemeinerte Leibnizregel gilt:

$$\partial^\gamma(uv) = \sum_{0 \le \delta \le \gamma} \binom{\gamma}{\delta} \partial^\delta u \, \partial^{\gamma-\delta} v \quad \text{mit} \quad \binom{\gamma}{\delta} := \binom{\gamma_1}{\delta_1} \cdot \ldots \cdot \binom{\gamma_n}{\delta_n} . \qquad \textit{(5 Punkte)}$$

[Tipp. Vollständige Induktion nach $|\gamma| \in \mathbb{N}_0$; man beachte die Formel $\binom{\gamma-e_j}{\delta-e_j} + \binom{\gamma-e_j}{\delta} = \binom{\gamma}{\delta}$ mit $e_j := (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{N}_0^n$.]

6. Über Distributionen.

(a) *Zeige*, dass

$$F : C_0^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \; \phi \mapsto \int_{\mathbb{R}} x^3 \cdot \phi''(x) \, \mathrm{d}x$$

eine Distribution auf $\mathbb{R}$ ist, und bestimme eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$F(\phi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot \phi(x) \, \mathrm{d}x \quad \text{für alle } \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}) . \qquad \textit{(3 Punkte)}$$

(b) *Zeige*, dass die Dirac-Distribution

$$\delta : C_0^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \; \phi \mapsto \phi(0)$$

in der Tat eine Distribution auf $\mathbb{R}$ ist, und beweise, dass es *keine* stetige Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\delta(\phi) = \int_{\mathbb{R}} g(x) \cdot \phi(x) \, \mathrm{d}x \quad \text{für alle } \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$$

gibt. *(4 Punkte)*

(c) *Bestimme* die Ableitung $\dot{F}$ bzw. $\dot{\delta}$ der beiden Distributionen aus (a) und (b). *(1+1 Punkte)*

7. Über die Faltung.

(a) *Zeige*, dass die Faltung von Funktionen mit kompaktem Träger auf dem $\mathbb{R}^n$ eine bilineare, kommutative und assoziative Verknüpfung ist. *(1+2+3 Punkte)*

(b) *Zeige*, dass bei Distributionen mit nicht-kompaktem Träger (auf $\mathbb{R}$) die Faltung selbst in den Fällen, in denen sie wohldefiniert ist, nicht assoziativ zu sein braucht. *(4 Punkte)*
[Tipp. Wir bezeichnen mit 1 die Einsfunktion auf $\mathbb{R}$, mit $\dot{\delta}$ die Ableitung der Dirac-Distribution (siehe Aufgabe 6(c)), und mit $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die *Heaviside-Funktion*, d.h. $H(x) = 1$ für $x \ge 0$ und $H(x) = 0$ für $x < 0$. Dann berechne man $1 * (\dot{\delta} * H)$ und $(1 * \dot{\delta}) * H$.]

(c) Seien $f, g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $\gamma \in \mathbb{N}_0^n$. *Zeige*, dass dann gilt:

$$\partial^\gamma(f * g) = f * \partial^\gamma g = \partial^\gamma f * g . \qquad \textit{(4 Punkte)}$$

[Tipp. Zuerst $\gamma = e_j := (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$.]

8. Eine alternative Beschreibung der Faltung einer Distribution.

Es sei $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Ziel der Aufgabe ist es, diese alternative Beschreibung der Faltung von ϕ mit F zu beweisen: Für jedes $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\, F(\mathsf{T}(x)\mathsf{P}g)\, \mathrm{d}^n x = F(\phi * \mathsf{P}g)\,. \qquad (*)$$

Dazu zeige man im Einzelnen:

(a) Es sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann existieren hierzu endlich viele Paare $(\phi_{\varepsilon,i}, x_{\varepsilon,i})_{i=1,\ldots,k_\varepsilon}$ in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, so dass für jedes $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$\left\| \phi * g - \sum_{i=1}^{k_\varepsilon} \phi_{\varepsilon,i} \mathsf{T}(x_{\varepsilon,i}) g \right\|_\infty \leq C(\phi, g) \cdot \varepsilon$$

mit einer von ϕ und g, jedoch nicht von ε abhängigen Konstanten $C(\phi, g)$ gilt.

(10 Punkte)

[Tipp. Weil ϕ kompakten Träger hat, existiert eine Überdeckung von $K := \mathrm{Tr}(\phi)$ durch endlich viele offene Bälle $U_1, \ldots, U_k$ vom Radius ε. Weiter existiert – und das soll ohne Beweis verwendet werden – zu dieser Überdeckung eine sogenannte *Zerlegung der Eins*, das bedeutet, es existieren Funktionen $\psi_1, \ldots, \psi_{k_\varepsilon} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, für die jeweils $0 \leq \psi_i \leq 1$, $\mathrm{Tr}(\psi_i) \subset U_i$ und $\sum_{i=1}^{k_\varepsilon} \psi_i | K = 1 | K$ gilt. Mit Hilfe dieser Daten fixiere man jeweils $x_{\varepsilon,i} \in U_i$ und setze $\phi_{\varepsilon,i} := \phi(x_{\varepsilon,i}) \cdot \int_{U_i} \psi_i(y)\, \mathrm{d}^n y$. Nun benutze man, dass ϕ und g Lipschitz-stetig sind (als C^1-Funktionen mit kompaktem Träger), um die gewünschte Abschätzung zu zeigen.]

(b) Für jedes $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ und jeden Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \phi * g - \sum_{i=1}^{k_{1/n}} \phi_{1/n,i} \mathsf{T}(x_{1/n,i}) g \right\|_{K,\alpha} = 0\,,$$

wobei $K \subset \mathbb{R}^n$ eine beliebige kompakte Menge ist. *(4 Punkte)*

[Tipp. Man folgere zunächst aus (a) die Behauptung für $\alpha = 0$. Hieraus gewinne man den allgemeinen Fall, indem man g durch $\partial^\gamma g$ mit $0 \leq \gamma \leq \alpha$ ersetzt und Aufgabe 7(c) berücksichtigt.]

(c) Folgere aus (b):

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k_{1/n}} \phi_{1/n,i} F(\mathsf{T}(x_{1/n,i}) g) = F(\phi * g)\,.$$

(3 Punkte)

(d) Verwende nun schließlich (c), um $(*)$ zu beweisen. *(5 Punkte)*

[Tipp. Der Satz von Lebesgue über die majorisierte Konvergenz (Vertauschbarkeit von Integral und Grenzwert) ist nützlich.]